

第5章 基于结构张量的图像扩散滤波

基于变分和偏微分方程的图像去噪与复原方法,把图像梯度作为描述图像特征的基本量,以梯度大小来估计各个位置的扩散程度。这种做法存在以下问题^[1]:①图像的局部结构信息并不仅仅表现为图像的梯度,梯度不能全面精细地刻画纹理和角点;②尽管图像梯度向量包含了局部方向信息,但对于某些具有特殊结构的图像,或在噪声干扰的情况下,由梯度算子所估计得到的方向信息是不准确的。由于在图像的弱边界梯度趋于0,从而容易对边缘判断错误;③梯度只能反映图像的点或小邻域内的局部性质,它对处理图像的局部特征很有利,而在处理图像的边缘线等大邻域特征时,尚存在不足;④传统各向异性扩散方程在修复图像时,仅考虑由梯度模的大小决定扩散系数,没有考虑梯度的方向信息,且在修复彩色图像时易产生虚假边缘;⑤由于振荡是图像脊线和纹理的性质,脊线和纹理是由二阶微分产生,而不是一阶微分,所以一阶微分不适合检测图像的震荡性,对图像纹理特征的刻画存在不足。因此,过度依赖梯度扩散滤波,可能会模糊图像边缘和细节特征,不能保持图像的几何结构特征。这促使人们去进一步探讨具有鲁棒性的图像结构及细节特征描述子。

本章把张量投票原理引入全变分正则化模型,建立了一种张量投票与全变分正则化结合的纹理图像去噪新方法。其基本思想是:根据结构张量及其特征值,构造一个图像结构显著性描述函数,以代替变分正则化模型中的拉格朗日乘子 λ ,使其能根据图像不同区域的结构特征,去调节变分模型中正则项和保真项的作用。实验结果表明,该模型比其他已有的全变分模型具有明显的抗干扰能力,能够更准确、精细地刻画图像边缘、特征结构和平滑区域,克服了其他全变分模型所产生的阶梯效应和过平滑现象,特别是对于纹理特征丰富的图像,在去除噪声的同时能较好地保持边缘及其他重要特征。

5.1 引言

1998年,Weickert提出了结构张量(structure tensor, ST)的概念^[2-4],并证明结构张量可用来估计图像方向场和分析图像局部几何结构,开创了张量扩散用于图像滤波研究

的先河。结构张量理论在过去近 20 年中,已被成功应用于图像方向场计算^[5-7]、特征检测^[8-9]、图像去噪和增强^[10-12]等领域。Weickert 提出的结构张量是以梯度为依据来构造的,本质上仍然依赖于图像的局部梯度。前面谈到,把图像梯度作为描述图像特征的基本量,以梯度大小来估计各个位置的扩散程度,存在明显的缺点。并且,Weickert 提出的结构张量只使用了梯度计算的一致性,它不能在梯度很小时进行精确计算,从而影响了弱边界的识别率。为解决图像弱边界、纹理特征描述等问题,研究人员基于 Weickert 张量模型提出了诸多改进模型^[13-30]。研究表明,梯度方法、Hessian 矩阵方法刻画图像几何结构特征的侧重点不同,在强边缘处梯度方法比较有效,而在图像的弱边缘和震荡处用 Hessian 矩阵方法比较有效。

5.2 结构张量

Cottét 和 Germain 使用梯度张量作为结构张量^[17],但这样简单的结构张量无法处理边角和平行结构。为此,Weickert 提出了一种新的结构张量^[3,4],其特征值表明了特定窗口内的灰度变化,为局部信息提供了一种合适的表示,可以用于表示三维物体表面局部方向角,能够区分图像中不同的结构,如流状纹理、边角、T 形连接等,从而更好地描述和分析图像数据。

采用 Gaussian 核函数作为加窗函数,构造图像 $u(x, y)$ 的结构张量 \mathbf{T} 。

$$\mathbf{T} = G_t * \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = G_t * (\nabla u \nabla u^T) = G_t * \begin{pmatrix} u_x^2 & u_{xy} \\ u_{xy} & u_y^2 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

其中, $u_{11} = u_x^2 = \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right)^2$; $u_{22} = u_y^2 = \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right)^2$; $u_{12} = u_{21} = u_{xy} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}$; G_t 为以 t 为参数的 Gaussian 核函数。

通过计算可得到 \mathbf{T} 的两个特征值为

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} (u_{11} + u_{22} \pm \sqrt{(u_{11} - u_{22})^2 + 4u_{12}^2}) \quad (5.2)$$

其中, $\mu_1 > \mu_2$, 其对应的特征向量分别为 \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 , 且有 $\mathbf{v}_1^T = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathbf{v}_2^T = (-\sin\theta, \cos\theta)$ 。

图像局部结构张量包含了该邻域内信号变化的大小(特征值)和方向(特征向量)。对于图像信号,可以采用椭圆来刻画张量,其长短轴的方向与张量的两个特征向量方向一致,其大小与对应的特征值的平方根成反比。因此, μ_1 表示在尺度为 t 的邻域内,灰度变

化最快的方向为 \mathbf{v}_1 , 其变化率为 $\sqrt{\mu_1}$ 。而在同一点的另一邻域内, 灰度变化最慢的方向为 \mathbf{v}_2 , 其变化率为 $\sqrt{\mu_2}$ 。类似地, 对于三维信号可以采用椭球来刻画张量。

依据矩阵谱分解定理, 张量 \mathbf{T} 可以分解成其特征值和特征向量的线性组合

$$\mathbf{T} = (\mu_1 - \mu_2) \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \mu_2 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) \quad (5.3)$$

$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T$ 称为棒形张量(显示其曲线特征), $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T$ 称为球形张量(显示其节点特征)。直观上, 式(5.3)将二维空间中的一个二阶对称正定张量分解为棒形张量和球形张量的线性组合, 其几何结构如图 5.1 所示。

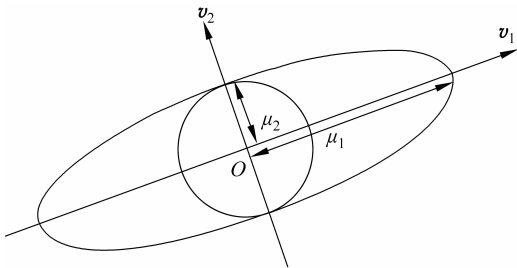


图 5.1 二阶正定对称张量的几何结构

特征值与图像结构特征有如图 5.2 所示关系。

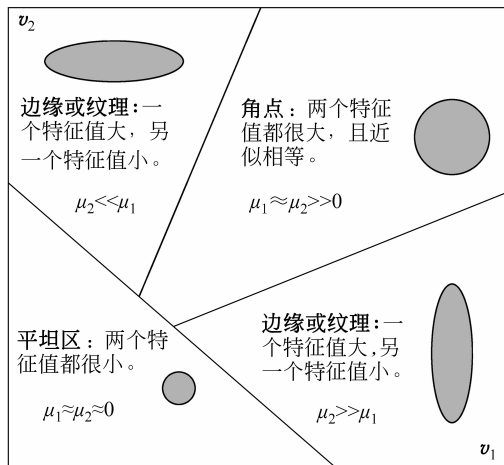


图 5.2 特征值与图像结构特征之间的关系

(1) 当两个特征值 μ_1 、 μ_2 都比较大且近似相等时, 即 $\mu_1 \approx \mu_2 \gg 0$, 表示图像在两个互相垂直的方向上灰度值都有较快的变化, 可以说是图像的角点或具有 T 形局部结构特征。

(2) 一个特征值比较大, 另一个特征值比较小, 即 $\mu_1 \gg \mu_2$ 或者 $\mu_1 \ll \mu_2$ 时, 表示一个方向上图像灰度变化率比较大, 而另一个方向上比较小。表明图像具有明显的边缘和纹理结构特征。也就是说, 在这一局部区域的灰度值表现出很强的相干性 (coherence)。因此, 可用

$$c = (\mu_1 - \mu_2)^2 \quad (5.4)$$

作为图像局部相干性的量度。

(3) 当两个特征值都比较小且近似相等时, 即 $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 0$, 表示图像在该点附近任何方向灰度变化都比较小, 可以说是图像的平坦区域, 此时, $c \approx 0$ 。

特殊情况下, 当 $t=0$ 时, $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} u_x^2 & u_{xy} \\ u_{xy} & u_y^2 \end{pmatrix}$, 则其对应特征值

$$\begin{cases} \mu_1 = u_x^2 + u_y^2 = |\nabla u|^2 \\ \mu_2 = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

因此, 张量 \mathbf{T} 只有一个非零特征值 $|\nabla u|^2$, 它对应的特征向量就是归一化的梯度矢量, 即 $v_1 = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \eta$ 。

通过利用 $t>0$ 和局部特征矩阵 \mathbf{T} 可获得更丰富的图像局部结构信息。对于二维信号, 张量 \mathbf{T} 还具有 180° 旋转不变性。利用这些特征可以更加清晰地刻画图像的结构, 更好地控制扩散过程, 以实现去噪的同时保持图像的边缘和细节特征的目的。

5.3 扩散张量

通过上面的分析可知, 结构张量能较好地描述图像的局部结构特征, 其特征向量和特征值可反映图像灰度变化的方向和沿该方向变化的剧烈程度。但在实际应用中, 不仅仅需要准确描述图像特征, 而且需要在图像复原过程中对某些有用的信息进行增强处理。因此, 需要定义一个更为一般的描述量——扩散张量。

假设 \mathbf{D} 为扩散张量, 则需满足以下两个条件。

(1) \mathbf{D} 是对称正定矩阵。

(2) 具有与 $u(x, y)$ 的结构张量 \mathbf{T} 相同的特征向量。

扩散张量 \mathbf{D} 可表示为

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

假设 λ_1, λ_2 为 \mathbf{D} 的特征值 ($\lambda_1 > \lambda_2$), $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是与之对应的特征向量:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = (\cos\theta, \sin\theta) \\ \mathbf{v}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta) \end{cases} \quad (5.6)$$

根据矩阵本征分解定理, 则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T = \lambda_1 \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

可得矩阵元素与特征值和特征向量的关系如下:

$$\begin{cases} a = \lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta \\ b = (\lambda_1 - \lambda_2) \sin\theta \cos\theta \\ c = \lambda_1 \sin^2\theta + \lambda_2 \cos^2\theta \end{cases} \quad (5.8)$$

由此可见, 设计扩散矩阵 \mathbf{D} 的问题, 等价于设计参数 λ_1, λ_2 和 θ 的问题。如果将扩散矩阵 \mathbf{D} 的特征向量确定为结构张量 \mathbf{T} 的两个特征向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, 则 θ 可由此确定。如将参数 λ_1, λ_2 分别取为 μ_1, μ_2 , 则扩散张量就退化为结构张量 $\mathbf{D} = \mathbf{T}$ 。可见, 扩散张量是结构张量的推广。通过上面方法定义的扩散张量同样能对图像变化进行精确的定向。

根据文献[3], 若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 分别表示扩散张量 \mathbf{D} 的特征向量, 且 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 分别对应垂直图像边缘的梯度方向和边缘的切线方向, 利用 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 构成的局部坐标系, 则各向异性张量扩散方程可表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(\mathbf{D}\nabla u) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \left(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}_2} \right) \\ &= \lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{v}_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{v}_2^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

即表示对 u 进行光滑近似于分别以 λ_1, λ_2 的速度沿 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 方向进行扩散。

根据图像处理要求的不同, 对于不同的传导系数 λ_1, λ_2 的设计, Weickert 给出了两种经典的图像修复模型——边缘增强型模型和相干增强型模型。

5.3.1 边缘增强张量扩散

为增强图像的边缘, 对于各向异性扩散模型 $\partial u / \partial t = \operatorname{div}(\mathbf{D}\nabla u)$, 扩散张量 \mathbf{D} 的特征向量与 $t=0$ 时结构张量 $\mathbf{T} = J_0(\nabla u_\sigma \nabla u_\sigma^T)$ 的特征向量相同。其中, u_σ 表示经过高斯函数平滑

后的图像 u , σ 为高斯函数的尺度。假设 \mathbf{T} 的两个正交特征向量与相应的特征值分别为 \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 和 μ_1 、 μ_2 。取特征向量 \mathbf{v}_2 (沿边缘切线方向) 对应的特征值为 $\lambda_2 = 1$; 特征向量 \mathbf{v}_1 (垂直于边缘的方向) 对应的特征值 λ_1 为对应结构张量的特征值 μ_1 的单调减函数, 从而达到保护边缘的目的^[3]。

特征值应满足 $\lim_{\mu_1 \rightarrow 0} \lambda_1 = 1$, λ_1 、 λ_2 的取值可分别取为

$$\lambda_1 = \begin{cases} 1, & \mu_1 = 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{1}{\mu_1}\right), & \text{其他} \end{cases}, \quad \lambda_2 = 1 \quad (5.10)$$

由于结构张量 $\mathbf{T} = J_0(\nabla u_\sigma \nabla u_\sigma^T)$ 不能准确地定向边缘, 并且易受噪声的干扰, 因此对图像的转角和 T 形结构不能进行有效的保护。实验表明, 边缘增强型扩散方法适用于具有大边缘的图像滤波。

5.3.2 相干增强张量扩散

与图像边缘增强扩散不同, 在相干增强扩散模型中, 扩散张量 \mathbf{D} 的特征向量与结构张量 $\mathbf{T} = J_t(\nabla U_\sigma) = G_t * (\nabla u_\sigma \nabla u_\sigma^T)$ 的特征向量相同, 其中, $t > 0$ 反映了线状结构的特征尺寸。假设 \mathbf{T} 的两个正交特征向量与相应的特征值分别为 \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 和 μ_1 、 μ_2 , 其较小特征值对应垂直梯度方向, 即相干方向的特征向量^[10,11]。式(5.4)定义的相干性测度 c , 不仅可以检测边缘 ($c \gg 0$), 也可以检测角点和 T 形结构 ($c \approx 0$), 利用相干性测度 c 来构造张量扩散矩阵就可以保护边缘、角点和 T 形结构。Weickert 建议为增强线状结构特征, 可取特征向量 \mathbf{v}_2 (沿边缘方向) 对应的特征值为 λ_2 随不同特征方向上的相干性测度 $c = (\mu_1 - \mu_2)^2$ 的增大而增大, 则张量扩散矩阵 \mathbf{D} 的特征值 λ_1 、 λ_2 的值可分别取为

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = \alpha + (1 - \alpha) \exp(-1/c) \end{cases} \quad (5.11)$$

式(5.11)中, α 是一个很小的正数, 用来保证扩散张量的正定性。例如, 可以取 $\alpha = 0.001$ 。

该模型设计的基本思想是: 一方面, 沿着图像变化最快的方向 (\mathbf{v}_1), 扩散率 λ_1 保持一个很小的正数, 因而边缘得以保护; 另一方面, 沿图像变化最慢的方向 (\mathbf{v}_2), 传导率 μ_2 根据相干性的强弱自动调节。当 c 很大时, $\exp(-1/c) \rightarrow 1$, 从而有 $\lambda_2 \approx 1$, 即接近于最高的扩散率。但若图像没有明显的相干性, 即 $c \approx 0$, 则表示可能是扩散点位于角点或 T 形结构区域。此时, $\lambda_2 \approx \alpha$, 沿 \mathbf{v}_2 方向的扩散十分缓慢, 保护了角点或 T 形区域等局部结构不被模糊化。

在结构张量 \mathbf{T} 中, 由于大尺度的高斯平滑核 ($\nabla u_\sigma \nabla u_\sigma^T$) 的作用, 使得边缘的定向更为准

确,但由于 α 的取值非常小,使得在被噪声污染的光滑区域, λ_2 的值也会比 λ_1 要大,但沿相干方向扩散时,会因此产生出许多虚假条纹,从而影响图像复原质量。因此,相干增强扩散模型适合用于含有丰富细节和纹理特征的图像(如指纹图像)的滤波。在这两个经典的模型的基础上,近些年研究人员针对不同特定的图像处理任务提出了一些相关改进方法^[15,16,19,22,27,30],并取得了一定的效果。

5.4 基于张量投票的纹理图像去噪与复原

针对梯度在表征图像结构和方向信息方面的弱点,以及 Weickert 张量扩散模型存在的不足,本节把张量投票原理引入全变分模型,建立一种张量投票与全变分能量最小化结合的纹理图像去噪新模型^[31]。该模型在图像的平滑区域采取大的去噪强度以去除噪声,而在图像的边缘处进行小强度的去噪甚至不去噪以保持边缘,从而获得理想的去噪效果,并能较好地保持边缘及细节特征的效果。

5.4.1 图像局部结构特征相干性函数

利用如下的图像 $u(x, y)$ 局部特征矩阵:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x^2 & u_{xy} \\ u_{xy} & u_y^2 \end{pmatrix} * G_t \quad (5.12)$$

其中, $a = \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right)^2 * G_t$; $c = \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right)^2 * G_t$; $b = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} * G_t$; G_t 为 Gaussian 核函数,计算可得到 \mathbf{D} 的两个本征值为

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} (a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}) \quad (5.13)$$

张量投票是一种可用于检测图像中显著性结构(如点、线、面)的方法^[23,24]。它包括用于数据表示的张量计算和用于数据传递的线性投票两个过程^[25]。本节讨论只涉及二维情况。

大家知道,任意二阶对称张量 \mathbf{D} 可以用如下形式表示

$$\mathbf{D} = \mu_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \mu_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T \quad (5.14)$$

其中 μ_1, μ_2 为 \mathbf{D} 的特征值; $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 为对应特征值 μ_1, μ_2 的特征向量。

依据矩阵谱分解定理,张量 \mathbf{D} 可以分解成其特征值和特征向量的线性组合,即有下式:

$$\mathbf{D} = (\mu_1 - \mu_2) \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \mu_2 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) \quad (5.15)$$

在此, $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T$ 只有一个主要方向, 称为棒形张量, 显示其曲线特征。($\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T$) 具有两个方向, 称为球形张量, 显示其节点特征。直观上式(5.15)将二维空间中的一个二阶对称正定张量分解为棒形张量和球形张量的线性组合。在对输入数据的编码过程中, 带有方向信息的输入数据点被编组成一个棒张量, 此时 $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$ 。不带方向信息的输入数据点被编组成一个球张量 $\mathbf{D} = \mathbf{I}$, \mathbf{I} 为单位矩阵, 此时 $\mu_1 = \mu_2 = 1$ 。

由式(5.15)看出, 如果 $\mu_1 \gg \mu_2$, 此时式中的第一部分起主导作用, 即棒形张量起主要作用; 反之, 若 μ_2 很大, 则球形张量起主要作用。

对于二维图像来说, 主要检测奇异点、曲线及边缘, 根据上面的分析, 可以定义表征图像局部结构特征相干性函数如下:

$$c(\mu) = |\mu_1 \mu_2| + |\mu_1 - \mu_2|^2 \quad (5.16)$$

当 $c(\mu) \rightarrow 0$ 时, 说明该点处于图像的平坦区域, 希望以扩散为主, 正则项将起主要作用; 当 $c(\mu) \gg 0$ 时, 说明该点处于图像的边缘或者是角点或者 T 形局部结构区域, 希望弱化扩散行为, 以保持边缘和细节特征, 保真项起主要作用。

在此, 引入图像结构显著性函数 $c(s)$, 以控制变分模型中正则项和保真项的作用。

$$c(s) = k + \exp(-[|\mu_1 \mu_2| + (\mu_1 - \mu_2)^2]) \quad (5.17)$$

这里 k 为与噪声强度有关的控制参量, 根据大量实验结果分析, 本节 k 值取噪声方差的两倍。

5.4.2 张量投票与全变分正则化图像去噪与复原

在此, 提出如下基于张量投票与全变分能量最小化结合的图像去噪与复原模型:

$$\min_{u \in BV(\Omega)} E(u) = \iint_{\Omega} c(s) \cdot \Phi\left(\frac{|\nabla u|}{u}\right) dx dy + \iint_{\Omega} |u(x, y) - u_0(x, y)|^2 dx dy \quad (5.18)$$

在式(5.18)中, $c(s)$ 的引入有两个作用: 一是代替与噪声和梯度有关的调节参数, 平衡正则项和保真项的作用; 二是将图像结构特征引入扩散机制, 弱化扩散过程中梯度的作用。

由式(5.17)和式(5.18)看出: 当 $|\mu_1 \mu_2| + |\mu_1 - \mu_2|^2$ 较小时, 说明此处的图像结构显著性较弱, 即为平坦区域, $c(s)$ 相对较大, 加强了正则项的作用; 当 $|\mu_1 \mu_2| + |\mu_1 - \mu_2|^2$ 较大时, 说明此处的图像结构显著性较强, 即为非平坦区域, $c(s)$ 相对较小, 加强了保真项的作用。因此, 图像结构显著性函数 $c(s)$ 的引入, 可根据图像结构特征自适应地平衡正则项和保真项的作用。

式(5.18)对应的欧拉-拉格朗日方程为

$$-\frac{1}{u} \nabla \cdot \left(\Phi' \left(\frac{|\nabla u|}{u} \right) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \cdot c(s) - \frac{|\nabla u|}{u^2} \Phi' \left(\frac{|\nabla u|}{u} \right) \cdot c(s) + (u - u_0) = 0 \quad (5.19)$$

式(5.19)对应的梯度下降流为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{u} \nabla \cdot \left(\Phi' \left(\frac{|\nabla u|}{u} \right) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \cdot c(s) + \frac{|\nabla u|}{u^2} \Phi' \left(\frac{|\nabla u|}{u} \right) \cdot c(s) - (u - u_0) \quad (5.20)$$

(η, ξ) 坐标下的欧拉-拉格朗日方程为

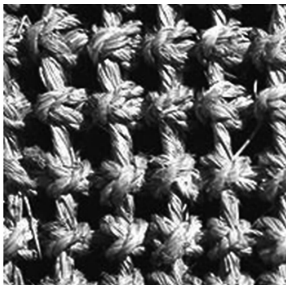
$$c(s) \cdot \left(\frac{1}{|\nabla u|} \Phi' \left(\frac{|\nabla u|}{u} \right) u_{\xi\xi} + \frac{1}{u} \Phi'' \left(\frac{|\nabla u|}{u} \right) u_{\eta\eta} - \frac{(\nabla u)^2}{u^2} \Phi'' \left(\frac{|\nabla u|}{u} \right) + \frac{|\nabla u|}{u} \Phi' \left(\frac{|\nabla u|}{u} \right) \right) - u(u - u_0) = 0 \quad (5.21)$$

这里取 $\Phi(s)$ 为

$$\Phi(s) = (1 + s^2)^{1/2} - 1 \quad (5.22)$$

5.4.3 数值仿真实验

为了验证新方法的去噪效果,选取了两幅大小为 256×256 像素,纹理特征比较明显的灰度图像 Knots 和局部 Barb,利用 Matlab 进行仿真实验。给原图像分别加入不同强度的零均值 Gauss 白噪声,用被噪声污染的 Knots 图像和 Barb 图像作为输入(见图 5.3),用峰值信噪比(PSNR)和绝对均值误差(Mean Absolute Error, MAE)作为评价复原图像质量的客观标准,分别用 Marquina 和 Osher 提出的 MO TV 模型^[32]、Bing 提出的广义变分模型(BS TV)^[33]以及本节提出的模型进行实验分析比较,如图 5.4~图 5.11 所示。



(a) Knots 图像



(b) Barb 图像

图 5.3 原始图像

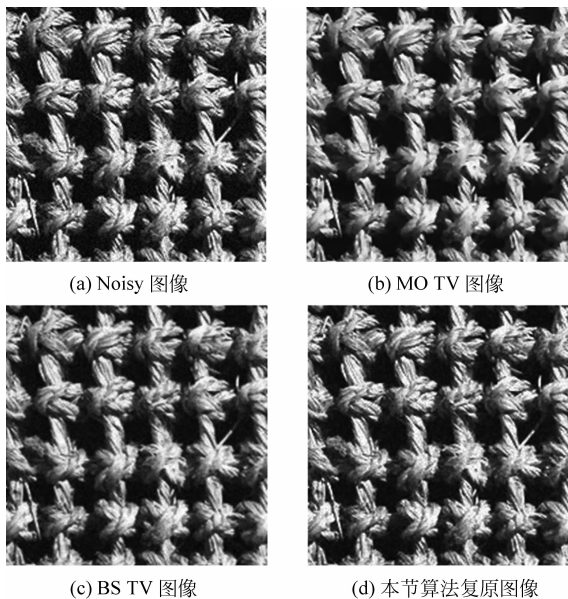


图 5.4 噪声强度 $\sigma^2 = 10$ 的 Knots 图像的 3 种方法去噪效果

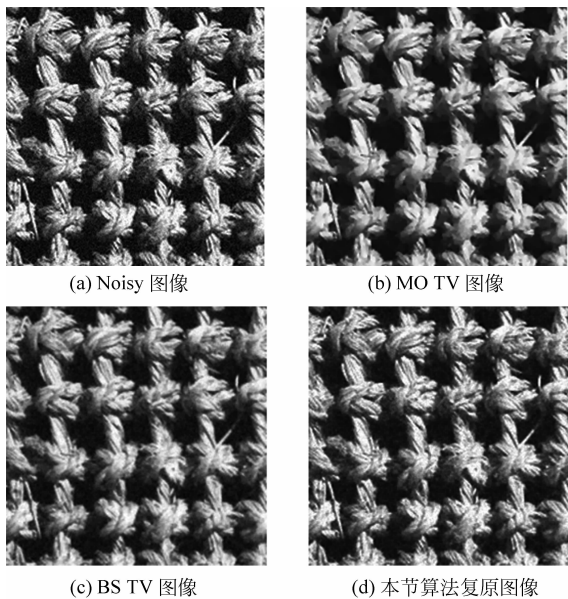


图 5.5 噪声强度 $\sigma^2 = 15$ 的 Knots 图像的 3 种方法去噪效果