第 6 章　常微分方程

学习目标与要求

1. 理解微分方程的基本概念，掌握微分方程的初步理论.
2. 掌握可分离变量微分方程及一阶齐次微分方程的解法.
3. 掌握一阶线性微分方程及伯努利方程的解法.
4. 掌握全微分方程的解法和几种可降阶微分方程的解法.
5. 掌握二阶常系数微分方程的解法. 掌握欧拉方程的解法.
6. 会用一阶微分方程和可降阶微分方程解决实际问题.
7. 会用二阶常系数微分方程解决实际问题.

微分方程是伴随着微积分的产生和发展而成长起来的一门学科. 从诞生之日起就显示出它的重要作用，在天体力学和其他力学领域显示出巨大的功能. 时至今日，微分方程在自然科学领域和社会科学领域都有着广泛的应用，是自然科学中表述各种基本规律的基本工具，是数学联系实际问题的重要手段. 20 世纪以前，微分方程问题主要来源于几何学、力学和物理学，而现在几乎渗透到自然科学和一些社会科学的各个领域. 如机械、电信、核能、火箭、人造卫星、生物、医学、人口理论、经济预测等领域都有微分方程的应用，尤其是地球椭圆轨道的计算、海王星的发现、弹道轨道的定位、大型机械振动的分析、自动控制的设计、气象数值预报、人口增长宏观预测等. 微分方程已成为当今数学中最具有活力的分支之一，是人们研究科学技术、解决实际问题的不可缺少的有力工具.

6.1　微分方程简述

6.1.1　微分方程基本概念

1. 实际应用问题分析

实际问题 6.1 几何问题

设曲线 $y=f(x)$ 上任意一点的切线斜率都等于该点横坐标的 2 倍，且曲线过点 $(0,1)$，求曲线的方程.

【解】 由导数的几何意义知所求曲线应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,$$

即

$$\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x.$$

对上式两边积分，得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C \quad (C\text{为常数}),$$

因为，曲线过点 $(0,1)$ ，所以，将 $x=0,y=1$ 代入曲线方程得 $C=1$，所以所求曲线的方程为

$$y=x^2+1.$$

实际问题 6.2 自由落体问题

历史上伽利略在比萨斜塔（图 6.1）上做自由落体实验总结出了自由落体定律．设质量为 m 的物体自由下落，求物体的运动规律 (重力加速度为 g)．

【解】 如图 6.2 所示，设物体的运动规律为 $x=x(t)$，根据牛顿第二定律 $F=-ma$，由导数的运动学意义知，物体运动的速度为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ，加速度为 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$．得

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-mg,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-g,$$

两边积分得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1 \quad (C_1\text{为常数}),$$

两边再积分得

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \quad (C_1,C_2\text{为常数}),$$

因为 $x(t)$ 还应满足条件 $x(0)=h,x'(0)=0$ ，所以 $C_1=0,C_2=h$．则所求物体的运动规律为

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+h.$$

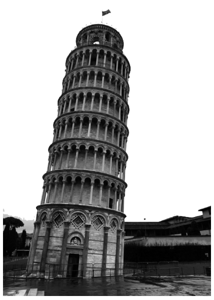

图 6.1　比萨斜塔

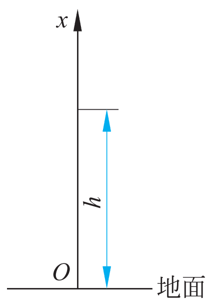

图 6.2　自由落体

实际问题 6.3 新产品销售模型

在实际生活中，许多量随时间的变化率正比于它本身的大小，如银行存款按一定的利率增加；世界人口按照一定的增长率增长等．下面以新产品销售模型为例，进行微分方程模型的建立．

经济学家和企业都很关注新产品的销售速度，希望能建立一个数学模型描述销售情况，并用其指导生产．

设有新产品推向市场，时刻 t 的销售量 x 是 t 的函数 $x=x(t)$．由于产品性能良好而使已

经销售的新产品实际上起着广告宣传的作用，即每一个销售的新产品都是一个宣传品，它吸引着尚未购买的顾客，若每一个销售的新产品在单位时间内平均吸引 λ 个顾客，则可以认为 t 时刻新产品销售量的变化率 $x'(t)$ 与销售量 $x(t)$ 成正比.

【解】 由题意可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda x,$$

写成微分的形式为

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lambda\mathrm{d}t,$$

两边积分

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int\lambda\mathrm{d}t,$$

可得

$$\ln x=\lambda t+C_1,$$

即

$$x=C\mathrm{e}^{\lambda t},$$

若 $x(0)=x_0$，则销售函数为 $x=x_0\mathrm{e}^{\lambda t}$.

当已有 x_0 个新产品销售并投入使用时，函数 $x(t)=x_0\mathrm{e}^{\lambda t}$ 在开始的阶段能较好地反映真实的销售情况．但这个函数有如下两个缺陷：

① 取 $t=0$ 表示新产品诞生的时刻，即 $x_0=0$，这时销售函数为 $x(t)=0$，显然不符合事实．原因是只考虑了实物广告的作用，而忽略了厂家可以通过其他方式宣传新产品，从而打开销路的可能性.

② 在 $x(t)=x_0\mathrm{e}^{\lambda t}$ 中，若令 $t\to+\infty$，则有 $x(t)\to+\infty$，这不符合实际．事实上，任何一种新产品的销量都不可能随时间的推移而无限增大，而是随着时间的延长越来越小．$x(t)$ 应该有一个上界．设上界 (需求量的上限)为 N，则尚未使用新产品的顾客数为 $N-x(t)$．修正后的模型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda x(N-x),$$

变形 (分离变量)得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(N-x)}=\lambda\mathrm{d}t,$$

两边积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(N-x)}=\int\lambda\mathrm{d}t,$$

可得

$$\frac{1}{N}(\ln x-\ln(N-x))=\lambda t+C_1,$$

即

$$x(t)=\frac{N}{1+C\mathrm{e}^{-N\lambda t}},$$

若 $x(0)=x_0$，则销售函数为

$$x(t)=\frac{Nx_0}{x_0+(N-x_0)\mathrm{e}^{-N\lambda t}}.$$

下面讨论函数

$$x(t) = \frac{Nx_0}{x_0 + (N - x_0)\mathrm{e}^{-N\lambda t}}$$

的性质．直接求导数比较麻烦，考查

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda x(N - x),$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= \lambda(N - x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \lambda x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ &= \lambda((N - x)^2\lambda x - \lambda x^2(N - x))\\ &= \lambda^2 x(N - x)(N - 2x).\end{aligned}$$

当 $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{N}{2}$ 时，$x''(t) > 0$；当 $\dfrac{N}{2} \leqslant x \leqslant N$ 时，$x''(t) < 0$．因此，$x'(t)$ 的最大值是 $x'\left(\dfrac{N}{2}\right) = \dfrac{\lambda N^2}{4}$．

由以上讨论可知，当销售量小于最大需求量的一半时，销售速度越来越大；当销售量大于最大需求量的一半时，销售速度越来越小．而当销售量等于最大需求量的一半时，销售速度最大，产品最畅销．国外学者普遍认为，对于某一新产品，当有 30% ~ 80% 的用户采用时，正是该产品大批量生产的合适期．当然，还应注意在初期可小批量生产并辅以广告宣传，而后期则应适时转产或开发新产品，这样可以使厂家获得较高的经济效益．

在经济活动中，有时需要根据经济规律写出经济函数导数满足的等式，并由此等式进一步讨论经济函数的表达式、性质等．这样的等式就是微分方程．

2．微分方程的基本概念

定义 6.1 常微分方程

含有未知函数导数 (或微分)的方程称为微分方程．若微分方程的未知函数仅含有一个自变量，这样的微分方程称为常微分方程．

定义 6.2 微分方程的阶

微分方程中所含未知函数的导数 (或微分)的最高阶数称为该微分方程的阶数．

一般地, n 阶微分方程的形式为

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

定义 6.3 微分方程相关概念

如果函数 $y = f(x)$ 满足一个微分方程，则称此函数为该微分方程的解．如果微分方程的解中含有相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解称为该微分方程的通解；在通解中给任意常数以确定的值或根据所给的条件确定通解中的任意常数而得到的解称为特解，这种条件我们称之为初始条件．带有初始条件的微分方程求解问题称为初值问题．求微分方程的解的过程称为解微分方程．

例 6.1 验证函数 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$ $(C_1, C_2$ 为任意常数)是微分方程 $y'' - y = 0$ 的解．

【解】 对 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$ 求导数得

$$y' = C_1\mathrm{e}^x - C_2\mathrm{e}^{-x},$$

$$y'' = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x},$$

将 y, y'' 代入微分方程 $y'' - y = 0$ 得

$$y'' - y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x} - (C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x}) = 0.$$

所以 $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x}$ 是微分方程 $y'' - y = 0$ 的解.

例 6.2 上例中加入初始条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ ，解此初值问题.

【解】 将初始条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 代入 $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x}$ 和 $y' = C_1\mathrm{e}^{x} - C_2\mathrm{e}^{-x}$ 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 - C_2 = 0. \end{cases}$$

解得 $C_1 = C_2 = 1$.

即方程 $y'' - y = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的特解为 $y = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$.

6.1.2 可分离变量微分方程

1. 可分离变量微分方程

定义 6.4 可分离变量微分方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ 的微分方程，称为可分离变量微分方程，其中 $f(x), g(y)$ 分别是 x, y 的连续函数，且 $g(y) \neq 0$.

可分离变量的微分方程解法如下：

(1) 分离变量

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x. \tag{6.1}$$

(2) 两边积分

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x. \tag{6.2}$$

(3) 得通解

$$G(y) = F(x) + C \quad (C\text{为常数}). \tag{6.3}$$

其中 $G(y), F(x)$ 分别是 $\dfrac{1}{g(y)}$，$f(x)$ 的一个原函数．这种解方程的方法称为分离变量法.

例 6.3 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2}{2y}$ 的通解.

【解】 分离变量得

$$2y\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x,$$

两边积分

$$\int 2y\mathrm{d}y = \int 3x^2\mathrm{d}x,$$

得通解为

$$y^2 = x^3 + C \quad (C\text{为常数}).$$

例 6.4 求微分方程 $xy^2\mathrm{d}x + (1 + x^2)\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

【解】 分离变量得

$$-\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \frac{x}{1 + x^2}\mathrm{d}x,$$

两边积分

$$-\int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

得通解为

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 \quad (C_1\text{为常数}).$$

令 $C_1 = \ln C$ ，通解可写成 $\dfrac{1}{y} = \ln C\sqrt{1+x^2}$.

实际问题 6.4 伤口愈合

医学研究发现，创面恢复的速度为 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -5t^{-2}(1 \leqslant t \leqslant 5$，单位：cm²/天)，其中 A 表示创面的面积，假设 $A(1) = 5$ cm²，问受伤 5 天后该病人的创面面积为多少?

【解】 由

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -5t^{-2},$$

得

$$\mathrm{d}A = -5t^{-2}\mathrm{d}t,$$

两边积分得

$$A(t) = -5\int t^{-2}\mathrm{d}t = 5t^{-1} + C \quad (C\text{为常数}).$$

将 $A(1) = 5$ 代入上式得 $C = 0$，所以 5 天后病人的创面面积

$$A(5) = 1\ (\mathrm{cm}^2).$$

实际问题 6.5 飞机着陆

(1)一架重 4.5 t 的歼击机以 600 km/h 的速度着陆，在减速伞的作用下滑跑 500 m 后速度减为 100 km/h，通常情况下空气对伞的阻力与飞机的速度成正比，问减速伞的阻力系数是多少？(2)若重 9 t 的轰炸机以 700 km/h 的速度着陆，机场跑道为 1 500 m，问轰炸机能否安全着陆？

【解】 设飞机质量为 m，着陆速度为 v_0，滑跑速度为 $v(t)$，滑跑距离为 $x(t)$，则由牛顿第二定律，可得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv(t),$$

分离变量得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{v(t)} = -k\mathrm{d}t,$$

两边积分得

$$v(t) = v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

积分得 $x(t)$ 随时间 t 的变化关系为

$$x(t) = \frac{mv_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}).$$

代入数据可得问题 (1)的阻力系数为 $k = 4.5 \times 10^6$ kg/h；问题 (2)的安全着陆距离为 1 400 m，飞机能安全着陆.

实际问题 6.6 考古出土文物历史年代的确定

利比于 1949 年发明了 ^{14}C 年龄测定法．在给定时刻 t,^{14}C 的衰变速度与 ^{14}C 的现存量 $M(t)$ 成正比．设 $t=0$ 时，^{14}C 的存量为 M_0，^{14}C 的衰变常数为 k，已知 ^{14}C 的半衰变期为 5 568 年．求 ^{14}C 的存量与时间 t 的函数．

【解】 依题意有

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-kM \quad (k>0),$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=-k\mathrm{d}t,$$

两边积分得

$$\ln M=-kt+\ln C \quad (C\text{为常数}),$$

即

$$M=C\mathrm{e}^{-kt}.$$

将 $M(0)=M_0$ 代入得 $C=M_0$．又由 $M(5\ 568)=\dfrac{M_0}{2}$ 得 $k=\dfrac{\ln 2}{5\ 568}$，故 ^{14}C 的衰变规律为

$$M=M_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5\ 568}t}. \tag{6.4}$$

解得

$$t=\frac{5\ 568}{\ln 2}\ln\frac{M_0}{M(t)}.$$

实际上

$$M'(t)=-kM(t), \quad M'(0)=-kM_0,$$

于是

$$\frac{M'(0)}{M'(t)}=\frac{M_0}{M(t)}=\mathrm{e}^{kt},$$

所以

$$t=\frac{5\ 568}{\ln 2}\ln\frac{M_0'}{M'(t)}. \tag{6.5}$$

用 ^{14}C 的衰变速度可以测算考古出土文物的历史年代．

例如，测得某出土文物木炭标本 ^{14}C 平均原子衰变速度为 29.78 次/min，已知新烧成木炭的原子衰变速度为 38.37 次/min，试估算该出土文物的大致年代（^{14}C 的衰变规律如图 6.3 所示）．

将 $M'(0)=38.37, M'(t)=29.78$ 代入式(6.5)，得

$$t=\frac{5\ 568}{\ln 2}\ln\frac{38.37}{29.78}\approx 2\ 036\ (\text{年})$$

实际问题 6.7 案发时间的推算

牛顿冷却定律指出：当系统与环境温度差不大时，系统温度的变化与系统和环境温度之差成正比．

$$-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-T_0), \tag{6.6}$$

其中 T 为系统温度，T_0 为环境温度，t 为时间，k 为散热系数（散热系数只与系统本身的性质

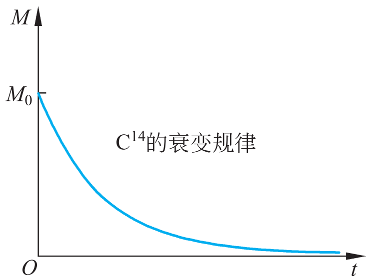

图 6.3　C^{14} 的衰变规律

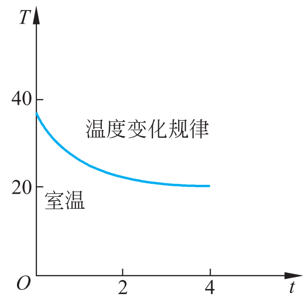

图 6.4　尸体温度变化趋势

有关).

某地发生一起谋杀案，警察下午 4 点钟到达现场．法医测得尸体温度为 30 ℃，室温 20 ℃，已知尸体在最初 2 h 降低 2 ℃，谋杀何时发生？

【解】 如图 6.4，设 $T(t)$ 表示尸体在时刻 t 的温度，则 $T_1=37$ ℃（人体的初始温度），$T_2=35$ ℃，$T_0=20$ ℃（环境温度）．由牛顿冷却定律得

$$-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-T_0),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}(T-20)}{T-20}=-k\mathrm{d}t,$$

两边求不定积分得

$$\ln(T-20)=-kt+C_1\quad(C_1\text{为常数}),$$

所以

$$T=20+C_2\mathrm{e}^{-kt}\quad(C_2=\mathrm{e}^{C_1}),$$

将 $T_1=37$ ℃ 代入上式得 $C_2=17$，于是

$$T=20+17\mathrm{e}^{-kt}.$$

又

$$T_2=20+17\mathrm{e}^{-2k}=35\ (℃),$$

所以

$$\mathrm{e}^{-2k}=\frac{15}{17},k=\ln\sqrt{\frac{17}{15}}\approx 0.062\,6,$$

再由

$$T=20+17\mathrm{e}^{-kt}=30\ (℃),$$

得

$$t=\ln\frac{17}{10}\Big/k=8.497\,0\approx 8.5\ (\mathrm{h}).$$

故谋杀案发生时间约为上午 7 点 30 分．

实际问题 6.8 高空跳伞

设跳伞者从悬停的直升机跳下，如图 6.5 所示，所受空气阻力与速度成正比．求跳伞者下落过程中速度与时间的函数关系．

【解】 跳伞者在下落过程中，同时受到重力和空气阻力的作用，重力大小为 mg，方向与

速度 v 的方向相同；阻力大小为 kv(k 为阻力系数)，方向与 v 相反．跳伞者所受合力为

$$F = mg - kv,$$

根据牛顿第二定律

$$F = ma,$$

又

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

于是

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv. \tag{6.7}$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}v}{mg - kv} = \frac{\mathrm{d}t}{m},$$

两边积分得

$$-\frac{1}{k}\ln(mg - kv) = \frac{t}{m} + C_1,$$

即

$$mg - kv = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t},$$

或

$$v = \frac{mg}{k} + C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t},$$

将 $v(0) = 0$ 代入，得 $C = -\dfrac{mg}{k}$．于是所求速度与时间的关系为

$$v = \frac{mg}{k}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}). \tag{6.8}$$

跳伞者下降速度如图 6.6 所示，当时间 t 足够长时 (也就是跳伞者的高度足够时)，跳伞者下降速度接近于匀速，所以只要高度够了，跳伞者的下降速度不会无限增大．

图 6.5 跳伞者

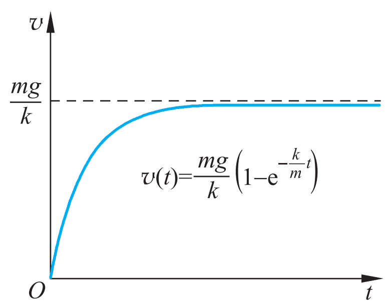

图 6.6

实际问题 6.9 汽车运行成本

某汽车公司的小汽车运行成本 y 及小汽车的转卖值 s 均是时间 t 的函数．若随时间的增长，小汽车的运行成本的变化率及转卖值的变化率分别为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{s}$，$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{s}{3}$．已知 $t = 0$ 时，$y = 0$，而转卖值 $s = 4.5$ (万元/辆)．试求小汽车的运行成本及转卖值各自与时间的关系．

【解】 由已知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{s}, \tag{6.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\frac{s}{3}, \tag{6.10}$$

解方程(6.10)得

$$s=C\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}},$$

由 $t=0$ 时，$s=4.5$ 得，$C=4.5$，所以汽车转卖值 s 与时间 t 的函数关系为

$$s=4.5\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}, \tag{6.11}$$

将式(6.11)代入方程(6.9)得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{4}{9}\mathrm{e}^{\frac{t}{3}}, \tag{6.12}$$

解方程(6.12)得

$$y=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{t}{3}}+C_1,$$

由 $t=0$ 时，$y=0$ 得，$C_1=-\dfrac{4}{3}$，即汽车运行成本 y 与时间 t 的函数关系为

$$y=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{t}{3}}-\frac{4}{3}.$$

实际问题 6.10　上升快还是下落快

质量为 m 的小球以初速度 v_0 上抛，然后落回抛出点，所受空气阻力与小球在时刻 t 的运动速度 $v(t)$ 成正比，$k>0$ 为阻力常数．问小球上升快还是下落快？

【解】 (1)　在小球上升过程中，作用在小球上的合力满足

$$mv'=-kv-mg, \tag{6.13}$$

解微分方程(6.13)，得小球上升速度为

$$v(t)=\left(v_0+\frac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k}.$$

令 $v(t)=0$，可得小球达到最高点的时刻

$$t_1=\frac{m}{k}\ln\left(\frac{mg+kv_0}{mg}\right).$$

(2)　在小球下落过程中，作用在小球上的合力满足

$$mv'=-kv+mg, \tag{6.14}$$

解微分方程(6.14)，得小球下落速度为

$$v(t)=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}+\frac{mg}{k}.$$

小球落地前的高度为

$$y(t)=\left(v_0+\frac{mg}{k}\right)\frac{m}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}})-\frac{mgt}{k}.$$

(3) 令 t_2 为小球落回抛出点的时刻，因为无法求方程 $y(t)=0$ 的精确解，所以很难求 t_2．但可以用间接方法确定上升快还是下落快：判断 $y(2t_1)$ 的值是正还是负．

$$y(2t_1)=\frac{m^2g}{k^2}\left(x-\frac{1}{x}-2\ln x\right),$$

其中 $x=\mathrm{e}^{\frac{kt_1}{m}}$．易证当 $x>1$ 时，函数

$$f(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$$

是增函数，如图 6.7 所示．利用这个结论判断 $y(2t_1)$ 是正还是负．如果 $f(2t_1)>0$，则说明小球上升快，如果 $f(2t_1)<0$，则说明小球下落快．

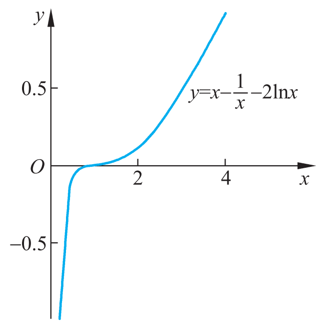

图 6.7 上升下落

实际问题 6.11 Malthus 生物定律与人口方程

英国人口学家马尔萨斯（Thomas Robert Malthus，1766–1834）指出，生物种群基于下列假设建立：在孤立的生物群体中生物总数 $x(t)$ 的变化率与生物总数成正比，其数学模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda x(t),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}\tag{6.15}$$

其中 λ 为比例常数，方程(6.15)的解为

$$x(t_0)=x_0\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}.\tag{6.16}$$

因此，遵循 Malthus 生物总数增长定律的任何生物都是时间按指数方式增长，在此意义下，Malthus 方程又称指数增长模型（如图 6.8 所示）．人类作为特殊的生物种群，人口的增长也遵循 Malthus 生物总数增长定律，此时方程(6.15)称为 Malthus 人口方程．

根据国家统计局 1990 年 10 月 30 日发布的公告，1990 年 7 月 1 日我国人口总数为 11.336 8 亿，近年的人口平均增长率为 1.48．假设人口的增长率保持不变，那么 2000 年我国人口将达到 13.45 亿．

事实上，将 $t_0=1\,990, t=2\,000, \lambda=0.014\,8$，$x_0=11.336\,8$ 代入式(6.16) 得

$$x(2\,000)=11.336\,8\mathrm{e}^{0.014\,8\times(2\,000-1\,990)}=13.45,$$

根据 Malthus 人口方程预测 2000 年我国人口数量与全国第五次人口普查公布的 12.953 3 亿相差很大．造成误差过大的主要原因是人口的增长率不是常数．修改 Malthus 人口方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=(a-b(t-t_0))x(t),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}\tag{6.17}$$

其中 $\lambda(t)=a-b(t-t_0)$ 为变人口增长率，a,b 为常数．求解方程(6.17)，得特解为

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{a(t-t_0)-\frac{1}{2}b(t-t_0)^2},\tag{6.18}$$

第五次人口普查结果 (2000 年)：我国人口总数为 12.953 3 亿，人口增长率为 1.07．取 $t_0=1\,990$，由 $\lambda(t)=a-b(t-t_0)$ 得方程组

$$\begin{cases}a-b(1\,990-1\,990)=0.014\,8,\\ a-b(2\,000-1\,990)=0.010\,7.\end{cases}$$

解得 $a = 0.014\,8, b = 0.000\,41$.

再根据式(6.18)的结果，以 1990 年人口普查数据为依据，来预测我国 2000 年的人口总数

$$x(2\,000) = 11.336\,8\mathrm{e}^{0.014\,8(2\,000-1\,990)-(1/2)(0.000\,41(2\,000-1\,990)^2)} = 12.878\,4,$$

利用修改的 Malthus 人口方程预测我国 2000 年人口总数比利用原模型精度提高了很多．现用其预测我国 2020 年人口总量为

$$x(2\,020) = 12.953\,3\mathrm{e}^{0.014\,8(2\,020-2\,000)-(1/2)(0.000\,41(2\,020-2\,000)^2)} = 16.044\,2.$$

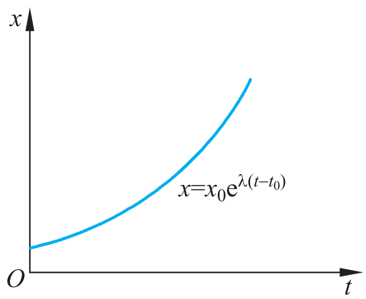

图 6.8　Malthus 方程

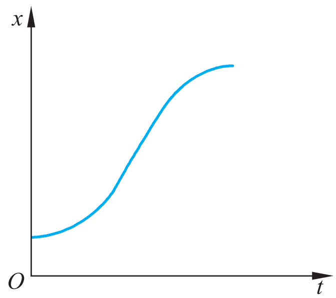

图 6.9　Logistic 方程

实际问题 6.12　种群的增长与调节的 Logistic 方程

方程(6.14)是理想状态下种群增长模型．更有实际意义的模型应该反映限定资源的情况．很多种群开始呈指数增长，但数量接近环境承载能力 N 时增长率开始下降 (当数量超过 N 时会下降趋向于 N)．要建立一个考虑上述两个因素的模型作如下假设：当 $x(t)$ 很小时 (初始阶段，种群数量增长率与 $x(t)$ 成正比) $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda x(t)$；当 $x(t) > N$ 时 (当 $x(t)$ 超过 N 时，$x(t)$ 开始减少) $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} < 0$．一个能同时满足上述两个假设的方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{N}\right), \tag{6.19}$$

如果 x 与 N 相比很小，则 $\dfrac{x}{N}$ 趋向于 0，因此，$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \approx \lambda x(t)$．如果当 $x(t) > N$，则 $1-\dfrac{x}{N} < 0$，$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} < 0$.

方程(6.19)称为 Logistic 方程（如图 6.9 所示）．将方程(6.19) 变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x\left(\lambda - \dfrac{\lambda x}{N}\right)} = \mathrm{d}t,$$

由于

$$\frac{1}{x\left(\lambda - \dfrac{\lambda x}{N}\right)} = \frac{1}{\lambda x} + \frac{1}{N}\frac{1}{\lambda - \dfrac{\lambda}{x}N},$$

所以两边积分得

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\left(\lambda-\dfrac{\lambda x}{N}\right)}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\lambda x}\mathrm{d}x+\int \frac{1}{N}\frac{1}{\lambda-\dfrac{\lambda}{N}x}\mathrm{d}x,\\ &= \frac{1}{\lambda}\ln x-\frac{1}{\lambda}\ln\left(\lambda-\frac{\lambda}{N}x\right)=t+C.\end{aligned}$$

从而

$$\left(\frac{x}{\lambda-\dfrac{\lambda}{N}x}\right)^{\frac{1}{\lambda}}=C_1\mathrm{e}^t.$$

将 $x(0)=x_0$，代入上式得

$$C_1=\left(\frac{x_0}{\lambda-\dfrac{\lambda}{N}x_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}},$$

于是

$$x(t)=\frac{1}{\dfrac{1}{N}+\left(\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{N}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}}.$$

实际问题 6.13 物种间竞争的 Lotka-Volterra 方程

自然界中的生态系统是一个错综复杂的动态系统，其间各种群的个别体有各自不同的生活需求与习性，而不同种群的个体间又存在着微妙的联系．物种间的关系主要包括竞争、捕食、互利共生等．1926 年 Volterra 提出了关于“捕食者与食者”的双物种竞争模型，Volterra 将地中海的鱼划分为食者与捕食者，食者时刻 t 的数量为 $x(t)$，捕食者时刻 t 的数量为 $y(t)$．对于食者系统，大海中有食者生存的足够资源，食者的增长速度正比于当时的数量

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda x(t)\quad(\lambda>0),\tag{6.20}$$

对于捕食者系统，由于捕食者没有被捕食对象，其数量减少的速度正比于当时的数量

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=-\mu y(t)\quad(\mu>0),\tag{6.21}$$

由于两者生活在一起，食者中一部分被捕食者吃掉，于是食者的增长速度将减缓，也就是 λ 将减少，其减少量依然正比于当时食者的数量，所以式(6.20)可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=(\lambda-\alpha y)x(t)\quad(\alpha>0),\tag{6.22}$$

又因食者为捕食者增加了食物，使生命得以延续，所以捕食者减少速度有所减缓，即 μ 将增大，其增加量依然正比于当时捕食者的数量，所以式(6.22)可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=(-\mu+\beta x)y(t),\tag{6.23}$$

联立方程(6.22)和方程(6.23)可得著名的 Lotka-Volterra 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = (\lambda - \alpha y)x(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = (-\mu + \beta x)y(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{6.24}$$

其中 $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ 是大于零的常数.

方程组(6.24)不易直接求解，将两方程相除消去时间 t 得可分离变量微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(-\mu + \beta x)y}{(\lambda - \alpha y)x}, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{6.25}$$

方程(6.25)的通解为

$$\lambda \ln y + \mu \ln x = \alpha y + \beta x + \ln C,$$

整理得

$$y^\lambda x^\mu = C\mathrm{e}^{\alpha y}\mathrm{e}^{\beta x},$$

将初始条件代入得

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^\lambda \left(\frac{x}{x_0}\right)^\mu = \mathrm{e}^{\alpha(y-y_0)}\mathrm{e}^{\beta(x-x_0)}.$$

实际问题 6.14　渔场防止捕捞过度问题

【解】 在无捕捞情况下，渔场鱼量满足 Logistic 规律，即

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda x\left(1 - \frac{x}{N}\right), \tag{6.26}$$

其中 λ 为自然生长率. 有捕捞时，单位时间捕捞量

$$h(x) = kx, \tag{6.27}$$

k 为捕捞率. 此时渔场鱼量满足方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda x\left(1 - \frac{x}{N}\right) - kx, \tag{6.28}$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x\left(\lambda - k - \dfrac{\lambda}{N}x\right)} = \mathrm{d}t,$$

通解为

$$x(t) = \frac{C(\lambda - k)\mathrm{e}^{(\lambda-k)t}}{1 + C\dfrac{\lambda}{N}\mathrm{e}^{(\lambda-k)t}} \quad (C\text{为常数}).$$

当 $\lambda > k$ 时，$x_0 = \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = N\dfrac{\lambda - k}{\lambda}$；当 $\lambda < k$ 时，$x_1 = \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

这个结果说明，当捕捞率 $k<\lambda$ 时，渔场鱼量稳定为 $x_0=N\dfrac{\lambda-k}{\lambda}$；当捕捞率 $k>\lambda$ 时，渔场鱼量下降，最终为零，结果是渔场枯竭．所以为了保持渔场鱼量，必须适度控制捕捞，这样渔场才能可持续发展．

实际问题 6.15 猪的最佳销售时机

农民对于猪的商业性饲养和销售，总是希望获得最大的利润．在市场需求不变的情况下，不考虑猪的饲养技术水平、猪的类型等因素的影响，那么影响销售利润的主要因素是销售时机．由于随着猪的生长，单位时间消耗的饲养费用逐渐增多，而猪的体重增长却逐渐变慢，因此对猪的饲养时间不宜过长．假设一头猪在开始饲养时的重量为 x_0，饲养后任意时刻 t 的重量为 $x(t)$，最大重量假设为 X，最小出售体重为 x_s，相应的饲养时间为 t_s．一头猪从开始饲养到时刻 t 所需的费用为 $y(t)$，同时我们假设反映猪体重变化速度的参数为 α，猪在达到最大体重后，单位时间的饲养费为 γ，反映饲养费用变化大小的参数为 λ．请根据上面假设，建立起猪的最佳销售时机的数学模型，并用所给数据验证你的结论．

假设 $x_0=5$ kg，$X=200$ kg，$x_s=75$ kg，$\alpha=0.5$ kg/天，猪的市场销售价设为 $c=6$ 元/kg，$\gamma=1.5$ 元/天，$\lambda=1$ 元/天．

【解】 由于猪在饲养时已有一定的体重，而体重的增加随饲养时间的延长逐渐减慢，因此，由 Logistic 方程可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha\left(1-\frac{x}{X}\right), \tag{6.29}$$

又由于随着猪的体重增加，单位时间消耗的饲养费用增多，达到最大体重后，饲养费用为常数 γ，所以有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\gamma-\lambda\left(1-\frac{x}{X}\right), \tag{6.30}$$

由式(6.29)和式(6.30)，得微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha\left(1-\dfrac{x}{X}\right),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\gamma-\lambda\left(1-\dfrac{x}{X}\right),\\ x(0)=x_0,\\ y(0)=0.\end{cases} \tag{6.31}$$

解可分离变量方程得

$$\begin{cases}x(t)=X-(X-x_0)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{X}t},\\ y(t)=\gamma t-\dfrac{\lambda}{\alpha}(X-x_0)(1-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{X}t}).\end{cases} \tag{6.32}$$

养猪获利的充要条件是

$$x_s c\geqslant x_0c_0+y(t_s), \tag{6.33}$$

其中 c_0 为猪仔的价格．由式(6.32)知

$$x_s=X-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{X}t_s}(X-x_0),$$

得

$$t_s=\frac{X}{\alpha}\ln\frac{X-x_0}{X-x_s},$$

代入式(6.32)，得

$$y(t_s) = \gamma \frac{X}{\alpha} \ln \frac{X - x_0}{X - x_s} - \frac{\lambda}{\alpha}(x_s - x_0), \tag{6.34}$$

将式(6.34)代入式(6.33)，得

$$\alpha(x_s c - x_0 c_0) + \lambda(x_s - x_0) \geqslant \gamma X \ln \frac{x - x_0}{x - x_s}, \tag{6.35}$$

只要式(6.35)成立，饲养就会获利．式(6.32)两边对 t 求导得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha \left(1 - \dfrac{x_0}{X}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{X}t}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \gamma - \lambda \left(1 - \dfrac{x_0}{X}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{X}t}. \end{cases} \tag{6.36}$$

由盈亏平衡原理，单位时间内猪增加体重所获得的利润与消耗的饲养费用相等，得

$$c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \tag{6.37}$$

设此时养猪时间为 t_0，考虑式(6.36)得

$$c\alpha \left(1 - \frac{x_0}{X}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{X}t_0} = \gamma - \lambda \left(1 - \frac{x_0}{X}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{X}t_0}, \tag{6.38}$$

解得

$$t_0 = \frac{X}{\alpha} \ln \frac{(c\alpha + \lambda)(X - x_0)}{\gamma X}.$$

设猪的最佳出售时机为 t^*，当 $\dfrac{\gamma X}{X - x_s} < c\alpha + \lambda$ 时，$t_0 > t_s$，猪应在

$$t^* = t_0 = \frac{X}{\alpha} \ln \frac{(c\alpha + \lambda)(X - x_0)}{\gamma X}$$

时出售．当 $\dfrac{\gamma X}{x_1 - x_s} \geqslant c\alpha + \lambda$ 时，$t_0 \leqslant t_s$，猪应在

$$t^* = t_s = \frac{X}{\alpha} \ln \frac{X - x_0}{X - x_s}$$

出售．根据本题已知数据可得，猪的最佳出售时间为饲养到 382 天左右．

实际问题 6.16 传染病人数

一邮轮上有 800 人，一名游客不幸患了某传染病，12 h 后已有 3 人发病，由于这种传染病没有早期症状，故传染者不能被及时隔离，直升机 60 ～ 72 h 将疫苗运到，是估计疫苗运到时已患传染病人数．

【解】 设 $y(t)$ 表示发现首例病人后 t h 的感染人数，则 $800 - y(t)$ 表示此刻未受到感染的人数，有题意 $y(0) = 1, y(12) = 3$．

当感染人数 $y(t)$ 很小时，传染病的传播速度较慢，因为只有很少的人接触到感染者；当感染人数很大时，未受感染人数 $800 - y(t)$ 很小，即只有很少的游客会被传染，所以此时传染病传播的速度也很慢．排除上述两种极端情况，当有很多的感染者及为感染者时，传染病传播的速度很快．因此传染病的发病率，一方面受感染人数影响，另一方面也受未感染人数的制约．

根据上面分析，可以建立微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky(800-y), & k\text{是常数}, \\ y(0)=1, y(12)=3. \end{cases}$$

解得方程的通解为

$$y(t) = \frac{800}{1+C\mathrm{e}^{-800kt}}.$$

当 $y(0)=1$ 时，即 $1=\dfrac{800}{1+C\mathrm{e}^{-800k\cdot 0}}$，得 $C=799$；

当 $y(12)=3$ 时，即 $3=\dfrac{800}{1+C\mathrm{e}^{-800k\cdot 12}}$，$\mathrm{e}^{-800k\times 12}=\dfrac{\dfrac{800}{3}-1}{799}=\dfrac{797}{799\times 3}$，得

$$800k = -\frac{1}{12}\ln\frac{800}{799\times 3} \approx 0.091\ 76.$$

于是

$$y(t) = \frac{800}{1+799\mathrm{e}^{-0.091\ 76t}}.$$

下面分别计算当 $t=60$ 和 $t=72$ 时已感染的人数，可得

$$y(60) = \frac{800}{1+799\mathrm{e}^{-0.091\ 76\times 60}} \approx 188,$$

$$y(72) = \frac{800}{1+799\mathrm{e}^{-0.091\ 76\times 72}} \approx 385.$$

从计算可以看出，在 72 h 运到疫苗时感染者的人数是 60 h 运到疫苗时感染人数的 2 倍，可见传染病流行时及时采取防控措施十分重要．

实际问题 6.17 永久免疫的传染病扩散问题

某传染病接触就会感染，而且感染后永久免疫．因此，在时间 t 某区域人口总数为 N，将其分成已感染人群 $p(t)$ 与未感染人群 $N-p(t)$．设 $I(t)=\dfrac{p(t)}{N}$ 表示时刻 t 已感染者占总人口比例，当已感染者与未感染者接触时就会传染给他人；$S(t)=\dfrac{N-p(t)}{N}$ 表示 t 时刻未感染者占总人口比例．对于未感染者只要与患者接触就会被感染．假设

(1) 感染者不能痊愈也不能死亡，永远属于 $p(t)$．

(2) 本地区人的接触均匀，接触即传染．设 λ 为每个患者每天平均传染他人数．

求时刻 t 传染病扩散比例．

【解】 根据假设，每个患者单位时间内传染的人数与此时未被传染者人数成正比，每个患者每天可使 $\lambda S(t)$ 未感染者变成患者，感染人数为 $NI(t)$，所以每天共有 $\lambda NS(t)I(t)$ 未感染者变成患者．于是 $\lambda NS(t)I(t)$ 为患者人数 $NI(t)$ 的增加量，

$$\frac{\mathrm{d}NI(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda NS(t)I(t), I(0)=I_0. \tag{6.39}$$

由于，$S(t)+I(t)=1$，所以

$$\frac{\mathrm{d}NI(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda NI(t)(1-I(t)). \tag{6.40}$$

解得

$$I(t)=\frac{I_0\mathrm{e}^{\lambda t}}{1-I_0(1-\mathrm{e}^{\lambda t})},\tag{6.41}$$

令 $\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}=0$，得 $t_0=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{I_0}-1\right)$，称 t_0 为传染高峰期．显然，当 $t\to\infty$ 时，$I(t)\to 1$，也就是说随着时间的推移，该地区所有人都将被传染，这不符合实际，因此这个算法还需要改进．

实际问题 6.18 非永久免疫的传染病扩散问题

假设已感染的患者可以治愈，但仍可能再次被传染．设每天治好的病人占总数 $NI(t)$ 的比例为 μ，则有

$$\frac{\mathrm{d}NI(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda NS(t)I(t)-\mu NI(t),\tag{6.42}$$

由于，$S(t)+I(t)=1$，所以

$$\frac{\mathrm{d}NI(t)}{\mathrm{d}t}=N[\lambda(1-I(t))-\mu]I(t),\quad I(0)=I_0.\tag{6.43}$$

解这个分离变量方程得

$$I(t)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda-\mu)I_0\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}}{\lambda-\mu-\lambda I_0(1-\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t})}, & \lambda\neq\mu,\\ \dfrac{I_0}{1+\lambda I_0t}, & \lambda=\mu.\end{cases}\tag{6.44}$$

2．齐次微分方程

定义 6.5 齐次方程

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的微分方程称为齐次微分方程．

解法：令

$$u=\frac{y}{x}\quad(y=ux),\tag{6.45}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u,\tag{6.46}$$

把它们代入原方程转化为可分离变量的微分方程

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=f(u).\tag{6.47}$$

再按分离变量法求解，然后将 $u=\frac{y}{x}$ 回代，得原方程的解．

例 6.5 求微分方程 $y'=\frac{y}{x}+\csc\frac{y}{x}$ 的通解．

【解】 令 $u=\frac{y}{x}$，得

$$y=ux,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u,$$

代入原方程得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=u+\frac{1}{\sin u},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sin u},$$

分离变量得

$$\sin u\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\int\sin u\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

$$-\cos u=\ln|x|+\ln C_1=\ln C_1|x|,$$

回代得

$$-\cos\frac{y}{x}=\ln C_1|x|,$$

即

$$\mathrm{e}^{-\cos\frac{y}{x}}=\pm C_1x.$$

令 $C=\pm C_1$ ，可得原方程的通解为

$$\mathrm{e}^{-\cos\frac{y}{x}}=Cx.$$

例 6.6 求微分方程 $y\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$ 满足 $y(1)=1$ 的特解.

【解】 原方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x+y}=-\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}},$$

令 $u=\frac{y}{x}$，得

$$y=ux,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u,$$

代入得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=-\frac{u}{1+u},$$

整理得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{u^2+2u}{1+u},$$

分离变量得

$$\frac{1+u}{u^2+2u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\int\frac{1+u}{u^2+2u}\mathrm{d}u=\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{2}\ln|u^2+2u|=-\ln|x|+\ln C_1,$$

$$\ln|u^2+2u|=\ln x^{-2}+\ln C_1^2=\ln C_1^2x^{-2},$$

令 $C=\pm C_1^2$ 得

$$u^2+2u=Cx^{-2},$$

即

$$(u^2+2u)x^2=C,$$

回代得原方程的通解

$$y^2+2xy=C,$$

将 $y(1)=1$ 代入得 $C=3$，则所求原方程满足 $y(1)=1$ 的特解为

$$y^2+2xy=3.$$

3．一般情况

下面讨论形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c) \tag{6.48}$$

的微分方程的解法．令 $u=ax+by$，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \tag{6.49}$$

原方程转化为可分离变量的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=bf(u+c)+a. \tag{6.50}$$

再按分离变量法求解，然后将 $u=ax+by$ 回代得原方程的通解．

例 6.7　求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$ 的通解．

【解】　令 $u=x+y$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+u^2,$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\arctan u=x+C,$$

回代，得原方程的通解为

$$\arctan(x+y)=x+C.$$

实际问题 6.19　汽车前灯的设计问题

汽车前灯（如图 6.10 所示）的反射镜面多由旋转抛物面（如图 6.11 所示）设计而成，光源放在抛物线（母线）的焦点处，光线经旋转抛物面反射成平行光线．旋转抛物面的这一几何光学性质在解析几何中已有证明，现在证明具有上述性质的曲线只有抛物线．

【解】　如图 6.12 所示，设旋转抛物面的旋转轴为 x 轴，母线 l 的方程为 $y=f(x)$，光源置于原点，由原点发出的光线 OM 经镜面反射后为 MR 平行于 x 轴，MT 为母线 l 在点 M 的切线，MN 为母线 l 在点 M 的法线，根据几何光学光线的反射定律有

$$\angle OMN=\angle NMR,$$

所以

$$\tan\angle OMN=\tan\angle NMR,$$