

第 1 章 行 列 式

学习目标与要求

1. 了解行列式的定义.
2. 掌握行列式的性质和行列式按行 (列) 展开的方法.
3. 会计算简单的 n 阶行列式.
4. 掌握克莱姆 (Cramer) 法则.

行列式虽然产生于解线性方程组, 但它的应用却非常广泛.

1.1 二阶、三阶行列式

这一节我们介绍二阶和三阶行列式, 为引入一般的 n 阶行列式做准备.

1.1.1 二阶行列式

行列式的概念是在解线性方程组时产生的, 这一点在本章第 5 节中可以看到.



定义 1.1 二阶行列式

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式, 它表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.1)$$

在二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中, 数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列元素, i 称为行标, j 称为列标. 从左上角到右下角的连线称为主对角线, 从右上角到左下角的连线称为次对角线 (如图 1.1). 由此可见, 二阶行列式的值等于主对角线两元素的乘积减去次对角线两元素的乘积, 也可用图 1.1 的方式来表示.

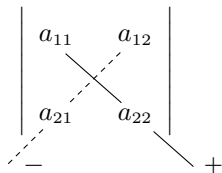


图 1.1 二阶行列式对角线法则

对于三阶和 n 阶行列式, 以及矩阵, 以上这些记号 (行标, 列标, 主、次对角线等) 也都这样称呼.

例 1.1 计算二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

解 由定义知

$$D = 3 \times 6 - 2 \times 5 = 8.$$



例 1.2 已知 $\lambda = a$ 是方程 $\begin{vmatrix} 2\lambda - 3 & \lambda + 5 \\ \lambda + 2 & \lambda + a \end{vmatrix} = 0$ 的根, 求常数 a 的值.

解 将 $\lambda = a$ 代入方程得 $\begin{vmatrix} 2a - 3 & a + 5 \\ a + 2 & 2a \end{vmatrix} = 0$, 由二阶行列式的定义有

$$D = (2a - 3)2a - (a + 2)(a + 5) = 3a^2 - 13a - 10 = 0,$$

解得 $a = 5$ 或 $a = -\frac{2}{3}$.



1.1.2 三阶行列式

定义 1.2 三阶行列式

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式, 它表示数

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.2)$$

我们看到, 三阶行列式是 $3! = 6$ 个乘积项的代数和, 而每个乘积项都是行列式的不同行、不同列的 3 个元素的乘积.

事实上, 三阶行列式可用对角线法则来记忆 (如图 1.2), 即: 实线上的三个数的乘积取 “+” 号, 虚线上的三个数的乘积取 “-” 号, 三阶行列式的值等于它们的代数和.

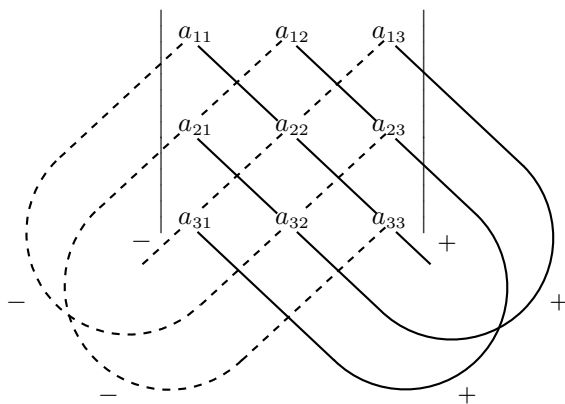


图 1.2 三阶行列式对角线法则

例 1.3 求行列式的值 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则有

$$\begin{aligned} D &= 3 \times (-1) \times 4 + 2 \times (-3) \times 6 + 5 \times 0 \times 1 - 1 \times (-1) \times 6 - 2 \times 5 \times 4 - (-3) \times 0 \times 3 \\ &= -12 - 36 + 6 - 40 = -82. \end{aligned}$$

例 1.4 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则有

$$\begin{aligned} D &= a \cdot a_1 \cdot b_2 + b \cdot b_1 \cdot a_2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot a_1 \cdot a_2 - b \cdot 0 \cdot b_2 - a \cdot b_1 \cdot 0 \\ &= aa_1b_2 + bb_1a_2. \end{aligned}$$

实际问题 1.1 平面上三点共线的条件

已知平面上的互异三点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 共线, 推导其应满足的条件.

解 过 A, B 两点的直线方程用两点式表示为

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

因 C 点在该直线上, 所以 C 点坐标满足此方程, 代入 (x_3, y_3) 得

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1},$$

化简得

$$x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2 = 0,$$

写成行列式即为

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

习 题 1.1

一、填空题

1. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 已知 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 1$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\begin{vmatrix} \lambda - 3 & \lambda - 2 \\ (\lambda - 3)a & \lambda^2 - 2\lambda \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 已知平面直线 $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 与 $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 相互平行, 则系数满足的关系式

可用二阶行列式表示为: $\underline{\hspace{2cm}}.$

$$5. \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$6. \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x & x_2 & 0 \\ y & z & x_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$7. \begin{vmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & x_2 & x \\ x_3 & y & z \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、计算题

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 64 & 16 \\ 27 & 9 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} \frac{t^2}{t^2+t+1} & 1 \\ 1 & \frac{t}{t-1} \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}.$$

2. 计算下列三阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 16 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x & y \\ 3 & x_1 & y_1 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 1 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ c & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. 验证以下等式成立:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

三、应用题

1. 若直线 l 经过平面上两个不同的点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 用行列式表示直线 l 的方程.

2. 设平面直线 $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 与 $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 相互垂直, 用行列式表示系数应满足的条件.

1.2 n 阶行列式的定义

和二阶、三阶行列式一样, n 阶行列式也是在解线性方程组时引入的, 所以它的定义应该和二阶、三阶行列式的定义相一致.

在二、三阶行列式的展开式中,为什么有些项前面取“+”号,有些项前面取“-”号?这要在引入排列与逆序的概念后才能了解清楚,这也是引入 n 阶行列式所必需的概念.

1.2.1 排列与逆序

定义 1.3 排列

n 个自然数 $1, 2, \dots, n$ 的任何一个不重复的排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 n 级排列.

例如, 23541 是一个 5 级排列, 4132 是一个 4 级排列.

为方便起见, 我们称 $123 \cdots n$ 为自然排列.

定义 1.4 逆序和逆序数

在 n 级排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中, 如果 $i_s > i_t$, 则称数 i_s 与 i_t 构成一个逆序. 排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中的逆序总数, 称为这个排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例如 5 级排列 45312 中, 3 前的 4 比它大, 则 4 与 3 构成一个逆序, 5 与 1 也构成一个逆序, 等等.

从这个定义出发, 如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的第 j 个数 (元素) i_j 前有 t_j 个数比它大 ($1 \leq j \leq n$), 则称 t_j 为数 i_j 的逆序数, 从而有

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{j=1}^n t_j. \quad (1.3)$$

例 1.5 求排列 51324 的逆序数.

解 容易得到, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$, $t_5 = 1$, 所以

$$\tau(51324) = 0 + 1 + 1 + 2 + 1 = 5.$$

我们也可以通过如下算式简单计算逆序数:

$$\begin{array}{cccccc} \text{排列} & 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_j & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

所以 $\tau(51324) = 0 + 1 + 1 + 2 + 1 = 5$.

显然, 自然排列 $12 \cdots n$ 的逆序数为 0.

定义 1.5 奇排列与偶排列

逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

显然例 1.5 中的排列为奇排列, 又如, 因为 $\tau(4132) = 4$, 所以排列 4132 为偶排列.

例 1.6 求排列 $n(n-1)(n-2) \cdots 21$ 的逆序数, 并讨论其奇偶性.

解 列算式求解如下,

$$\begin{array}{ccccccc} \text{排列} & n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow \\ t_j & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{array}$$

所以 $\tau(n(n-1)(n-2) \cdots 21) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

容易得到, 当 $n = 4k$, $n = 4k + 1$ 时, 为偶排列; 当 $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$ 时, 为奇排列.

例 1.7 求 i, j 的值, 使 $645i1j$ 为偶排列, 若要使它为奇排列, i, j 又为多少?

解 因为是 6 级排列, 所以 i, j 只能从 2, 3 两数中各取一个.

若 $i = 2, j = 3$, 则 $\tau(645i1j) = \tau(645213) = 12$, 此时为偶排列;

若 $i = 3, j = 2$, 则 $\tau(645i1j) = \tau(645312) = 13$, 此时为奇排列.

1.2.2 排列的对换

为了研究行列式的性质, 常常需用到对换的概念.

定义 1.6 排列的对换

在一个排列中, 将任何两个数对调, 而其他数位置不变, 这一过程称为**对换**. 将相邻两数对调, 称为**相邻对换**.

例如, 在排列 45231 中, 对换 1 与 2, 得到排列 45132.

定理 1.1 任何排列经一次对换后, 其奇偶性改变.

***证明** 先证明相邻对换情形.

设 n 级排列 $\cdots ij \cdots$ 对换 i 与 j 后得到排列 $\cdots ji \cdots$. 注意到在对换前后, 虚点处各元素的逆序数并不改变, 所以只需考虑对换前后元素 i 与 j 的逆序数的变化.

当 $i < j$ 时, 对换后, i 的逆序数增大 1, j 的逆序数不会改变, 所以对换后排列的逆序数增大 1;

当 $i > j$ 时, 对换后, i 的逆序数不变, j 的逆序数减小 1, 所以对换后排列的逆序数减小 1.

由此, 无论 $i < j$ 还是 $i > j$, 经相邻对换后排列的奇偶性改变.

再证一般情形.

设 n 级排列 $\cdots ia_1 \cdots a_m j \cdots$ 经过对换 i 与 j 后变为排列 $\cdots ja_1 \cdots a_m i \cdots$, 我们将这一对换看成是经过若干次相邻对换来实现的. 首先, i 依次与 $a_1, \cdots, a_m, j$ 经 $m+1$ 次相邻对换变为排列 $\cdots a_1 \cdots a_m ji \cdots$, 然后将 j 依次与 $a_m, \cdots, a_1$ 经过 m 次相邻对换变为所需要的排列 $\cdots ja_1 \cdots a_m i \cdots$, 一共经过了 $(m+1) + m = 2m+1$ 次相邻对换. 于是排列的奇偶性改变了奇数次, 从而排列 $\cdots ia_1 \cdots a_m j \cdots$ 与排列 $\cdots ja_1 \cdots a_m i \cdots$ 的奇偶性相反. $\square$

1.2.3 n 阶行列式的定义

为了得到 n 阶行列式的定义, 需要将二阶、三阶行列式的定义统一起来. 我们先引入下列重要定理.

定理 1.2 n 级排列共有 $n!$ 个 ($n > 1$), 其中奇、偶排列各占一半, 各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

***证明** 定理的前半部分由排列组合中的排列数即可得到证明. 下面证明后半部分.

设 $n!$ 个 n 级排列中有 p 个奇排列, q 个偶排列. 将 p 个奇排列中的每个排列的第一、二个数都进行一次对换, 则得 p 个不同的偶排列, 于是知 $p \leq q$. 同样, 将 q 个偶排列中的每个排列的第一、二个数都进行一次对换, 得到 q 个不同的奇排列, 于是有 $q \leq p$, 从而 $p = q$. $\square$

例如, 2 级排列共有 $2! = 2$ 个, 其中偶排列是 12, 奇排列是 21.

又如, 3 级排列共有 $3! = 6$ 个, 其中偶排列为 123, 231, 312, 奇排列为 132, 213, 321.

现在我们来考察二阶、三阶行列式的共同特征. 注意到 $(-1)^{2k} = 1$, $(-1)^{2k+1} = -1$ ($k \in \mathbb{N}$), 所以符号取决于指数的奇偶性. 我们得到二阶、三阶行列式的展开式有以下几个特点:

(1) 二阶行列式有 $2!=2$ 项, 三阶行列式有 $3!=6$ 项;

(2) 行列式的每一项都是不同行, 不同列的元素的乘积, 再加上一个正、负号. 当行标按自然顺序排列时, 如果列标排列是偶排列, 则这一项前取 “+” 号, 如果列标排列是奇排列, 则这一项前取 “-” 号 (参考以下等式);

(3) 行列式展开式中有一半项前面取 “+” 号, 另一半项前面取 “-” 号.

所以我们可以将二阶、三阶行列式统一用求和符号 “ $\sum$ ” 表示如下 (其中每项上面括号内标出列标排列的逆序数, 这是为了便于理解):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}^{(0)}a_{22} - a_{12}^{(1)}a_{21} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}^{(0)}a_{22}a_{33} + a_{12}^{(2)}a_{23}a_{31} + a_{13}^{(2)}a_{21}a_{32} - a_{13}^{(3)}a_{22}a_{31} - a_{12}^{(1)}a_{21}a_{33} - a_{11}^{(1)}a_{23}a_{32}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

其中 $\sum$ 是分别对列标排列 $j_1 j_2$ 和 $j_1 j_2 j_3$ 求和.

这样, 二阶、三阶行列式的定义就统一起来了. 其实 n 阶行列式也是这样定义的.

定义 1.7 n 阶行列式

n^2 个元素 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 组成的 n 阶行列式定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \quad (1.4)$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的列标排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

n 阶行列式简记为 $D = |a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

当 $n = 1$ 时, 一阶行列式 $|a| = a$. 注意它和绝对值记号是有区别的.

关于 n 阶行列式的定义, 需要注意以下几点:

(1) n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项的代数和;

(2) 每一项都是不同行, 不同列的 n 个元素的乘积, 再加上一个正、负号. 当行标按自然顺序排列时, 如果列标构成的排列是偶排列, 则这一项前取 “+” 号; 如果列标构成的排列是奇排列, 则这一项前取 “-” 号 (参考以上二、三阶行列式的等式);

(3) n 阶行列式的展开式中有一半项前面取 “+” 号, 另一半项前面取 “-” 号.

注意, 这里说的 “+”、“-” 号, 不包括各元素本身的符号.

因为行列式的任何一项 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 都必须在每一行和每一列中各取一个元素, 所以得到:

如果行列式有一行 (列) 为零, 则行列式的值为零.



如

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

以下介绍几类特殊行列式的计算, 其结果可作为公式使用.

例 1.8 求上三角行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$ 的值.



解 按行列式的定义有

$$D = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}.$$

我们知道, 如果 $a_{1j_1}, a_{2j_2}, a_{3j_3}, a_{4j_4}$ 中有一个元素为 0, 则这一项 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 即为 0, 这种项不需要计算, 所以我们只需寻找 $a_{1j_1}, a_{2j_2}, a_{3j_3}, a_{4j_4}$ 都是字母的项.

根据该行列式的特点, 从第 4 行起考虑. 易知, 必须 $j_4 = 4$, 即乘积项中必须有 $a_{4j_4} = a_{44}$ 这个元素, 划去 a_{44} 所在的第 4 行与第 4 列, 在剩下部分考虑, 考察第 3 行知, 乘积项中必须有 $a_{3j_3} = a_{33}$ 这个元素, 再划去 a_{33} 所在的行与列知, 乘积项中必须有 $a_{2j_2} = a_{22}$ 这个元素, 划去 a_{22} 所在的第 2 行与第 2 列知, 必须有 $a_{1j_1} = a_{11}$ 这个元素. 所以有 $j_4 = 4, j_3 = 3, j_2 = 2, j_1 = 1$, 即

$$D = (-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}.$$

以上结果可推广到 n 阶上三角行列式的情形, 即

n 阶上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (1.5)$$

类似地, 可得

n 阶下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (1.6)$$

n 阶对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (1.7)$$

由上面的三个公式得到结论:

(上、下)三角行列式及对角行列式的值等于其主对角线元素的乘积.

例 1.9 用定义计算 n 阶反对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 按定义

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

类似于例 1.8 的说明, 只需寻找 $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{nj_n}$ 都是字母的项.

从第 1 行起考虑, 类似例 1.8, 通过划去所选的数所在的行与列的方法可得

$$j_1 = n, j_2 = n-1, \cdots, j_{n-1} = 2, j_n = 1,$$

所以, D 的展开式中仅剩一项, 即得

$$D = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}.$$

由例 1.6 的结果有

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

我们可以证明, 行列式的一般项也可以用以下两个定理中的式子表示.

定理 1.3 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的一般项可以表示为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}, \quad (1.8)$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 及 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 级排列.

定理 1.4 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的一般项也可表示为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}, \quad (1.9)$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为 n 级排列.

至此, 我们得到了 n 阶行列式的一般项可以用三种形式表示, 这为我们理解行列式提供了很大方便.

例 1.10 试问在 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中, 乘积项 $a_{23}a_{34}a_{52}a_{45}a_{11}$ 前应取什么符号.

解 按定理 1.3, 因为

$$(-1)^{\tau(23541)+\tau(34251)} = (-1)^{5+6} = -1,$$

所以前面取“-”号.

按行列式的定义 1.7, 将乘积项行标排成自然顺序, 符号由列标排列的奇偶性确定. 因为

$$a_{23}a_{34}a_{52}a_{45}a_{11} = a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{52},$$

得右边乘积项列标排列的逆序数 $\tau(13452) = 3$, 所以前面取“-”号.

按定理 1.4, 将乘积项的列标排成自然排列, 前面的符号由行标排列的奇偶性决定. 因为

$$a_{23}a_{34}a_{52}a_{45}a_{11} = a_{11}a_{52}a_{23}a_{34}a_{45},$$

得右边乘积项行标排列的逆序数 $\tau(15234) = 3$, 所以前面取“-”号.

这个例子也验证了定理 1.3、定理 1.4 的正确性.

习 题 1.2

一、填空题

$$1. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$2. \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$4. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 若 n 阶行列式 D 中有多于 $n^2 - n$ 个元素为 0, 则行列式 $D = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 若 n 阶行列式 D 中所有元素都为 1, 则 $D = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. $\tau(54123) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. $\tau(n123 \cdots (n-1)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. $\tau(135 \cdots (2n-1)246 \cdots 2n) = \underline{\hspace{2cm}}$ ($n > 2$).

10. 在 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中, 乘积 $a_{33}a_{21}a_{45}a_{14}a_{52}$ 前应取 $\underline{\hspace{2cm}}$ 号.

$$11. \text{由行列式的定义可得, 4 阶行列式 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、选择题 (单选题)

1. 已知 $6i541j$ 为奇排列, 则 i, j 的值为 ().

(A) $i = 3, j = 2$

(B) $i = 2, j = 3$

(C) $i = 7, j = 3$

(D) $i = 2, j = 7$

2. 下面几个构成 6 阶行列式的展开式的各项中, 前面取“+”号的是 ().