绪　　论

学习目标与要求

1. 了解运筹学发展简史。
2. 了解运筹学的特点以及数学模型的有关概念。
3. 了解运筹学的工作步骤以及算法的有关概念。

运筹学发展简史

运筹学 (Operations Research 或 Operational Research, OR) 作为现代意义下的一门独立的学科，一般认为起源于第二次世界大战。第二次世界大战早期，德国空军对英国本土的轰炸对英国造成了极大的破坏。虽然当时已经出现了雷达，但由于有来自不同雷达站的信息以及雷达站同整个防空系统的配合不够好，英国本土仍然遭受了德国空军对其轰炸的重创。当时，Bawdsey 雷达站的负责人 A.P.Rowe 提出在现有技术装备情况下对整个防空作战系统的运行进行研究。为保密的需要，他们将这项研究称为“Operational Rresearch”(运用研究)。研究小组是一支综合的队伍，包括数学家、物理学家甚至还有心理学家等。由于其成员构成的复杂性，人们称之为“布莱克特马戏团”。他们研究的具体问题有设计将雷达信息传送给指挥系统及武器系统的最佳方式和雷达与防空武器的最佳配置等。他们的研究成果极大地提高了英国本土的防空能力。他们的研究工作主要是考虑立足当时已有的技术装备，如何进行不同的配置使其发挥最大的功效。按照后来被称为运筹学的主要思想，这些研究不仅是现代运筹学的发端，也是运筹学解决实际问题的

成功范例。此外，盟军的反潜艇战运筹研究小组针对德军潜艇的作战研究也卓有成效。他们通过对以往攻击德军潜艇的相关数据的分析，提出了两条重要建议：一是将反潜攻击由潜艇投掷水雷改为飞机投掷深水炸弹；二是将起爆时间改为德军潜艇刚下潜时。事实证明，这样的效果是最佳的。类似成功的例子在第二次世界大战期间还有很多。据统计，在第二次世界大战期间，英国、美国和加拿大等国军队里的运筹学工作人员一度超过了 700 人。这些运筹学工作人员研究的问题还包括战斗机炮弹的合理载荷量问题和如何用一定数量的战斗机封锁给定的海面海域的问题等。第二次世界大战时期军事运筹学的特点表现在：在采集实际数据的基础上，通过多学科的密切协作，用定量化、系统化的方法研究立足现有技术装备如何达到最佳的作战效果。

追根溯源，如上所述的思想和方法在古代人们的生活和生产活动中就已经出现。例如，中国古代著名的“田忌赛马”“赵括运粮”“丁谓修宫”等故事，李冰父子主持修建的由“鱼嘴”岷江分洪工程、“飞沙堰”分洪排沙工程和“宝瓶口”引水工程巧妙结合而成的都江堰水利工程，《梦溪笔谈》所记录的军粮供应与用兵进退的关系等事例，无不闪耀着现代所称的运筹学思想，即体现了立足现有技术装备整体优化的朴素思想。进入 20 世纪后，现代运筹学的思想已经在很多方面有所体现，比如 1914 年英国工程师兰彻斯特 (Lanchester) 提出的战斗方程, 1917 年丹麦工程师研究电话通信时提出的排队论的一些著名公式，20 世纪 20 年代初提出的存储论的最优批量公式，以及 20 世纪 30 年代苏联数学家康托洛维奇在解决工业生产组织和计划问题时提出的类似线性规划的模型，等等。

由于运筹学主要是采用定量分析手段，研究如何最佳利用现有技术装备问题，以求达到最佳效果，所以第二次世界大战以后在美国等发达国家开始将运筹学的思想和方法运用到工业和经济管理领域，并取得了非常好的效果。到 20 世纪五六十年代，从事运筹学的工作者队伍开始迅速壮大，纷纷成立学会、创办刊物并开始在高校开设运筹学课程。也正是在这段时期，现代运筹学由钱学森、徐国志先生从美国归国时引入中国，并且在两位先生的推动下于 1956 年在中国科学院力学研究所成立了中国第一个运筹学研究小组。1959 年，第二个运筹学研究部门在中国科学院数学研究所成立，这是数学家们投身于国家建设的一个产物。力学所小组与数学所小组于 1960 年合并成为数学研究所的一个研究室，当时的主要研究方向为排队论、非线性规划和图论，还有人专门研究运输理论、动态规划和经济分析 (如投入产出方法)。50 年代后期，运筹学在中国的应用集中在运输问题上，其中一个广为流传且容易明白的例子就是“打麦场的选址问题”。研究该问题的目的在于解决当时在以手工收割为主的情况下如何节省人力、物力。著名的“中国邮递员问题”也是在那个时期由管梅谷教授提出的。特别值得一提的是，华罗庚先生在“文化大革命”那种特殊历史时期在全国推广的“优选法”。华罗庚先生将一些基本的优化方法，如 0.618 法，用朴素的语言编写成册，用于解决纺织女工查找布匹疵点的最佳时机等实际问题，并亲自下工厂、到农村进行推广，为在那种特殊历史时期提高生产效率起到了很好的效果。但是，由于运筹学在解决经济问题时常常要讲到利润最大、成本最

低等，这些讨论在“文革”期间是禁区。所以，“文化大革命”开始以后，运筹学的研究和教学出现了停滞。到了“文革”结束后的 1980 年，中国运筹学会作为中国数学学会的一个分支才成立。运筹学的研究和教学开始恢复。1992 年，中国运筹学会从中国数学会独立出来成为国家一级学会是学会发展史上的一个重要事件。这说明了运筹学以数学为基础，但同数学学科有本质的不同。运筹学家除了推动运筹学基本理论的发展，还要对社会负起同数学家不同的责任。事实上，国际上几十年来对运筹学发展的讨论一直没有停止过。1994 年，美国运筹学会和管理科学学会合并，成立了 INFORMS，是国际运筹学界的一件大事。目前，运筹学和管理科学的结合也引起中国运筹学界的极大关注。近年来，中国运筹学工作者坚持运筹学研究与经济建设等重大问题紧密结合取得了很大的成绩。例如，在山东省与大连市经济发展计划的制订，兰州铁路局铁路运输的优化安排，中外合资经营项目的经济评价，若干国家重大工程中的综合风险分析等方面，我国运筹学者都发挥了积极作用。近二十年来，信息科学、生命科学等现代高科技对人类社会产生了巨大影响，运筹学工作者关注到其中一些运筹学起作用的新的工作方向并积极参与其中。例如，运筹学工作者将全局最优化、图论、神经网络等运筹学理论及方法应用于分子生物信息学中的 DNA 与蛋白质序列比较、芯片测试、生物进化分析、蛋白质结构预测等问题的研究；在金融管理方面，将优化及决策分析方法，应用于金融风险控制与管理、资产评估与定价分析模型等；在网络管理上，利用随机过程方法，研究排队网络的数量指标分析；在供应链管理问题中，利用随机动态规划模型，研究多重决策最优策略的计算方法等。

截至目前，几乎所有高校都在应用数学、经济管理以及金融、工程技术学科等各专业开设了运筹学课程。运筹学正以其解决实际问题的独特性受到人们越来越多的研究和应用。

运筹学与数学建模

运筹学的特点

由运筹学的发展简史可见，在解决某个实际问题时，运筹学的主要特点是利用现有的技术、资源，研究如何才能发挥最佳的效果。在这个过程中，往往需要和多个学科进行合作。可以这么说，运筹学是为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时，提供以数量化为基础的科学方法。它强调以量化分析为基础，就必然要用数学语言描述并解决问题。但任何决策都包含定量分析和定性分析两个方面，而定性分析又不能简单地用数学语言加以描述，如政治、民族、人们的心理等，只有综合多种因素的决策才是全面的。运筹学工作者的职责是为决策者提供量化分析的结果，并指出定性的因素。运筹学的另一个定义是：运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优策略提供定量依据。这个定义表明运筹学具有

多学科交叉的特点。在解决实际问题时，由于成本以及各种条件的限制，对于运筹学理论上提出的最优，往往无法达到，这时可用次优、满意解来代替。因此也可以说，运筹学为最好的解决实际问题提供一种量化依据，如果不按照运筹学给出的方案进行，则结果可能更糟糕。

运筹学与数学模型

前面提到，用运筹学解决实际问题必须用数学的语言描述该问题。这种用数学语言描述问题的过程就是建立某个实际问题的数学模型。所谓模型是指，为了一定的目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物。按照描述的方式划分，模型可以分为形象模型、模拟模型以及符号或数学模型。比如，房地产开发商将其开发的房地产用沙盘方式呈现出来就是形象模型，用计算机模拟核武器爆炸以后的效果就是模拟模型。而数学模型则是将拟解决的问题所牵涉的决策变量之间的关系按照物理的、化学的、经济的等规律所必须满足的条件用数学式子写出来，并用相关数学式子将要解决的目标也表示出来的一种描述问题的方式。建立一个问题的数学模型并不是全新的概念。实际上，从小学开始的数学课上解应用题就是简单地建立数学模型并求解的过程。比如，有两艘船相距 200km，甲船以 20 km/h 的速度自东向西行驶，同时乙船以 30km/h 的速度自西向东行驶，问两船经过几小时相遇？这是一个典型的小学数学应用题。我们现在这样重新描述，问题问的是两船经过几小时相遇，这个时间是要我们回答的，是不知道的。因此可以假设两船经过 th 航行会相遇，根据简单的物理学规律以及题目的假设，显然有：$20t + 30t = 200$。这个式子就是我们所说的数学模型 (答案当然很简单，即 $t = 4$h)，因为这个式子描述了原问题。这个模型虽然简单，但仔细思考，仍然有些建立数学模型的特点。首先，我们在列出上述式子时有意无意地忽略了某些条件。比如，我们在这里实际上假设两船在航行过程中不受诸如海浪、风向等外在因素的影响，并且假设两船一定是在一条直线上相向而行。实际上，建立任何一个问题的数学模型时都必须作出一些假设，有时，一个数学模型的好坏与假设是否合理、得当有很大关系。其次，我们利用了物理学上速度、时间和距离的关系以及题目本身给出的条件，即两船相距 200km 以及甲、乙两船的速度。这说明，建立数学模型必须根据问题给出的条件，并利用物理的、化学的、经济的、金融的等相关领域的规律才能将决策变量满足的条件或目标表示出来。

数学模型可以分为很多种，如初等数学模型、高等数学模型，离散模型、连续模型，确定性模型、随机模型，微分方程模型、差分方程模型，统计回归模型、优化模型，等等。从所使用的数学工具的角度来讨论建立数学模型，则可以说几乎用到了数学的所有分支。 由于运筹学的特点，在这门课程里讨论的数学模型都是优化模型。如何建立一个问题的优化模型 (运筹学模型) 是学习这门课程的一个非常重要的任务。但是，建立一个复杂问题的运筹学模型并不是一件简单的事情。实际上，有人认为建立一个好的数学模型 (包括运筹学模型) 是一门艺术。这是指，建立数学模型并不能简单地根据某个定理就

能立即写出来，而是需要利用问题的假设和相关规律进行反复思考、讨论，进行创造性的工作。当然，任何事情都有一个开始和训练。在运筹学这门课程里，我们除了学习一些运筹学的分支及其相关理论外，有意识地注意数学建模是一项非常重要的任务。虽然建立某个问题的数学模型没有一个统一的模式，但从以下几个方面进行思考是有益的：

(1) 仔细考虑 (阅读) 问题的已知和未知条件，反复讨论，找出问题要解决的目标。需要解答者回答的问题往往就是决策变量，用适当的符号表示决策变量。

(2) 经过讨论，作出适当与合理的假设。所谓适当与合理的假设主要与该问题所属学科领域的知识有关。

(3) 从问题的最后入手，讨论决策变量之间以及与某些公认的或已知的规律或某种量之间的联系，并将这些关系表示出来。

(4) 将问题需要回答的目标表达出来。

能做到从以上几个方面思考问题，对于学习运筹学来说是足够了，但要提高建立数学模型的能力却不是一朝一夕的事情，只有长期坚持建模训练才有可能建立一个好的数学模型，用于解决复杂的实际问题。

算法

假设我们针对某个问题建立了数学模型，那么接下来的任务就是求解这个模型。求解数学模型，当然要用到相关的数学理论，从求解的方式来看，不外乎有两种方式：公式的或解析的求解方式以及根据某种算法进行求解。前面一种方式不用讨论，我们着重讨论第二种方式。由于问题本身的结构，很多问题没办法用公式求解。这时，人们往往会根据问题的特点和相关理论提出解决这个问题的一些步骤。即，首先应该怎么做，其次又应该怎么做，在什么情况下应该怎么做，在什么情况应该终止等等。这些解决某个问题的步骤就是算法。

作为一个算法应该满足一般性和有限终止性。即只要是同类型的问题就应该能够按照相同的算法得出结果并且一定要在有限次运算后终止 (收敛)。除此以外，还需要考虑算法的运算效率，即收敛速度。

运筹学模型几乎都是根据某种算法进行求解的。因此，适当了解与算法密切相关的计算复杂性是有必要的。下面对此做一个简单的介绍。所谓问题是指一个抽象的模型或概念，它通过一些具体的数据表现出来。问题是需要回答的一般性提问，通常含有若干个满足已定条件的参数。问题通过描述所有参数的特性和描述答案所满足的条件给定。当问题中的参数赋予了具体值的时候，就称为问题的一个实例 (Instance)。一个问题通过它的所有实例表现。算法常常是针对一个问题来设计的，它可以求解任何一个该问题的实例。比如，线性规划问题是指：

$$
\begin{aligned}
\max(\min) \quad & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \\
\text{s.t.} \quad & \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

这里，$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^n$ 称为决策向量，$\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n$ 称为价值系数向量，$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{m \cdot n}$ 称为技术系数矩阵，$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$ 称为资源系数向量。$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 就是描述该问题的参数，当这些矩阵、向量给定具体值后，就对应一个实例。通过一个称为检验数 (后面将会详述) 的概念对其解进行描述。后面我们将会了解到单纯形法可以求解该问题。并且只要是如上形式的问题，不论 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是怎样的，通过单纯形法都可以得出有解 (唯一解、无穷多组解、无界解) 或无解的最终结果。

衡量一个算法的好坏有时可以用计算机所耗费的 cpu 时间来判断，但是，计算机软硬件都在不断变化和提高，所以通常是用算法中的加、减、乘、除和比较等基本运算的总次数同实例在计算机计算时的二进制输入数据的大小关系来度量的。在这里我们不打算进行详细地讨论，我们只是粗略地指出，一个求解实例 I 的算法的基本计算总次数 $C(I)$ 同实例 I 的计算机二进制输入长度 $d(I)$ 的关系如果能用一个多项式函数进行控制的话，我们就称该算法是求解该问题的一个多项式时间算法。这样的算法我们认为是有效的或者说是好的算法。与此相对的就是所谓指数时间算法，这样的算法我们认为是效率不高的或者说是不好的算法。

一个问题如果存在至少一个多项式时间算法，则称为多项式问题，所有多项式问题集记为 P(Polynomial)。对于上面提到的线性规划问题，可以证明，单纯形法不是一个多项式时间算法，但这并不能说明线性规划问题不属于多项式问题。Khachian 在 1979 年成功构造了椭球算法并证明了其算法是线性规划问题的多项式时间算法。因此，线性规划问题属于 P。并非所有 (优化) 问题都找到了多项式时间算法，也就是说，还不能肯定某些优化问题是否属于 P。我们把迄今为止还没有找到多项式时间算法的最优化问题归为所谓的 NP-hard。受人类认识能力的限制，目前人们只能假设这一类难解的最优化问题不存在多项式时间算法。比如，我们将在后面学习的整数规划问题，0-1 规划问题即属于此类问题。但是，非多项式时间算法在实际计算中的表现不一定就不好。比如单纯形法，理论上不是多项式时间算法，但其求解实际问题的效果，特别是对于中小规模的线性规划问题而言，其效果往往好于别的算法 (如内点算法)。因此，单纯形法以及割平面法、隐枚举法等算法仍然值得我们学习。

应用运筹学解决问题

运筹学的特点之一是多学科合作。所以，运用运筹学解决实际问题首先需要与问题所属学科领域的专业人士进行合作，深入了解问题的真正含义，搞清问题真正需要解决的目标。其次，在研究问题时要互相引导，改变一些对问题的常规看法。除了强调合作以

外，在研究问题时也需要独立进行，要思路开阔。具体来说，应用运筹学解决问题主要有如下一些步骤：

(1) 分析问题。首先针对问题做调查研究。这里指的是针对问题提供的已知、未知，做定性研究，讨论问题的属性。要搞清楚问题所属的学科领域，并反复讨论问题需要解答者回答什么。这个说法看似容易，但对比较复杂的问题可能需要解答者反复思考才可能真正清楚问题所在。

(2) 构造或选择模型。在清楚决策变量并用适当符号表示以后，针对问题可以选用适当的、已知的模型，也可能需要解答者自己构造模型。所谓构造模型是指，根据相关学科领域的知识和问题的要求，客观地写出决策变量之间必须满足的关系。在此，需要特别强调的是，在构造模型或选择模型以前，必须作出适当的、合理的假设。

(3) 模型的求解和检验。模型建立以后，应该根据相关理论对此模型进行求解。对于运筹学模型而言，几乎都是根据相关算法通过计算机求解。在此，需要注意问题的规模和计算复杂性问题。对于某些大型的运筹学模型，如果属于 NP-hard 的，可能还需要采用某些启发式算法进行求解。在求解过程中必然有检验的问题，这与算法有关。

(4) 解的实施和控制。应用运筹学解决问题的根本就是为决策者作出科学决策提供定量依据。因此，得到模型的解以后就需要具体实施。若在实施过程中发现与预期的、理论的或实际的表现不符，则需要回到第一步重新开始。另外，由于任何数学模型都有局限性，所以在可能的情况下作灵敏度分析，即确定最优解保持稳定的参数变化范围也是非常重要的。

(5) 模型的总结和反馈。最后，针对建立的运筹学模型作出总结，讨论是否可以进一步改善模型。

在应用运筹学解决一个复杂的实际问题时，构造或选择模型是最重要的一步。为获得一个好的模型，可能需要重复上述步骤，反复讨论才能成功，从而较好地解决问题。

关于本书

从应用数学的角度来看，运筹学是一门应用性很强的学科。从管理等学科的角度来看，运筹学又是一门数学味道很浓的学科。因此，学习运筹学不仅要学会相关的数学理论，更要注意建立数学模型解决实际问题。同时，对于处在计算机时代的人来说，必须要学会利用计算机解决运筹学模型。我们在前言已经说过，可以选用一些现成的计算机软件来解决运筹学问题，但编者考虑到 MATLAB 的重要性和广泛性，本书是基于 MATLAB 来进行相关讨论的。几乎对于每个算法我们都编写了相关的程序并附在每章的适当位置。编者也认为掌握相关算法的手工计算也是很有必要的。因为这会有助于学习者真正理解和掌握相关的算法。因此传统的手工计算我们并没有放弃。另外，本书在选材时是从运筹学模型的数学特点进行划分的。即分成线性模型、非线性模型和随机模型三种。

CHAPTER 1 第 1 章

线性规划及单纯形法

学习目标与要求

1. 掌握线性规划的有关概念，会化非标准型线性规划为标准型线性规划。
2. 初步建立数学模型的概念。
3. 掌握求解线性规划的单纯形法并会用 MATLAB 求解线性规划问题。

1.1 线性规划问题及其标准型

线性规划 (Linear Programming, LP) 是运筹学中一个基础而重要的分支。很多其他运筹学问题的求解都以线性规划问题为基础。线性规划开创性的工作可以追溯到 1939 年苏联数学家、经济学家康托洛维奇 (L. V. Kantorovich, 1912—1986) 的著作《生产组织和计划中的数学方法》。他把资源最优利用这一传统的经济学问题，由定性研究和一般的定量分析推进到现实计量阶段，对于在企业范围内如何科学地组织生产和在国民经济范围内怎样最优地利用资源等问题做出了独创性的研究。此外，美国经济学家库普曼斯 (T. C. Koopmans) 和美国数学家丹兹格 (G. B. Dantzig) 在线性规划的发展历史中也作出了开创性的卓越贡献。前者在第二次世界大战期间重新独立地研究了运输问题，后者则发明了 20 世纪最伟大的算法之一，即用于求解线性规划问题的单纯形法。从理论上来说，单纯形法不是多项式时间算法，而后来出现的椭球算法和内点算法才是求解线性规划问题的多项式时间算法，但在实际计算中，特别是对中小规模的线性规划问题，单纯形法的表现仍然很好。因此，对于现在学习运筹学的人来说，单纯形法仍然是必须掌握的算

法。

1.1.1　线性规划问题的提出

线性规划是指求解一组决策变量，该组决策变量在满足一些线性约束条件的基础上，使得某个线性函数的值达到最大或最小。下面通过两个例子加以说明。

✍ **模型引入 1.1** (生产安排问题)　某工厂生产甲、乙两种产品，而生产这两种产品需要用到原材料 A 和原材料 B。该厂可以利用的原材料 A 有 16kg，原材料 B 有 12kg。生产一个单位甲产品需要消耗 2kg 原材料 A 和 4kg 原材料 B，生产一个单位乙产品需要消耗 3kg 原材料 A 和 1kg 原材料 B。经过测算，一个单位的甲产品可以获得 6 元的利润，一个单位的乙产品可以获得 7 元的利润。问：该厂应如何安排生产才能获得最大利润？

解　这个问题问的是如何安排生产才能获得最大利润。什么叫安排生产呢？在这个简化的题目中，所谓安排生产当然指的是生产甲、乙两种产品各多少个单位。所以，这是我们要回答的不知道的量。设生产甲、乙两种产品各为 x_1 和 x_2 个单位，于是按照题目的假设，该厂此时可以获利 $z = 6x_1 + 7x_2$。生产不能是随意的，在这里，生产所耗费的原料当然不能超过该厂的拥有量。于是，生产必须在如下约束下进行：

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\leqslant 16 \quad (\text{原料 A 的限制}) \\
4x_1 + x_2 &\leqslant 12 \quad (\text{原料 B 的限制})
\end{aligned}
$$

此外，x_1, x_2 是甲、乙产品的计划生产量，所以有 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$。用 max 表示 maximize(即最大)，用 subject to 或 such that 表示受约束 (其缩写为 s.t.)，于是可以将上面的分析表示为：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 6x_1 + 7x_2 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \left\{
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 \leqslant 16 \\
&4x_1 + x_2 \leqslant 12 \\
&x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}
\tag{1-1-1}
$$

这就是该问题的数学模型。它将原问题用数学的语言完全表达出来了。

✍ **模型引入 1.2** (最佳下料问题)　某汽车制造过程中需要用到 1.5m、1m、0.7m 的钢轴各一根。用于制造这些钢轴的原料是 4m 长的圆钢。现在要制造 1000 辆汽车，问最少需要多少根圆钢。

解　由于 3 种规格的钢轴长度之和为 3.2m，一个自然的做法是在一根圆钢上截取就可以完成该项任务。但是，这样做将会出现 0.8m 的料头。制造 1000 辆汽车将会出现 800m 的料头，如果这些料头不能作其他用途，则相当于浪费了 200 根原材料。那么，有没有什么办法能减少浪费呢？仔细阅读题目不难发现，需要的是 1.5m、1m、0.7m 的钢轴各一根，并没有要求这些钢轴来自于同一根圆钢。也就是说，只要获得 1.5m、1m、0.7m

的钢轴各 1000 根就行了。于是，可以按照这样的思路来考虑：假设在圆钢上的切口厚度忽略不计，那么，若在一根圆钢上截取 2 根 1.5m、1 根 1m 的钢轴，则没有任何余料，若在一根圆钢上截取 2 根 1.5m、1 根 0.7m 的钢轴，则只有 0.3m 的余料　　把这些方案列举出来 (见表 1-1)。只要余料小于 0.8m，那么都是比原始想法好的截取方案。这样，通过各种截取方案获得的 1.5m、1m 和 0.7m 的钢轴只要都有 1000 根，这项任务就完成了。这样做的目的当然是让产生的余料之和达到最小。于是，可以设 $x_i(i=1,2,\cdots,10)$ 表示采用第 i 种方案时圆钢的数目，则将得到规格为 1.5m，1m 和 0.7m 的钢轴分别为：

$$2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5 \qquad (1.5\text{m 钢轴})$$

$$x_1+2x_3+x_4+4x_6+3x_7+2x_8+x_9 \qquad (1\text{m 钢轴})$$

$$x_2+2x_4+3x_5+x_7+2x_8+4x_9+5x_{10} \qquad (0.7\text{m 钢轴})$$

表 1-1　优于原始方案的下料方案

钢轴规格/根 \ 方案	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	需求量
1.5m	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	1000
1m	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0	1000
0.7m	0	1	0	2	3	0	1	2	4	5	1000
余料/m	0	0.3	0.5	0.1	0.4	0	0.3	0.6	0.2	0.5	1000

按照这样的做法，将会产生的余料表达式为：

$$0.3x_2+0.5x_3+0.1x_4+0.4x_5+0.3x_7+0.6x_8+0.2x_9+0.5x_{10}$$

于是，得到该问题的数学模型：

$$\min \quad z=0x_1+0.3x_2+0.5x_3+0.1x_4+0.4x_5+0x_6+0.3x_7+0.6x_8+0.2x_9+0.5x_{10}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1000 \\ x_1+2x_3+x_4+4x_6+3x_7+2x_8+x_9=1000 \\ x_2+2x_4+3x_5+x_7+2x_8+4x_9+5x_{10}=1000 \\ x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,10) \end{cases} \tag{1-1-2}$$

以上两个问题都是求一组决策变量使得某线性函数 (称为目标函数) 达到最大或最小的优化问题。这些决策变量满足一定的线性函数，这些函数称为约束条件。这样的问题就是所谓的线性规划问题。将其推广就得到如下线性规划的一般数学表达：

$$
\begin{aligned}
&\max(\min) \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\
\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\
x_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, n)
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-1-3}
$$

在模型 (1-1-3) 中，称 $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 为目标函数，对于该函数可能是求极大 (max)，也可能是求极小 (min)。模型中写成 max(min) 是为了将两种情况写在一起以便于说明，并非同时求极大和极小。称 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 为约束条件。同样，式 (1-1-3) 右边的 $\leqslant (=, \geqslant)$ 是将可能的 3 种约束情况写在一起以便于说明。最后 $x_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为决策变量的非负约束。由于线性规划问题在经济学上的含义，称 $c_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为价值系数；$b_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 为资源系数；$a_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 为技术系数。值得注意的是，今后所遇到的问题并不全是经济学问题，但仍然这样称呼这些参数。

求解线性规划问题 (1-1-3) 只能通过算法 (没有解析解的方法) 进行。也就是说，不能通过将上述参数代入某个公式然后求得该问题。因此，必须指定一种表达形式为标准形式，这种标准形式必须是能很容易地将其他非标准形式化为该标准形式。本书规定的线性规划问题的标准形式为：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
x_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, n)
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-1-4}
$$

它有 3 个特点：

(1) 目标函数求极大。由于对于任何函数均有 $\min z = -\max(-z)$，可见，如果原问题是对目标函数 z 求极小，则可以先求其相反函数 (即 $-z$) 的极大，得到极大值之后，再将函数值反号即可。

(2) 所有约束条件都是等式约束。实际上，若第 i 个约束条件是“$\leqslant$”，即

$$
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i
$$

则表明表达式左边比右边少了某一个非负数，称该非负数为松弛变量，在经济学上表明该种资源 (即 b_i) 没有用完的部分。设该非负数为 x_s(具体的下标视原问题的变量个数以及有多少个松弛变量而定，一般与原问题的变量下标连续)，则一定有：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_s = b_i$$

x_s 作为新的变量加入到原问题中，在整个模型求解后其值也就出来了。第 i 个约束条件也可能是“$\geqslant$”，即

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i$$

这时，表达式左边比右边多了某一个非负数，称该非负数为剩余变量，也可继续称为松弛变量。在经济学上的意义是该种资源 (即 b_i) 用超过的部分，比如某种产品中某种成分的含量至少达到 b_i，则就会出现这样的约束。类似地，设该非负数为 x_s(具体的下标视原问题的变量个数以及有多少个松弛变量而定，一般与原问题的变量下标连续)，则一定有

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_s = b_i$$

x_s 也作为新的变量加入原问题中，在整个模型求解后其值同样出来了。

(3) 所有决策变量非负。实际上，对于决策变量的符号，总共有 3 种可能。若某变量本来就是非负的，则不用改变；若某变量非正，则用其相反的变量取代。即若原模型中要求 $x_i \leqslant 0$，则令 $x_i' = -x_i$，或者说 $x_i = -x_i'$，并将其代入原模型中，则 x_i 被 x_i' 取代，且 $x_i' \geqslant 0$；若原模型中对 x_i 没有符号要求，即正负均可，则可令

$$x_i = x_i' - x_i'', \quad x_i', x_i'' \geqslant 0$$

带入原模型中，则出现的变量均是非负变量。

通过这 3 点，任何一个线性规划问题都可以容易地化为标准形式。今后讨论线性规划问题的有关理论以及有关算法时都是针对模型 (1-1-4) 进行的。此外，还常常用到模型 (1-1-4) 的向量表达形式 (1-1-5) 和矩阵表达形式 (1-1-6)，相应的称式 (1-1-4) 为线性规划问题的分量表达形式。

$$\begin{aligned}
&\max \quad z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b} \\ x_j \geqslant 0 (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}
\end{aligned} \tag{1-1-5}$$

其中，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n$; $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n$; $\boldsymbol{P}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^{\mathrm{T}} \in$

$\boldsymbol{R}^m(j=1,2,\cdots,n);\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^m$。

$$\begin{aligned}&\max\quad z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\\&\text{s.t.}\\&\qquad\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\end{aligned}\tag{1-1-6}$$

其中，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\cdot n}\in\boldsymbol{R}^{m\cdot n};\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^n;\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^m$。

根据向量和矩阵的相关运算，容易看出上面 3 种表达形式是一样的，只是在讨论有关问题时，不一样的表达方式有时更方便，特别是线性规划的矩阵表达形式。最后需要强调的是，在线性规划的标准形式中要求资源向量 $\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$。这点容易办到而且意义明显。

例 1.1　将线性规划问题 (1-1-1) 化为标准形式。

解　线性规划问题 (1-1-1) 原为：

$$\begin{aligned}&\max\quad z=6x_1+7x_2\\&\text{s.t.}\\&\qquad\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 16\\4x_1+\ \ x_2\leqslant 12\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}\end{aligned}$$

对照上面的 3 个特点逐一检查：目标函数已是求极大，决策变量已是非负，但两个约束条件都是“$\leqslant$”，故需要引入两个松弛变量，分别记为 x_3,x_4。无论是松弛变量还是剩余变量都是非负变量，故式 (1-1-1) 等价于如下标准形式：

$$\begin{aligned}&\max\quad z=6x_1+7x_2\\&\text{s.t.}\\&\qquad\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3\qquad=16\\4x_1+\ \ x_2\qquad+x_4=12\\x_i\geqslant 0,i=1,2,3,4\end{cases}\end{aligned}$$

写成矩阵形式为：

$$\begin{aligned}&\max\quad z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\\&\text{s.t.}\\&\qquad\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{c}=(6,7,0,0)^{\mathrm{T}};\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&1&0\\4&1&0&1\end{pmatrix};\boldsymbol{b}=(16,12)^{\mathrm{T}};\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$。

例 1.2 将下述线性规划化为标准形式。

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z=-x_1+2x_2-3x_3\\
&\text{s.t.}\\
&\qquad\begin{cases}
x_1+x_2+\ \ x_3\leqslant 7\\
x_1-x_2+\ \ x_3\geqslant 2\\
-3x_1+x_2+2x_3=5\\
x_1,x_2\geqslant 0,x_3\text{无符号限制}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

解 由于 x_3 无符号限制，故令 $x_3=x_4-x_5,x_4,x_5\geqslant 0$，并在第一个约束条件引入一个松弛变量 $x_6\geqslant 0$，在第二个约束条件引入剩余变量 (松弛变量)$x_7\geqslant 0$，则得到原问题的标准形式：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z=x_1-2x_2+3x_4-3x_5\\
&\text{s.t.}\\
&\qquad\begin{cases}
x_1+x_2+\ \ x_4-\ \ x_5+x_6\qquad =7\\
x_1-x_2+\ \ x_4-\ \ x_5\qquad -x_7=2\\
-3x_1+x_2+2x_4-2x_5\qquad\quad =5\\
x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_4\geqslant 0,x_5\geqslant 0,x_6\geqslant 0,x_7\geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

其矩阵形式为：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\\
&\text{s.t.}\\
&\qquad\begin{cases}
\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\
\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0\\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1\\
-3 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0
\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=(1,-2,3,-3,0,0)^{\mathrm{T}}
$$

$$
\boldsymbol{b}=(7,2,5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7)^{\mathrm{T}}
$$

1.1.2 图解法及基本概念

由于线性规划问题的目标函数和约束条件都是线性函数，在只有两个决策变量时，可以在笛卡儿直角坐标系上画出相应的约束函数并可以直观地看出其最优解。这就是线性规划的图解法。图解法只适用于两个决策变量的情形，超过两个决策变量的线性规划问

题无法利用图解法求解。因此，图解法除了帮助初学者直观地了解线性规划的有关概念和基本原理以外，没有其他作用。图解法的基本步骤为：

(1) 在笛卡儿直角坐标系上画出所有的约束函数 (直线)，并确定决策变量的取值范围，这个范围内的每个点称为可行点或可行解，其全体称为可行域。

(2) 画出至少两条目标函数直线，它们是平行的 (实际上目标函数是平行直线族)，这样可以看到目标函数向什么方向移动时函数值是增加还是减少，当目标函数增加 (原问题是求极大) 到某一点，如果再增加就跑到了约束域的外面时，这点就是所求的最优点 (最优解)。

例 1.3　用图解法求解线性规划问题 (1-1-1)。

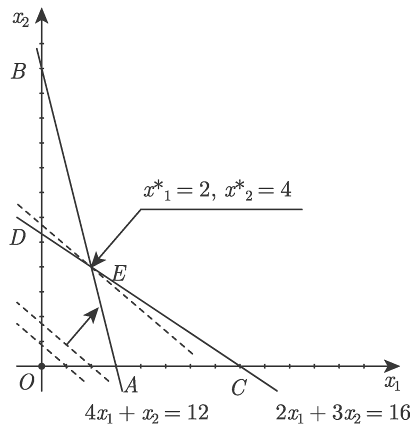

图 1-1　图解法求解线性规划问题 (1-1-1)

解　首先在笛卡儿直角坐标系上画出两条约束函数直线，然后判断约束域。由于有变量非负的要求，所以只需要第一象限。原来第一个约束条件是 $2x_1+3x_2 \leqslant 16$，故满足该条件的点位于 $\triangle OCD$ 区域，类似地，满足第二个约束条件的点位于 $\triangle OAB$ 区域。从而满足所有约束条件的点位于四边形 $OAED$ 区域。令目标函数 $6x_1+7x_2$ 分别取值 6 和 12(当然也可以是其他值) 并画出这两条直线，即图 1-1 中左下方的两条虚线。可以看出，该直线向右上方移动时函数值是增加的。因此，该直线移动到 E 点时不能再移动了。因为，E 点还属于可行域的一点 (可行点)，继续向上移动时，目标函数值虽然增加，但直线上所有点都不在约束域里面了。这就是说，E 点是约束域里使得线性规划问题 (1-1-1) 目标函数值最大的点，故该点即为所求的最优点。显然，这是两条约束直线的交点，解线性方程组即可得到 $x_1^*=2, x_2^*=4$，而最优目标函数值为 $z^*=40$。

上述例题中的最优解是唯一的，但对于一般的线性规划问题，其解的结果还有可能是：无穷多组解、无界解以及无可行解这 3 种情况。下面通过图解法加以说明。

例 1.4 利用图解法求解线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 + (3/2)x_2 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 16 \\ 4x_1 + \ \ x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-1-7}
$$

解 不难看出，这个线性规划问题与问题 (1-1-1) 只是目标函数不同。这里的目标函数与第一个约束直线是平行的，用图解法求解的结果见图 1-2。此时，由于目标函数与约束的边界 DE 段重复时函数值最大，故此时有无穷多组最优解。最优解 x_1^* 和 x_2^* 满足 $2x_1^* + 3x_2^* = 16$, 且 $0 \leqslant x_1^* \leqslant 2$。最优值 $z^* = 8$。

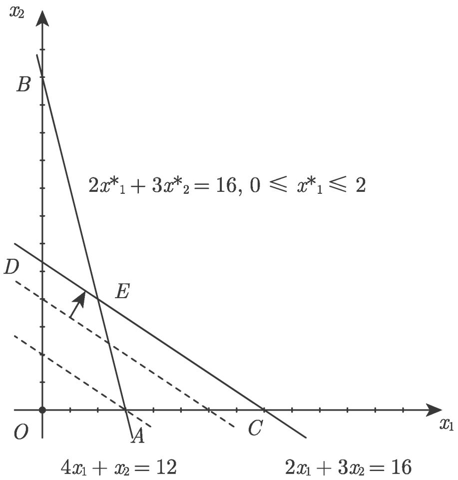

图 1-2 图解法求解线性规划问题 (1-1-7)

例 1.5 利用图解法求解线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 2x_1 + 2x_2 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases} \ \ x_1 - \ x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 0 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-1-8}
$$

解 根据上面所说的步骤画出其可行域 $ABCD$，见图 1-3。从图上可以看出，可行域 $ABCD$ 是无界的。随着目标函数向右上方移动时，目标函数值一直增加，且一直都有点在可行域里。这就是说，目标函数值 (求最大) 是无上界的。

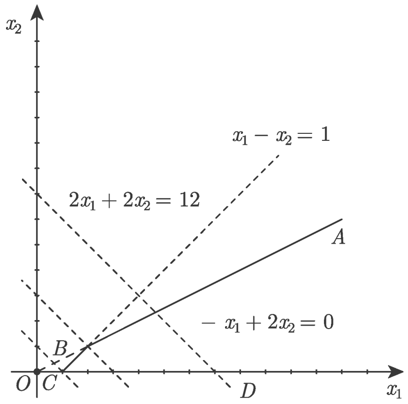

图 1-3　图解法求解线性规划问题 (1-1-8)

例 1.6　利用图解法求解线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z=x_1+x_2\\
&\text{s.t.}\\
&\qquad\begin{cases}
-x_1+\ x_2\geqslant 1\\
-x_1-x_2\geqslant 1\\
x_1,x_2\geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-1-9}
$$

解　根据题设约束条件画出图 1-4。从图上可以看出，两个约束条件确定的区域 D_1 和变量非负的要求矛盾。所以，该问题不存在可行解，即不存在满足两个约束条件的非负变量 x_1,x_2。

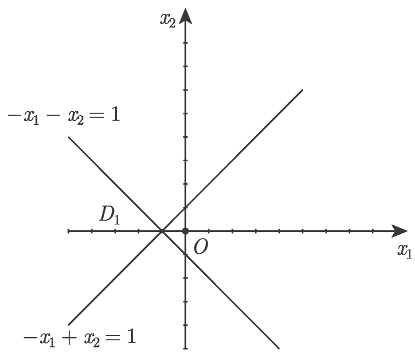

图 1-4　图解法求解线性规划问题 (1-1-9)

上面讨论了线性规划解的 4 种可能性，即有唯一解、无穷多组解、无界解和无可行解。值得注意的是，在例 1.3 中，可行域 $OAED$ 是一个四边形，最后得到的最优解在其中的一个顶点上。可行域里面的点都是可行解，在经济学上意味着在可行域 $OAED$ 中任

选一点进行生产都是可行的 (有无穷多个可行点)，因为这样的生产没有超出该厂拥有的资源数量。但最优点 (最优生产计划) 出现在其可行域的一个顶点上，不是可行域内部的某个点。这个题目虽然简单，但上述结论却具有一般性。下节将证明线性规划问题的可行域若有界，则其最优解一定可以在其某个顶点或某段边界上得到。下面继续讨论与线性规划的解有关的几个概念。

1. 可行解、可行域和最优解

满足线性规划问题所有约束条件，包括非负约束的解称为线性规划问题的可行解。所有可行解组成的集合称为可行域。常常记为 $\boldsymbol{D}$。对于线性规划问题 (1-1-6)，有

$$\boldsymbol{D}=\{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\}$$

从上面的图解法可知，可行域 $\boldsymbol{D}$ 可能是空集，也可能非空。在非空集时，可能是有界的，也可能是无界的。每个可行解对应一个目标函数值，在所有目标函数值中最大者或最小者就是最优解，相应的目标函数值为最优目标函数值。

2. 基、基变量、非基和非基变量

考虑线性规划的标准形式 (1-1-6)，即

$$\begin{aligned}&\max\quad z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\\&\text{s.t.}\\&\qquad\quad\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\cdot n}\in\boldsymbol{R}^{m\cdot n};\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^{n};\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{n};\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^{m}$。

首先，假设技术系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数不大于列数，即假设 $m\leqslant n$。实际上，在后面将会学习到线性规划的对偶理论，根据对偶理论，任何一个线性规划问题 (称为原问题) 都有一个对偶线性规划 (对偶问题) 与之对应，两者有非常密切的联系，且两者的技术系数矩阵刚好互为转置。所以，当出现了 $m>n$ 的情况时，可以转而讨论其对偶问题。因此，这种假设不失一般性。其次，假设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=m$，即假设 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩的。在线性规划的约束 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 中，每一个等式对应一个约束条件。假设 $\boldsymbol{A}$ 行满秩就是假设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组是线性无关的，也就是假设不会出现多余的约束条件。因此，这种假设也是合理的。

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩总是等于其行向量组的秩，也等于其列向量组的秩，故在上面的两种假设下，$\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量组成的向量组 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 中至少有 m 个列向量是线性无关的。称这 m 个列向量为线性规划约束方程组的一组基。这组基构成约束方程组的一个子矩阵，记为 $\boldsymbol{B}$。显然，这样的基最多有 C_n^m 组。与基对应的决策变量称为基变量。这部分决策变量也构成决策向量 $\boldsymbol{X}$ 的一个部分，记为 $\boldsymbol{X}_B$。$\boldsymbol{A}$ 中除基以外的其他列向量称

为非基，它们构成 $\boldsymbol{A}$ 中除基 $\boldsymbol{B}$ 以外的部分，记为 $\boldsymbol{N}$。相应的变量称为非基变量，这部分决策变量记为 $\boldsymbol{X}_N$。为叙述方便起见，不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 个列向量是线性无关的 (在理论上总是可以通过对决策变量重新编号来得到，但后面将会发现，实际计算中不需要这样做)，则有

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n)=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}),\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m),\quad \boldsymbol{N}=(\boldsymbol{P}_{m+1},\boldsymbol{P}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{P}_n)$$
$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_N=(x_{m+1},\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

3. 基解、基可行解和可行基

根据上面的讨论，此时由线性规划问题的约束方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 得到

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}\Longrightarrow \boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{b}\Longrightarrow \boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N$$

令非基变量 $\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{0}$，则得到 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。两项合在一起得到的 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}},\boldsymbol{0})^{\mathrm{T}}$ 称为线性规划的一个基解。显然，基选取的不一样，基解也不一样。其中正好满足 $\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的基解称为一个基可行解，相应地基 $\boldsymbol{B}$ 称为可行基。若基解中非零分量的个数少于 m 时，称为退化解。

1.1.3　线性规划问题的有关结论

上面一节讨论了线性规划的图解法及解的几种可能性，并介绍了一些相关概念，现在讨论线性规划的有关理论问题。

定义 1.1 (凸集)　设 $\boldsymbol{K}$ 是 n 维欧氏空间的一个点集，若对 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 中的任何一个 λ 均有

$$\lambda\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{X}^{(2)}\in\boldsymbol{K},\qquad \boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)}\in\boldsymbol{K}$$

则称 $\boldsymbol{K}$ 为凸集 (Convex Set)。

从几何上来说，定义中的 $\lambda\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{X}^{(2)}$ 表示了连接 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$ 两个点中的任何一个点，是两点之间的连线段。因此，凸集的“几何形状”是一个中间没有空洞的实心体。若包含了边界，则为闭凸集；反之，则为开凸集。

定义 1.2 (凸组合)　设 $\boldsymbol{X}^{(i)}\in\boldsymbol{R}^n(i=1,2,\cdots,k)$，若存在 $0\leqslant\mu_i\leqslant 1,i=1,2,\cdots,k$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{k}\mu_i=1$ 使得

$$\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{k}\mu_i\boldsymbol{X}^{(i)}$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(k)}$ 的凸线性组合，简称凸组合。

定义 1.3 (顶点或极点) 设 $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{R}^n$ 是一个凸集，$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{K}$，若 $\boldsymbol{X}$ 不能用 $\boldsymbol{K}$ 中另外两个不同的点 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$ 的凸组合表示，即不存在 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)} \in \boldsymbol{K}$ 以及 $0 < \lambda < 1$，使得

$$\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\lambda)\boldsymbol{X}^{(2)}$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 为凸集 $\boldsymbol{K}$ 的顶点或极点。

这个顶点的概念是中学平面几何中顶点概念的推广。比如，四边形包括内部在内是凸集，其 4 个顶点当然满足这个定义，现在还是称为顶点见图 1-5(b)。但图 1-5(a) 的半圆弧上所有的点也满足这个定义，故都是顶点。当然，在线性规划里，我们所遇到的顶点还是类似传统概念的顶点，也就是在线性规划问题里，图 1-5(a) 的情况是不会出现的。

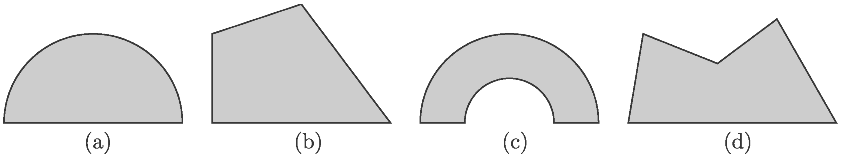

图 1-5 凸集与非凸集

(a) 凸集; (b) 凸集; (c) 非凸集; (d) 非凸集

定理 1.1 线性规划问题 (1-1-6) 的可行域 $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{X} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ 是凸集。

证明 任取 $\boldsymbol{D}$ 中的两个点 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$，则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(i)} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X}^{(i)} \geqslant \boldsymbol{0}, i = 1, 2$$

对于 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，$\lambda \boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\lambda)\boldsymbol{X}^{(2)} \geqslant \boldsymbol{0}$ 是显然的，并且

$$\boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\lambda)\boldsymbol{X}^{(2)}) = \lambda \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\lambda)\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(2)} = \lambda \boldsymbol{b} + (1-\lambda)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

这说明，$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{D}$。由凸集的定义可知，$\boldsymbol{D}$ 是凸集。

定理 1.2 线性规划问题 (1-1-6) 的可行解 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{X} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ 是 $\boldsymbol{D}$ 的顶点等价于 $\boldsymbol{X}$ 是一个基可行解。

证明 首先证明，若 $\boldsymbol{X}$ 是线性规划问题 (1-1-6) 的一个基可行解，则 $\boldsymbol{X}$ 是可行域 $\boldsymbol{D}$ 的一个顶点。根据基可行解的定义，这时一定有一个基 $\boldsymbol{B}$(不妨假设是由 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 列构成) 和非基 $\boldsymbol{N}$，使得 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}]$，且

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_B \\ \boldsymbol{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \geqslant \boldsymbol{0}$$

若该 $\boldsymbol{X}$ 不是可行域的顶点，则它一定能表示成 $\boldsymbol{D}$ 中两个不同于 $\boldsymbol{X}$ 的点 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$ 的凸组合，即存在 $\lambda \in (0,1)$，使得

$$\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\lambda)\boldsymbol{X}^{(2)} \tag{1-1-10}$$

将 $\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)}$ 按照 $\boldsymbol{X}$ 的分块进行分块，表示为

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B^{(1)}\\ \boldsymbol{X}_N^{(1)}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}^{(2)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B^{(2)}\\ \boldsymbol{X}_N^{(2)}\end{pmatrix}$$

将上述分块代入式 (1-1-10)，有 $0=\boldsymbol{X}_N=\lambda\boldsymbol{X}_N^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{X}_N^{(2)}$，由于 $\lambda\in(0,1)$ 以及可行解一定是非负的条件，所以 $\boldsymbol{X}_N^{(1)}=\boldsymbol{X}_N^{(2)}=0$。从而

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B^{(1)}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}^{(2)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B^{(2)}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

又由于 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)}$ 都是可行解，即都满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，故有 $\boldsymbol{BX}_B=\boldsymbol{BX}_B^{(1)}=\boldsymbol{BX}_B^{(2)}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{B}$ 是基，是非奇异矩阵，所以 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{X}_B^{(1)}=\boldsymbol{X}_B^{(2)}$。这与前面的假设矛盾。故 $\boldsymbol{X}$ 一定是 $\boldsymbol{D}$ 的顶点。

其次证明，若线性规划问题 (1-1-6) 的可行解 $\boldsymbol{X}$ 是其可行域的一个顶点，则它是一个基可行解。由于 $\boldsymbol{X}$ 是可行解，所以可以将 $\boldsymbol{X}$ 的分量分成正分量和零两部分，即

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}_B>\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{0}$$

这里，$\boldsymbol{X}_B$ 的正分量个数不一定为 m，设为 p。不妨假设 $\boldsymbol{X}_B$ 所对应的系数列向量是由 $\boldsymbol{A}$ 的前 p 个列向量组成。于是，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块如下：

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})$$

其中，$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{m\cdot p},\boldsymbol{N}\in\boldsymbol{R}^{m\cdot(n-p)}$。

为证明上面的结论，先证明 $\boldsymbol{B}$ 的 p 个列线性无关。假设 $\boldsymbol{B}$ 的列线性相关，则存在一个非零向量 $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^p$，使得 $\boldsymbol{Bw}=0$。由于 $\boldsymbol{BX}_B=\boldsymbol{b}$(由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 即 $\boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{0X}_N=\boldsymbol{b}$ 得到)，所以

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_B\pm\lambda\boldsymbol{w})=\boldsymbol{BX}_B\pm\lambda\boldsymbol{Bw}=\boldsymbol{b}$$

对于 $\lambda\in\boldsymbol{R}$ 都成立。由于 $\boldsymbol{X}_B>0$，存在充分小的 $\lambda>0$ 使得

$$\boldsymbol{X}_B+\lambda\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{X}_B-\lambda\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0}$$

令

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B+\lambda\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}^{(2)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B-\lambda\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$ 都是可行的且有 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{X}^{(2)}$，但 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}^{(1)}+\boldsymbol{X}^{(2)})/2$。这与 $\boldsymbol{X}$ 是可行域的顶点矛盾。从而证明了 $\boldsymbol{B}$ 的列线性无关。既然 $\boldsymbol{B}$ 的列线性无关，根据假

设 $\text{rank}(\boldsymbol{A})=m$，所以必有 $p\leqslant m$。如果 $p=m$，则 $\boldsymbol{B}$ 就是一组基，从而由基可行解的定义可知，$\boldsymbol{X}$ 就是一个基可行解。如果 $p<m$，则一定可以在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量中除去这 p 个列向量后选取到 $m-p$ 个列向量加入到矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中形成一个新的 m 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{B}$，并把原 $\boldsymbol{N}$ 中剩余的列组成新的非基矩阵 $\boldsymbol{N}$，对解向量做同样的组合。显然，这也满足基可行解的定义，故此种情况下的 $\boldsymbol{X}$ 也是基可行解。

下面不加证明地介绍一个顶点表示定理，为最后得到我们需要的定理做准备。

定理 1.3 线性规划问题 (1-1-6) 的可行解 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{D}=\{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\}$ 都可以表示成 $\boldsymbol{D}$ 的顶点的凸组合。即若 $\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(k)}\}$ 为 $\boldsymbol{D}$ 的顶点集合，则总是存在 $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i=1,0\leqslant\lambda_i\leqslant1(i=1,\cdots,k)$，使得

$$\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)}\tag{1-1-11}$$

最后给出本节的主要定理。

定理 1.4 若线性规划问题 (1-1-6) 的可行域有界，则线性规划问题的目标函数一定可以在其可行域的顶点上达到最优。若在不止一个顶点上达到最优，则线性规划问题 (1-1-6) 一定有无穷多个解。

证明 设 $\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(k)}$ 是可行域的顶点，若 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是顶点，但目标函数在 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 处达到最优 $z^*=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(0)}$。根据顶点表示定理，$\boldsymbol{X}^{(0)}$ 可以用 $\boldsymbol{D}$ 的顶点的凸组合表示为

$$\boldsymbol{X}^{(0)}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)},\quad 0\leqslant\lambda_i\leqslant1(i=1,\cdots,k),\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$$

因此

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(0)}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}$$

由于 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}(i=1,2,\cdots,k)$ 共有 k 个，是有限的，故一定有一个 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}$，比如设为 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(m)}(1\leqslant m\leqslant k)$，是所有 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}$ 中的最大者。这就得到

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(0)}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(m)}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(m)}$$

根据假设，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(0)}$ 是最大值，故有 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(0)}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(m)}$。这就是说，线性规划问题 (1-1-6) 在顶点 $\boldsymbol{X}^{(m)}$ 处也达到最优。

若目标函数在多个顶点处达到最优，设在顶点 $\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(t)}$ 处达到最大值，

若 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 是这些顶点的凸组合，即

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)},\quad 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1(i=1,\cdots,t),\sum_{i=1}^{t}\lambda_i=1$$

根据线性规划可行域的性质，$\hat{\boldsymbol{X}}$ 是线性规划问题 (1-1-6) 的可行解，且

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)}=\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}$$

设 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}=m(i=1,2,\cdots,t)$，所以 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}=\sum\limits_{i=1}^{t}\lambda_i m=m$。这就证明了，若线性规划问题在多个顶点处达到最优，则线性规划问题有无穷多个最优解。

最后指出，若可行域无界，则可能无最优解，也可能有最优解，若有也必定在某顶点处得到。

由于顶点与基可行解一一对应，而基可行解与可行基是一一对应的，可行基则不会超过 C_n^m 个，所以这个定理的意义在于，在求解线性规划问题时，不需要在无穷多个可行解中去寻找，只需要在有限多个基可行解中寻找即可。

1.2　单纯形法

单纯形法是由美国数学家丹兹格 (G. B. Dantzig) 于 1947 年首先提出的，是公认的 20 世纪最伟大的算法之一。根据上一节的讨论，如果线性规划问题有最优解，则最优解一定可以在其顶点处得到。而每一个顶点又与基可行解是一一对应的。这样，需要解决 3 个问题：

(1) 首先找出一个基可行解，称为初始基可行解。

(2) 每个基可行解都是潜在的最优解，因此找到一种判别基可行解是否是最优解的方法。

(3) 若经过判别，某个基可行解是最优解，则算法终止；若不是最优解，则还需要找到一种转换的方法，即从一个基可行解转换到另一个基可行解，然后回到第二步。

由于基可行解的数目是有限的 (最多 C_n^m 个)，所以经过有限次的迭代就一定能回答线性规划问题是否有解，并在有解的时候求出该最优解。

1.2.1　单纯形法的基本思路

上面所说的 3 个步骤就是单纯形法的基本思路。下面利用矩阵形式进行比较具体的

讨论。讨论标准形的线性规划问题 (1-1-6)：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\\
&\text{s.t.}\\
&\qquad\left\{\begin{array}{l}
\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\
\boldsymbol{X}\geqslant \mathbf{0}
\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

其中，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\cdot n}\in \boldsymbol{R}^{m\cdot n};\boldsymbol{c}\in \boldsymbol{R}^{n};\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in \boldsymbol{R}^{n};\boldsymbol{b}\in \boldsymbol{R}^{m}$。并假设 $m\leqslant n$ 以及 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=m$。

由于矩阵的秩等于其行秩和列秩，所以在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量中至少有 m 个列向量是线性无关的，不妨设这 m 个列向量位于 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 列，也就是前面所称的基，将这 m 个列向量组成的子矩阵记为 $\boldsymbol{B}$，剩下的列向量 (非基) 记为 $\boldsymbol{N}$，相应的将决策向量 $\boldsymbol{X}$ 和价值系数向量 $\boldsymbol{c}$ 也做同样的划分，这样就有

$$
\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}],\quad \boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{1-2-1}
$$

其中，$\boldsymbol{B}\in \boldsymbol{R}^{m\cdot m}$, 且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$; $\boldsymbol{N}\in \boldsymbol{R}^{m\cdot(n-m)};\boldsymbol{X}_B,\boldsymbol{c}_B\in \boldsymbol{R}^{m};\boldsymbol{X}_N,\boldsymbol{c}_N\in \boldsymbol{R}^{n-m}$。

此时由约束方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，得到 $\boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{b}$，从而

$$
\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N \tag{1-2-2}
$$

令 $\boldsymbol{X}_N=0$，得到 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。此为基解。若此时有 $\boldsymbol{X}_B\geqslant\mathbf{0}$，则为基可行解，在几何上就是线性规划问题的一个顶点，是潜在的最优解。现在考虑目标函数

$$
z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_B+\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\sigma}_N\boldsymbol{X}_N \tag{1-2-3}
$$

由式 (1-2-3) 可以看出，目标函数值由两部分组成，第一部分是与线性规划问题的参数有关的常数；第二部分则与 $\boldsymbol{\sigma}_N$ 和 $\boldsymbol{X}_N$ 有关。由于 $\boldsymbol{X}_N\geqslant 0$，所以当 $\boldsymbol{\sigma_N}\leqslant\mathbf{0}$ 时，若 $\boldsymbol{X}_N\neq\mathbf{0}$，则在求极大值的情况下，式 (1-2-3) 表明目标函数值将会下降。这时若 $\boldsymbol{X}_B\geqslant\mathbf{0}$，就说明 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}},\mathbf{0})^{\mathrm{T}}$ 就是最优解，相应地 $z=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 就是最优目标函数值。但是，$\boldsymbol{\sigma}_N$ 中的某些分量也可能大于零，此时，若令大于零的分量所对应的 $\boldsymbol{X}_N$ 的分量大于零，则目标函数值将会增加。也就是说，此时尚未得到最优解。故 $\boldsymbol{\sigma}_N$ 的分量是否全部小于或等于零就成为判别一个基可行解是否是最优解的标准。称 $\boldsymbol{\sigma}_N$ 为检验数。当 $\boldsymbol{\sigma}_N$ 中的某些分量大于零时，由于检验数就是目标函数中非基变量前面的系数，所以找出其中的最大者，并令相应的非基变量大于零将会使得目标函数值比当前的值要大，这个非基变量就是所谓的换入变量。该变量相应的系数列向量就要加入到基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中去。但由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=m$，此时必须要找出原来基变量中的某一个，将其换出，变成非基变量并将其相应的系数列向量从原来的基矩阵中剔除，这个变量称为换出变量。挑选换出变量的原则是一直保持各变量的非负性。具体方法下面将详细介绍。一旦新的基确定以后就重新计算 $\boldsymbol{\sigma}_N$ 并重复上面的做法。

1.2.2　单纯形法的计算步骤

为了更好地理解单纯形法，下面先从一个具体的例子开始介绍单纯形法的计算步骤。

例 1.7　根据单纯形法的思路求解模型引入例 1.1 中的线性规划的最优解。

解　模型引入例 1.1 中的线性规划为：

$$\begin{aligned}&\max \quad z=6x_1+7x_2\\&\text{s.t.}\\&\qquad\qquad\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 16\\4x_1+\ \ x_2\leqslant 12\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}\end{aligned}$$

首先引入两个松弛变量 $x_3,x_4\geqslant 0$ 将其化为标准形

$$\begin{aligned}&\max \quad z=6x_1+7x_2+0x_3+0x_4\\&\text{s.t.}\\&\qquad\qquad\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3\qquad\ =16\\4x_1+\ \ x_2\qquad +x_4=12\\x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4\end{cases}\end{aligned}$$

其系数矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4)=\begin{pmatrix}2&3&1&0\\4&1&0&1\end{pmatrix}$，容易看到 $\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4$ 是线性无关的，故它们组成问题的一个初始基 ($\boldsymbol{B}$)。$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ 则为非基 ($\boldsymbol{N}$)，如果想写成上面用矩阵进行讨论时的形式，则可以对 x_1,x_2,x_3,x_4 重新编号。但是在讨论具体问题时是没有这个必要的。相应地 x_3,x_4 就是初始基变量，x_1,x_2 就是非基变量。由约束方程组得到

$$\begin{cases}x_3=16-2x_1-3x_2\\x_4=12-4x_1-x_2\end{cases}\tag{1-2-4}$$

令 $x_1=x_2=0$，得到 $x_3=16,x_4=12$，两者合在一起即有 $\boldsymbol{X}=(0,0,16,12)^{\mathrm{T}}$。这就是初始基可行解，是潜在的最优解。将式 (1-2-4) 代入目标函数中得到

$$z=6x_1+7x_2+0x_3+0x_4=6x_1+7x_2\tag{1-2-5}$$

目标函数中非基变量 x_1,x_2 前面的系数就是所谓的检验数，由于两个检验数都是大于零的，这说明如果 x_1,x_2 不等于零 (即大于零)，则目标函数值将会比当前值大。事实上，当前的基可行解意味着不作任何生产，$x_3=16,x_4=12$ 是剩下的资源 (其实这时根本未用)。从几何上来说，该基可行解就是图 1-1 中的原点 (4 个顶点中的一个)。由于 x_2 前面的系数较大，选择 x_2 为换入变量，它将取代初始基变量 x_3,x_4 中的某一个。首先观

察系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中 x_2 所在列的向量，如果其分量全部小于或等于零，则原问题是无界的，终止计算。当然，这里的系数列向量是 $(3,1)^{\mathrm{T}}$。确定 x_2 为换入变量后，还需要在原基变量 x_3,x_4 中确定换出变量。原则是让所有的变量非负，由于 x_1 仍然是非基变量，故在式 (1-2-4) 中令 $x_1=0$，且要求所有变量非负，则有

$$\begin{cases} x_3 = 16 - 3x_2 \geqslant 0 \\ x_4 = 12 - x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-2-6}$$

现在要确定的是哪个基变量变为非基变量。由于非基变量总是为零，所以在让某个原来的基变量变为零时，保持别的基变量非负就是挑选的原则。显然，若 $x_2=\min(16/3,12/1)=16/3$ 时，$x_3=0$ 而 $x_4>0$。这说明应该用 x_2 去取代 x_3。于是在式 (1-2-4) 中将 x_3 与 x_2 的位置互换。这种互换不是简单的交换位置，而是通过高斯消去法得到的。这样才是恒等变换。首先由式 (1-2-4) 中的第一个式子，得到

$$x_2 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3$$

将其代入第二个式子并化简，有

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{16}{3} - \dfrac{2}{3}x_1 - \dfrac{1}{3}x_3 \\ x_4 = \dfrac{20}{3} - \dfrac{10}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}x_3 \end{cases} \tag{1-2-7}$$

现在，新的基变量是 x_2,x_4，非基变量是 x_1,x_3。令非基变量为零，则新的基可行解为 $\boldsymbol{X}=(0,16/3,0,20/3)^{\mathrm{T}}$，它对应着图 1-1 中的 D 点。相应的函数值是 $z=112/3$，这表明生产乙产品 16/3 个单位时，利润为 112/3 元，比前一个方案要优。这个解是否是最优解呢？再将式 (1-2-7) 代入目标函数，有

$$z = 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 6x_1 + 7\times\left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right) = \frac{112}{3} + \frac{4}{3}x_1 - \frac{7}{3}x_3 \tag{1-2-8}$$

可以看到非基变量 x_1 前面的系数是 4/3，说明还不是最优解。此时若让 $x_1>0$，函数值还会增加，即现在确定 x_1 为换入变量，x_3 仍然为非基变量。类似上一步的分析，在式 (1-2-7) 中，令 $x_3=0$，则有

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{16}{3} - \dfrac{2}{3}x_1 \\ x_4 = \dfrac{20}{3} - \dfrac{10}{3}x_1 \end{cases} \tag{1-2-9}$$

若 $x_1=\min[(16/3)/(2/3),(20/3)/(10/3)]=2$ 时，$x_4=0$ 而 $x_2>0$。这说明应该用 x_1 去取代 x_4。于是在式 (1-2-7) 中将 x_4 与 x_1 通过高斯消去法进行位置互换，先从第二个式子得到

$$x_1 = 2 - \frac{3}{10}x_4 + \frac{1}{10}x_3$$

然后代入到第一个式子，有

$$\begin{cases} x_2 = 4 + \dfrac{1}{5}x_4 - \dfrac{2}{5} \\ x_1 = 2 - \dfrac{3}{10}x_4 + \dfrac{1}{10}x_3 \end{cases} \tag{1-2-10}$$

于是，得到了第三个基可行解 $\boldsymbol{X} = (2,4,0,0)^{\mathrm{T}}$。该基可行解实际上就是图 1-1 中的 E 点。通过图解法已经知道了这就是原问题的最优解，但现在还是需要通过计算证实这个结论。实际上，此时目标函数变为

$$z = 6x_1 + 7x_2 = 6\times\left(2 - \frac{3}{10}x_4 + \frac{1}{10}x_3\right) + 7\times\left(4 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}\right) = 40 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{10}{3}x_3 \tag{1-2-11}$$

可以看到，非基变量 x_4, x_3 的系数都小于零。这说明，第三个基可行解 $\boldsymbol{X} = (2,4,0,0)^{\mathrm{T}}$ 就是要求的最优解，最优值为 $z = 40$。这与利用图解法求得的结果是一致的。

通过上述例题不仅可以清楚地看到单纯形法的计算步骤，而且可以看到每次迭代都对应着线性规划问题可行域的一个顶点。在变量个数较多时，上述做法是不可取的。这里只是通过上述例题来理解单纯形法的计算步骤。考虑标准形式的线性规划问题 (1-1-6)，单纯形法的计算步骤为：

(1) 首先确定一个初始基可行解。为了快速地找到一个初始可行基，最简单的情况就是在其系数矩阵中出现一个单位子矩阵。这总是能办到的。对于标准形式的线性规划问题一共有两种情况：① 将原问题划为标准形式后系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中自然出现一个单位子矩阵。这可能是原问题本身所具有的，也可能原问题的所有约束条件都是“$\leqslant$”，这样添加松弛变量变为标准形式后，这些松弛变量在系数矩阵中的系数列向量就组成了一个单位子矩阵。② 将原问题划为标准形式后没有单位子矩阵，这时可以通过人工变量法很容易地得到一个单位子矩阵。关于人工变量法，将在单纯形法的进一步讨论中详细介绍。设这时的线性规划问题为：

$$\begin{aligned} &\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ &\text{s.t.} \\ &\qquad \begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad\;\; + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ \qquad\quad x_m \;\; + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \end{aligned} \tag{1-2-12}$$

$x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为初始基变量，$x_{m+1}, \cdots, x_n$ 为非基变量。令非基变量为零，则有初始基可行解

$$\boldsymbol{X} = (b_1, b_2, \cdots, b_m, 0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

这里虽然假设初始基变量是前 m 个变量，但实际上不需要按照这个顺序。这样叙述只是为了方便起见。若基变量在其他位置，做法是一样的。后面也同样如此。

(2) 计算非基变量的检验数。非基变量的检验数实际上就是非基变量在目标函数中的系数。用矩阵表示的一般计算公式为

$$\boldsymbol{\sigma}_N = \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$$

相关符号及推导见上一节。但是，若线性规划化为了式 (1-2-12) 的形式，则上述检验数为

$$\boldsymbol{\sigma}_N = \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}$$

或用分量形式为

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, j = m+1, \cdots, n$$

也就是第 j 个非基变量的检验数等于其价值系数 c_j 减去基变量价值系数与该非基变量系数列向量的乘积之和。顺便提一下，由于 $\boldsymbol{\sigma}_B = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$，故检验数更一般的表达式可以写为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$$

检验数计算后有如下判别准则：①若所有非基变量检验数都小于或等于零，则原问题得到最优解，且当非基变量的检验数至少有一个零时，原问题有无穷多组最优解，但其目标函数值相等；②非基变量的检验数至少有一个大于零，且某个大于零的检验数所对应的非基变量的系数列向量中没有正数，则原问题具有无界解 (或称无最优解)。

值得提出的是，这些讨论针对的是求最大值的标准形线性规划。如果是求最小值的线性规划问题，要么将其化为求最大值的标准形，要么将上面的准则中检验数小于或等于零改为大于或等于零。

(3) 基变换。当初始基可行解不是最优解也不能判断为无界时，需要找到一个新的基可行解。做法是先从非基变量中选一个换入变量，由于这时非基变量的检验数 σ_j 有至少一个大于零，且该检验数就是该非基变量在目标函数中的系数，所以往往选择检验数中大于零的最大值所对应的非基变量为换入变量，即若 $\max\limits_{j} \sigma_j = \sigma_k$，则选择 x_k 为换入变量。其目的显然是直观上这样做会尽快地增加目标函数值，但也可任选检验数大于零所对应的非基变量为换入变量或按照检验数大于零的最小下标来选。接下来，从原基变量中换出一个变量变为非基变量，该变量称为换出变量。选择换出变量的原则是保持所有变量非负，同时让该换出变量为零。具体可由所谓的 θ 规则确定。计算

$$\theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

即 x_k 的系数列向量中的正数 a_{ik} 为分母，相应的 b_i 为分子，两者商的最小值所对应的基变量 x_l 为换出变量。

(4) 迭代 (旋转运算)。现在选择了非基变量 x_k 取代原基变量 x_l，这时就需要通过矩阵的初等行变换以 a_{lk} 为旋转主元将 x_k 对应的系数列向量化为原来 x_l 的系数列向量的形式，即

$$\boldsymbol{P}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

到此为止，得到了一个新的基可行解，现在就要回到步骤 (2) 去重新计算新的检验数并继续迭代下去。

1.2.3　单纯形表

为了便于操作上面介绍的单纯形法，在手工计算的情况下，可以利用一种单纯形表进行。对于形如式 (1-2-12) 的线性规划问题，其单纯形表如表 1-2 所示。表的前两行称为表头，是线性规划问题的价值系数和所有变量列表。第二列是基变量列表，第一列则是相应的价值系数。在迭代过程中，基变量发生改变，则相应的价值系数从第一行中找到并重新填上。第三列至倒数第二列为单纯形表的主体，实际上就是约束方程组的增广矩阵。最后一列为 θ 列，用于挑选换出变量。最后一行为检验数行。每个非基变量的检验数等于该非基变量的价值系数减去基变量的价值系数与该非基变量的系数列向量对应元素乘积之和。基变量 $\boldsymbol{X}_B$ 的值等于 $\boldsymbol{b}$ 列 (就是前面矩阵描述时的 $\boldsymbol{X}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$)，不在 $\boldsymbol{X}_B$ 这一列的其他变量都是非基变量，非基变量的值都是 0。一个线性规划问题只要得到了初始单纯形表，那么所有的计算都可在单纯形表上进行了。

表 1-2　标准形式的线性规划问题 (1-2-12) 的初始单纯形表

c_j			c_1	c_2	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	θ
$\boldsymbol{c}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	0	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1n}	
c_2	x_2	b_2	0	1	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	a_{2n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
c_m	x_m	b_m	0	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mn}	
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			0	0	$\cdots$	0	σ_{m+1}	$\cdots$	σ_n	

例 1.8 用单纯形表计算模型引入 1.1 中的线性规划。

解 首先将模型引入 1.1 中的线性规划化为标准形式，见例 1.7。在例 1.7 中已经通过单纯形法的逐一分析得到了其最优解，现在只是通过单纯形表再次求解以便于了解单纯形表的构造及迭代运算。其初始单纯形表及后继迭代过程见表 1-3。

表 1-3 模型引入 1.1 中问题的初始单纯形表及其迭代

	c_j		6	7	0	0	θ
$\boldsymbol{c}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	16	2	[3]	1	0	16/3
0	x_4	12	4	1	0	1	12
	$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$		6	7	0	0	
7	x_2	16/3	2/3	1	1/3	0	8
0	x_4	20/3	[10/3]	0	−1/3	1	2
	$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$		6	7	0	0	
7	x_2	4	0	1	2/5	−1/5	
6	x_1	2	1	0	−1/10	3/10	
	$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$		0	0	−11/5	−2/5	

注：带“[ ]”的数字表示旋转主元。

从初始单纯形表中可以看到 $\sigma_1 = 6, \sigma_2 = 7$，故选择 x_2 为换入变量。x_2 的系数列向量的正数作分母，$\boldsymbol{b}$ 相应的值作分子，计算比值并填写到 θ 栏。其中最小者即第一行所对应的基变量 x_3 为换出变量，第一行和第二列交叉处的元素 3 为旋转主元，用“[ ]”标记。于是，在第二张单纯形表中，基变量变为 x_2, x_4，然后 $\boldsymbol{c}_B$ 一栏相应地改变。接下来，将旋转主元变为 1，这只需要在单纯形表的主体部分的第一行所有元素除以 3 即可，然后将第二列其他元素变为 0。计算新的检验数并继续进行判断和迭代。在最终单纯形表中，非基变量 x_3, x_4 的检验数都为负数，故已得到最优解。$x_1^* = 2, x_2^* = 4$，最优值为 $z^* = 40$。最后需要说明的是，这个题目迭代了 3 次。由于表头部分在迭代过程中不会改变，所以在空间足够的情况下，可以在初始单纯形表的下方继续添加进行迭代。

例 1.9 利用单纯形法求解

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 - 2x_2 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases}
x_1 + \ \ x_2 \leqslant 5 \\
-x_1 + \ \ x_2 \leqslant 6 \\
6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\
x_1, x_2 \geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

解　首先将其化为标准形。对于目标函数求极小，可以化为求 $\max(-z)$，也可以不变。如果不变，则在单纯形表中除了判断准则与求极大时相反以外，其他的一概不变。本例采用求极小的方式。引入 3 个松弛变量 x_3,x_4,x_5，则其标准形为：

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z=2x_1-2x_2\\
&\text{s.t.}\\
&\qquad\left\{\begin{array}{l}
x_1+x_2+x_3=5\\
-x_1+x_2+x_4=6\\
6x_1+2x_2+x_5=21\\
x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4,5
\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

显然，x_3,x_4,x_5 是初始基变量。于是可得到其初始单纯形表及其迭代，见表 1-4。

表 1-4　例 1.9 的初始单纯形表及其迭代

c_j			2	-2	0	0	0	θ
$\boldsymbol{c}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	5	1	[1]	1	0	0	5
0	x_4	6	-1	1	0	1	0	6
0	x_5	21	6	2	0	0	1	21/2
$\sigma_j=c_j-\sum\limits_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			2	-2	0	0	0	
-2	x_2	5	1	1	1	0	0	
0	x_4	1	-2	0	-1	1	0	
0	x_5	11	4	0	-2	0	1	
$\sigma_j=c_j-\sum\limits_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			4	0	2	0	0	

在最终单纯形表中可以看到，非基变量检验数 $\sigma_1=4>0,\sigma_3=2>0$，满足求极小时的判别准则，故得到最优解 $x_1^*=0,x_2^*=5,x_3^*=0,x_4^*=1,x_5^*=11$，最优目标函数值为 $z^*=-10$。

1.2.4　利用 MATLAB 实现单纯形法

显然，当线性规划问题的变量数较多时，利用单纯形表进行计算不仅烦琐，而且容易出错。根据单纯形法的计算步骤，编者编写了一个 MATLAB 程序 Ssimplex.m。该程序利用 MATLAB 实现了如上所述的单纯形表的计算过程，程序里有详细的注释，供学习之用。程序代码如下：

☞ **MATLAB 程序 1.1**　标准单纯形法的 MATLAB 程序

```
% Ssimplex.m利用单纯形法求解如下简单的标准线性规划问题
% max c'x
```

```
% s.t.
% Ax=b
% x>=0
% 这里 A\in R^{m\times n},c,x'\in R^n,b\in R^m,b\geq 0
% 且矩阵A中有一个单位子矩阵，不需要引入人工变量
% By Gongnong Li 2013
function [xstar,fxstar,iter]=Ssimplex(A,b,c)
[m,n]=size(A);E=eye(m);IB=zeros(1,m);k=0;
for i=1:m
    for j=1:n
       if A(:,j)==E(:,i)
           IB(i)=j;SA(i)=j; %IB记录基变量下标，SA记录松弛变量下标
       elseif A(:,j)==(-E(:,i))
           SA(i)=j; %SA也记录剩余变量(松弛变量)下标
       end
    end
end
A0=[b,A];N=1:n; N(IB)=[]; IN=N; x(IB)=A0(:,1)';
x(IN)=zeros(1,length(IN)); cB=c(IB);
%IN为非基变量下标
sigma=c'-cB'*A0(:,2:n+1); t=length(find(sigma>0));
%计算原问题的检验数并假设检验数中有t个大于零的检验数
while t~=0
    [sigmaJ,jj]=max(sigma);
%这里的jj是sigma中值最大者所在列，即A0中的第jj+1列(A0中第一列为b)，该列对
应的非基变量x(jj)为换入变量，而sigmaJ则是相应的检验数
tt=find(A0(:,jj+1)>0);kk=length(tt);
% 检查增广系数矩阵A0中第jj+1列元素是否有大于零的元素
        if kk==0
           disp('原问题为无界解')
        else
            theta=zeros(1,kk);
            for i=1:kk
```

```
                theta(i)=A0(tt(i),1)/A0(tt(i),jj+1);
            end
            [thetaI,ii]=min(theta); Temp=tt(ii);
%比值最小的theta值，选择换出变量。这时A0(Temp,jj+1)为旋转主元
            for i=1:m
                if i~=Temp
                   A0(i,:)=A0(i,:)-(A0(Temp,:)/A0(Temp,jj+1))*A0(i,jj+1);
                else
                   A0(Temp,:)=A0(Temp,:)/A0(Temp,jj+1);
                end
            end
            TT=IB(Temp);IB(Temp)=jj;IN(jj)=TT; x(IB)=A0(:,1)';
            N=1:n;N(IB)=[];IN=N; x(IN)=zeros(1,length(IN));cB=c(IB);
%新的基可行解及其价值系数
            sigma=c'-cB'*A0(:,2:n+1); t=length(find(sigma>0));
%再次计算检验数并假设检验数中有t个大于零的检验数
       end
       k=k+1;
end
IB
IN
B=A(:,IB);
InverseOfB=inv(B)
%这是基矩阵B的逆矩阵，用于灵敏度分析。若不做灵敏度分析，则将其注释掉
xstar=x;fxstar=x(IB)*c(IB);iter=k;
```

例 1.10　利用 MATLAB 程序 Ssimplex.m 求解如下线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 + 2x_2 + x_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases}
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leqslant 15 \\
(1/3)x_1 + x_2 + 5x_3 \leqslant 20 \\
x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

解　本程序求解的是极大值情形下的标准形线性规划问题，故先将其化为如下标准形式：

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ (1/3)x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

在 MATLAB 提示符下输入相应的矩阵 $\boldsymbol{A}$，价值系数向量 $\boldsymbol{c}$ 和资源向量 $\boldsymbol{b}$(均按照列向量输入) 即可调用该程序计算。

```
>> A=[2 -3 2 1 0;1/3 1 5 0 1];
>> b=[15 20]';
>> c=[1 2 1 0 0]';
>> [xstar,fxstar,iter]=Ssimplex(A,b,c)
IB =
      1            2
IN =
      3            4            5
InverseOfB =
     1/3           1
    -1/9          2/3
xstar =
     25          35/3            0            0            0
fxstar =
   145/3
iter =
      2
```

计算结果表明，该题经过两次迭代得到的最优解为 $x_1^* = 25, x_2^* = 35/3, x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0$，最优值为 $z^* = 145/3$。

1.3 单纯形法的进一步讨论

上面介绍的单纯形法只适用于线性规划的标准形式 (1-2-12)，这是一种特殊的标准形式。特殊之处在于其系数矩阵中有一个单位子矩阵。显然，更一般的线性规划的标准形式不一定在其系数矩阵中有这样的单位子矩阵。这时就不能用单纯形表进行求解。但这个问题比较容易解决。为了得到这样的单位子矩阵，可以引入人工变量来人为地“创造”单位子矩阵。这种方法称为人工变量法。值得注意的是，人工变量是为了得到单位子矩阵而人为添加到约束条件中去的。如果线性规划问题的系数矩阵本身含有一个单位子

矩阵，则相应的变量有其自身的含义。如果所有约束条件都是“$\leqslant$”，那么在化为标准形式时需要添加松弛变量，这样也会得到单位子矩阵。这时，相应的松弛变量的意思是该种资源没有用完的部分。而人工变量则没有任何实际含义，纯粹是为了得到单位子矩阵而添加的。人工变量法有两种，分别是大 M 法和两阶段法，下面逐一介绍。

1.3.1　大 M 法

考虑线性规划问题的标准形式 (1-1-4)，假设其系数矩阵不含有单位子矩阵，则考虑下述问题

$$\begin{aligned}
&\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n - M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}\\
&\text{s.t.}\\
&\qquad \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \qquad x_{n+2} = b_2\\
\cdots\cdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + \qquad\qquad x_{n+m} = b_m\\
x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n+m
\end{cases}
\end{aligned} \tag{1-3-1}$$

其中，$x_{n+i} \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是为了得到单位子矩阵而在原系数矩阵上面添加的 m 个人工变量；M 表示任意大的正数，且在计算过程中为了避免计算检验数判断时出错，不能用具体的某个“大的”正数代替。

对于式 (1-3-1) 来说，$x_{n+i}(i = 1, 2, \cdots, m)$ 显然是初始基变量，这样就可以利用单纯形表进行计算。当其无解或有解但最优解中至少还有一个人工变量时，说明原问题无解。当式 (1-3-1) 有解且最优解中不含有人工变量时，其最优解就是原线性规划的最优解。

使用这种方法需要注意 3 点：①若原问题化为标准形式后系数矩阵中某一列是$(0, \cdots, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，即是单位子矩阵的第 i 列，则在式 (1-3-1) 中就不需要添加第 i 个人工变量；②求解式 (1-3-1) 的过程中某一次迭代将某人工变量换出后，由于其检验数不可能再为正数，则在下一次迭代时该人工变量所在列不再参与运算，这样做可以减少一些计算量；③若目标函数是求最小，则可将目标函数改为求其相反函数的最大，也可在原目标函数后面加上 M 与所有人工变量的乘积从而继续求最小。

例 1.11　利用大 M 法求解线性规划问题：

$$\begin{aligned}
&\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 - x_3\\
&\text{s.t.}\\
&\qquad \begin{cases}
-4x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 4\\
x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 10\\
-2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1\\
x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}$$

解 首先引入剩余变量 $x_4 \geqslant 0$ 和松弛变量 $x_5 \geqslant 0$ 并将第三个约束条件右端项化为正数，得到其标准形

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases}
-4x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 - x_4 \qquad = 4 \\
\quad x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 + \qquad x_5 = 10 \\
\ \ 2x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 \qquad\qquad = 1 \\
x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5
\end{cases}
\end{aligned}
$$

容易看出，系数矩阵中不含有单位子矩阵。但松弛变量 x_5 的系数列向量是单位子矩阵的第三列。所以这里只需要添加 $x_6 \geqslant 0$ 和 $x_7 \geqslant 0$ 两个人工变量。于是有下面的人工变量问题：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases}
-4x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 - x_4 + \qquad x_6 \qquad = 4 \\
\quad x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 + \qquad x_5 \qquad\qquad = 10 \\
\ \ 2x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 + \qquad\qquad\qquad x_7 = 1 \\
x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, 7
\end{cases}
\end{aligned}
$$

该人工变量问题的初始单纯形表见表 1-5。由于大 M 表示任意大的正数，所以检验数中如果有大 M，则其正负由大 M 前面的符号决定。同样含有大 M，则认为大 M 前面的系数大者，检验数也大。故这里认为 σ_3 是最大的正数。因此 x_3 为换入变量。与前面的做法一样，根据 θ 规则，x_7 应该被换出。继续迭代下去 (见表 1-6)。

表 1-5 人工变量问题的初始单纯形表

c_j			3	2	-1	0	0	$-M$	$-M$	θ
$\boldsymbol{c}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
$-M$	x_6	4	-4	3	1	-1	0	1	0	4
0	x_5	10	1	-1	2	0	1	0	0	5
$-M$	x_7	1	2	-2	[1]	0	0	0	1	1
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			$3-2M$	$2+M$	$-1+2M$	$-M$	0	0	0	

在最终单纯形表中，非基变量的检验数小于零，故得到了人工变量问题的最优解，且人工变量此时全部是非基变量，故其最优解就是原问题的最优解。$x_1^* = 31/3, x_2^* = 13, x_3^* = 19/3$，最优值为 $z^* = 3 \times (31/3) + 2 \times 13 - (19/3) = 50.67$。

表 1-6　例 1.11 的后继迭代过程

c_j			3	2	-1	0	0	$-M$	$-M$	θ
$\boldsymbol{c}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
$-M$	x_6	3	-6	[5]	0	-1	0	1		3/5
0	x_5	8	-3	3	0	0	1	0		8/3
-1	x_3	1	2	-2	1	0	0	0		
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			$5-6M$	$5M$	0	$-M$	0	0		
2	x_2	3/5	$-6/5$	1	0	$-1/5$	0			
0	x_5	31/5	[3/5]	0	0	3/5	1			31/3
-1	x_3	11/5	$-2/5$	0	1	$-2/5$	0			
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			5	0	0	0	0			
2	x_2	13	0	1	0	1	2			
3	x_1	31/3	1	0	0	1	5/3			
-1	x_3	19/3	0	0	1	0	2/3			
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			0	0	0	-5	$-25/3$			

例 1.12　利用大 M 法求解下述线性规划问题：

$$\min \quad z=5x_1-8x_2$$

$$\text{s.t.}$$

$$\begin{cases}3x_1+x_2\leqslant 6\\ x_1-2x_2\geqslant 4\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解　首先引入松弛变量 $x_3\geqslant 0$ 和剩余变量 $x_4\geqslant 0$，将其化为标准形：

$$\min \quad z=5x_1-8x_2$$

$$\text{s.t.}$$

$$\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=6\\ x_1-2x_2-x_4=4\\ x_i,x\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4\end{cases}$$

可以看出，这里需要一个人工变量 x_5，加入人工变量后的问题为：

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 5x_1 - 8x_2 + Mx_5 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad\quad = 6 \\ \ \ x_1 - 2x_2 - \quad x_4 + x_5 = 4 \\ x_i, x \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

该人工变量问题的初始单纯形表及其迭代过程见表 1-7。在最后的单纯形表中，非基变量的检验数都大于零，所以在求极小的情况下已经得到最优解。但是，最优解中含有人工变量 x_5，这说明原问题无解。

表 1-7　例 1.12 的初始单纯形表及其迭代

c_j			5	-8	0	0	M	θ
$\boldsymbol{c}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	6	[3]	1	1	0	0	2
M	x_5	4	1	-2	0	-1	1	4
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			$5-M$	$-8+2M$	0	M	0	
5	x_1	2	1	$1/3$	$1/3$	0	0	
M	x_5	2	0	$-7/3$	$-1/3$	-1	1	
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			0	$-29/3+(7/3)M$	$-5/3+(1/3)M$	M	0	

实际上，由第一个约束条件与非负条件形成的区域 D_1 和第二个约束条件与非负约束形成的区域 D_2 没有任何交点，即原问题没有可行解，当然是无解的，见图 1-6。

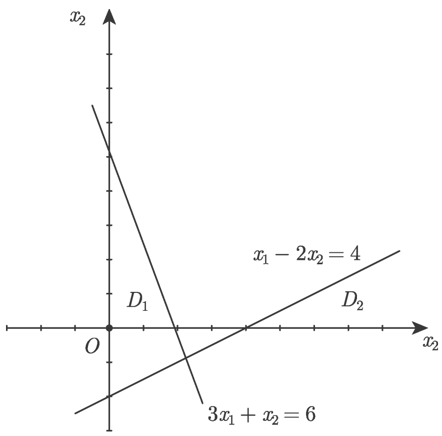

图 1-6　例 1.12 的图解法

1.3.2　两阶段法

仍然考虑线性规划问题的标准形式 (1-1-4)。假设其系数矩阵不含有单位子矩阵，第一阶段是构造一个目标函数只含有人工变量的辅助问题：

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z=\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1} & =b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+ \quad x_{n+2} & =b_2 \\
\cdots\cdots & \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+ \quad x_{n+m} & =b_m \\
x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n+m &
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-3-2}
$$

显然，该辅助问题可以利用单纯形表求解。若式 (1-3-2) 无最优解或虽有最优解但目标函数值不为零，则表明原问题无最优解。若式 (1-3-2) 有最优解且其目标函数值为零，则得到了原问题的一个初始基可行解，这时，转为第二阶段求解。此时，在第一阶段的最终单纯形表中，将其表头换为原问题的表头并重新计算检验数。表的主体 (当然去掉人工变量) 不变，然后按照单纯形法的要求进行下去。实际上，第一阶段是以人工变量为媒介，通过线性变换在原线性规划问题的系数矩阵中找到一个单位子矩阵。这样，第二阶段就回到了原来单纯形表的要求上。所以，总是可以通过两阶段法回答原问题。在大 M 法中讲过添加人工变量时需要注意的几点，在这里仍然是适用的。

大 M 法的优点在于一次性地解决原问题，缺点是无法利用计算机求解。这是因为大 M 不能用具体的正数代替；否则，作为一个程序，大 M 取得太大，将会出现数据溢出，取得不够大又有可能误将非负或非正的检验数判断为相反。两阶段法的优缺点与大 M 法相反。

例 1.13　利用两阶段法求解例 1.11。

解　该线性规划问题及其标准形参见例 1.11。针对其标准形，需要两个人工变量，够造辅助问题：

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z=x_6+x_7 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases}
-4x_1+3x_2+x_3-x_4+x_6=4 \\
x_1-x_2+2x_3+x_5=10 \\
2x_1-2x_2+x_3+x_7=1 \\
x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,7
\end{cases}
\end{aligned}
$$

利用单纯形表求解该辅助问题，见表 1-8。

表 1-8 第一阶段辅助问题的单纯形表

c_j			0	0	0	0	0	1	1	θ
$\boldsymbol{c}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	4	−4	3	1	−1	0	1	0	4
0	x_5	10	1	−1	2	0	1	0	0	5
1	x_7	1	2	−2	[1]	0	0	0	1	1
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			2	−1	−2	1	0	0	0	
1	x_6	3	−6	[5]	0	−1	0	1		3/5
0	x_5	8	−3	3	0	0	1	0		8/3
0	x_3	1	2	−2	1	0	0	0		
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			6	−5	0	1	0	0		
0	x_2	3/5	−6/5	1	0	−1/5	0			
0	x_5	31/5	3/5	0	0	3/5	1			
0	x_3	11/5	−2/5	0	1	−2/5	0			
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			0	0	0	0	0			

在上面最后的单纯形表中可以看到，得到了辅助问题的最优解，且其最优目标函数值为零。这说明得到了原问题的一个初始基可行解 $\boldsymbol{X} = (0, 3/5, 11/5, 0, 31/5)^{\mathrm{T}}$。按照上面所说，将最终单纯形表的两个人工变量去掉并将表头换为原问题的表头，重新计算检验数，见表 1-9。

表 1-9 第二阶段问题 (原问题) 的单纯形表

c_j			3	2	−1	0	0	θ
$\boldsymbol{c}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_2	3/5	−6/5	1	0	−1/5	0	
0	x_5	31/5	3/5	0	0	3/5	1	31/3
−1	x_3	11/5	−2/5	0	1	−2/5	0	
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			5	0	0	0	0	
2	x_2	13	0	1	0	1	2	
3	x_1	31/3	1	0	0	1	5/3	
−1	x_3	19/3	0	0	1	0	2/3	
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			0	0	0	−5	−25/3	

在最终单纯形表中，非基变量的检验数全部小于零。对于求极大值的原问题来说，已经求得最优解：$x_1^* = 31/3, x_2^* = 13, x_3^* = 19/3, x_4^* = x_5^* = 0$，最优值为 $z^* = 50.67$。

1.3.3　进一步讨论 MATLAB 实现

在讨论了人工变量法以后，对于任何一个线性规划问题都可以利用单纯形表进行求解了。但是手工计算是非常烦琐的。编者针对一般的线性规划问题编写了 MATLAB 程序 MMSimplex.m，称为一般单纯形法。该程序不仅能求得最优解及最优值，而且可以求出最优基变量及最终单纯形表。程序里有详细的注释供学习之用。代码如下：

☞ **MATLAB 程序 1.2**　一般单纯形法的 MATLAB 程序

```
% 单纯形法求解线性规划问题
% max c'x
% s.t.
% Ax=b
% x>=0
% 这里 A\in R^{m\times n},c,x'\in R^n,b\in R^m,b\geq 0
% 在需要添加人工变量时将采用两阶段法求解上述问题
% 输出项:
% xstar为最优解;fxstar为最优值; iter为迭代次数; A0为最终单纯形表
% IB为最优基变量下标;IN为非基变量下标; SA为松弛变量下标
% xSA为松弛量取值;sigma为最终检验数(可不显示)
% A0为最终单纯性表(第一列为b);
% InverseOfB=inv(B)为基矩阵B的逆矩阵(用于灵敏度分析)。输出项按需要选择
% By Gongnong Li 2013
function[xstar,fxstar,iter,A0,IB,IN,SA,xSA,InverseOfB,exitflag]=
   MMSimplex(A,b,c)
A0=A;[m,n]=size(A0);E=eye(m);IB=zeros(1,m);SA1=zeros(1,n);
IR1=zeros(1,m);IR=1:m;k=0;
%检查原问题(标准形式)系数矩阵中是否含有E(:,i)
tic;
for i=1:m
     for j=1:n
        if A0(:,j)==E(:,i)
            IB(i)=j;IR1(i)=i;SA1(i)=j;
        elseif A(:,j)==(-E(:,i))
            SA1(i)=j;
        end
```

```
    end
end
s1=find(SA1~=0);
if length(s1)~=0
  for i=1:length(s1)
     SA(i)=SA1(s1(i));
  end
else
    SA=[];
end
IR=find(IR~=IR1);s=find(IR~=0);
for p=1:length(s)
  A0(:,n+p)=E(:,IR(p)); IB(IR(p))=n+p; IR(p)=n+p;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% IB记录了原问题系数矩阵有多少个E(:,i)，即m-length(s)个,对应的x(i)为初始
% 基变量。IR则记录了原问题系数矩阵缺少的E(:,i)下标，即i，这些是需要通过人
% 工变量补齐的共length(s)个人工变量，这些变量也是初始基变量。SA记录松弛
% 变量(剩余变量)下标IB记录了基变量的下标，而IR记录了人工变量的下标(共有
% length(s)个人工变量)。退出时矩阵A0具有一个单位子矩阵，可能含有人工变
% 量。若有人工变量，则下面先求第一阶段问题，将会得到原问题的一个初始基
% 可行解
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A0=[b,A0];flag=0;
while (length(IR)~=0)&(flag==0) %这表明有人工变量才需要求解第一阶段问题
c0=zeros(n+length(s),1); c0(IR)=-ones(length(s),1); %第一阶段的相关矩阵
   和向量
N=1:n+length(s); N(IB)=[]; IN=N; IN(find(IN==0))=[];
%IB记录基可行解的下标，IN记录非基可行解的下标
x(IN)=zeros[1,length(IN)]; x(IB)=A0(:,1)'; cB=c0(IB);
%第一阶段的初始基可行解及其价值系数
sigma=c0'-cB'*A0(:,2:n+length(s)+1); %检验数，是一个行向量
t=length(find(sigma>0)); %假设检验数中有t个大于零的检验数
```

```
    while t~=0
        [sigmaJ,jj]=max(sigma);
%这里的jj是sigma中绝对值最大者所在列, 即A0中的第jj+1列(A0中第一列为b),
  对应的非基
%变量x(jj)为换入变量, 而sigmaJ则是相应的检验数
        tt=find(A0(:,jj+1)>0); kk=length(tt);
%检查增广系数矩阵A0中第jj+1列元素是否有大于零的元素
        if kk==0
           disp('原问题为无界解'); %即A0的第jj+1列元素全部小于或等于零
           xstar=[];fxstar=[];A0=[];IB=[];iter=k;
           flag=1;
        else
           theta=zeros(1,kk);
           for i=1:kk
               theta(i)=A0(tt(i),1)/A0(tt(i),jj+1);
           end
           [thetaI,ii]=min(theta); Temp=tt(ii);
%比值最小的theta值, 选换出变量, Temp为换出变量下标。这时A0(Temp,jj+1)为旋
   转主元
           for i=1:m
               if i~=Temp
                  A0(i,:)=A0(i,:)-(A0(Temp,:)/A0(Temp,jj+1))*A0(i,jj+1);
               else
                  A0(Temp,:)=A0(Temp,:)/A0(Temp,jj+1);
               end
           end
%以上为旋转运算
          TT=IB(Temp); IB(Temp)=jj;
           for i=1:length(IR)
               if IR(i)==TT
                   IR(i)=0;
               end
           end
           d=find(IR==0);IR(d)=[]; %这里记录的是人工变量的变化
```

```
        IN(jj)=TT; x(IB)=A0(:,1)'; IN(find(IN==0))=[];
        x(IN)=zeros(1,length(IN)); cB=c0(IB); %新的基可行解及价值系数
        sigma=c0'-cB'*A0(:,2:n+length(s)+1); t=length(find(sigma>0));
%再次计算检验数并假设检验数中有t个大于零的检验数
      end
        k=k+1;
   end
  if sum(x(IR))~=0
   disp('原问题无解');%此时没有检验数小于零，但第一阶段有最优解，从而原问
        题无解
   xstar=[];fxstar=[];A0=[];IB=[];iter=k;
    flag=2;exitflag=flag;
   else
    x=x(1:n);
  end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%第一阶段问题求解完毕，得到原问题的一个基可行解
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if (flag==1)|(flag==2)
    return
  else
IB;N=1:n; N(IB)=[]; IN=N; IN(find(IN==0))=[];x(IN)=zeros(1,length(IN));
cB=c(IB); A0=A0(:,1:n+1); %回到原问题的有关矩阵和向量
sigma=c'-cB'*A0(:,2:n+1); t=length(find(sigma>0));
%计算原问题的检验数并假设检验数中有t个大于零的检验数
while  (t~=0)&(flag==0)
    [sigmaJ,jj]=max(sigma);
%jj是sigma中绝对值最大者所在列，即A0中的第jj+1列(A0中第一列为b)，该列对应
%的非基变量x(jj)为换入变量，而sigmaJ则是相应的检验数
tt=find(A0(:,jj+1)>0);kk=length(tt);
%检查增广系数矩阵A0中第j+1列元素是否有大于零的元素
        if kk==0
```

```
            disp('原问题为无界解');
            xstar=[];fxstar=[];A0=[];IB=[];iter=k;
            flag=1;
         else
             theta=zeros(1,kk);
             for i=1:kk
                 theta(i)=A0(tt(i),1)/A0(tt(i),jj+1);
             end
             [thetaI,ii]=min(theta); Temp=tt(ii);
%比值最小的theta值，选择换出变量。这时A0(Temp,jj+1)为旋转主元
             for i=1:m
                 if i~=Temp
                    A0(i,:)=A0(i,:)-(A0(Temp,:)/A0(Temp,jj+1))*A0(i,jj+1);
                 else
                    A0(Temp,:)=A0(Temp,:)/A0(Temp,jj+1);
                 end
             end
    TT=IB(Temp);IB(Temp)=jj;IN(jj)=TT; x(IB)=A0(:,1)';
    N=1:n;N(IB)=[];IN=N; IN(find(IN==0))=[];x(IN)=zeros(1,length(IN));
      cB=c(IB);
%新的基可行解及其价值系数
         sigma=c'-cB'*A0(:,2:n+1);
         t=length(find(sigma>0)); %再次计算检验数并设检验数中有t个大于零
                                   的数
       end
       k=k+1;
end
end
if flag==1
   xstar=[];fxstar=[];A0=[],IB=[];iter=k;
   disp('原问题为无界解');exitflag=flag;
elseif flag==2
   xstar=[];fxstar=[];A0=[];IB=[];iter=k;
   disp('原问题无解');exitflag=flag;
```

```
else
   xstar=zeros(1,n);xstar(IB)=A0(:,1)';fxstar=xstar(IB)*c(IB);iter=k;
   B=A(:,IB);InverseOfB=inv(B);xSA=x(SA);
 exitflag=flag;
end
toc;
```

以上程序在约束方程组系数矩阵不是行满秩矩阵时可能失效。另外，MATLAB 自身带有一个优化工具箱。求解线性规划问题的程序名为 linprog.m。下面简要叙述如何利用该程序求解线性规划问题。

```
>> help linprog
 LINPROG Linear programming.
    X = LINPROG(f,A,b) attempts to solve the linear programming problem:
             min f'*x    subject to:   A*x <= b
              x
    X = LINPROG(f,A,b,Aeq,beq) solves the problem above while
        additionally
    satisfying the equality constraints Aeq*x = beq.

    X = LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB) defines a set of lower and upper
    bounds on the design variables, X, so that the solution is in
    the range LB <= X <= UB. Use empty matrices for LB and UB
    if no bounds exist. Set LB(i) = -Inf if X(i) is unbounded below;
    set UB(i) = Inf if X(i) is unbounded above.
    X = LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X0) sets the starting point to X0.
    This
    option is only available with the active-set algorithm. The default
    interior point algorithm will ignore any non-empty starting point.
    ......
```

通过这个“帮助”可以看出，`linprog` 函数求解的线性规划问题具有如下几个特点：

(1) 目标函数求极小，若是求极大，则需求其相反函数。

(2) 命令中出现的向量都按列向量输入，其中 $\boldsymbol{f}$ 即为价值系数向量。该函数允许线性规划问题既有不等式约束也有等式约束，不需要将不等式化为等式。但等式约束指的是“$\leqslant$”。如果是“$\geqslant$”，则要在不等式两边乘以“-1”将其化为“$\leqslant$”。该函数还允许决策向量有下界向量 LB 和上界向量 UB。

(3) 如果线性规划问题只有等式约束，则可令 `A=[],b=[]`。该函数还允许从某一个初

始点 X_0 开始求解，当然这主要是针对所谓大规模问题而言的。同时，还可通过适当的选项来决定采用何种算法，是否打开大规模问题的算法，等等。

(4) 输出有多种选项。比如选择 `[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]=linprog(f,A,b)` 时就意味着可得到最优解 $\boldsymbol{X}$，最优目标函数值 `FVAL`，计算结束时退出标记 `EXITFLAG`，该标记取“1”表示用 `linprog` 函数求得的点列收敛到最优解 $\boldsymbol{X}$，取“0”则表示迭代到预先设定的最大迭代次数后终止，此时的解不一定是最优解，取“-2”则表示原问题无可行解，取“-3”则表示原问题为无界解，等等。而 `OUTPUT` 里面的信息则有迭代次数，采用的算法等。

例 1.14　利用程序 MMSimplex.m 计算例 1.11。

解　本程序求解的是标准形式的线性规划问题。只需将原线性规划问题化为标准形式即可调用该程序求解，不需添加人工变量 (该程序在需要添加的时候会自动添加)。该问题的标准形式参见例 1.11。在 MATLAB 的提示符下输入相应的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，价值系数向量 $\boldsymbol{c}$ 和资源向量 $\boldsymbol{b}$，然后调用该程序。

```
>> A=[-4 3 1 -1 0;1 -1 2 0 1;2 -2 1 0 0];
>> c=[3 2 -1 0 0]';
>> b=[4 10 1]';
>> [xstar,fxstar,iter]=MMSimplex(A,b,c)
Elapsed time is 0.073668 seconds.
xstar =
      31/3          13           19/3          0            0
fxstar =
     152/3
iter =
       3
```

计算结果表明，经过 3 次迭代得到 $x_1^*=31/3, x_2^*=13, x_3^*=19/3, x_4^*=x_5^*=0, z^*=152/3$。

例 1.15　利用 MATLAB 自带程序 linprog.m 计算例 1.11。

解　当采用 `linprog` 函数进行求解时，需要将约束条件中的“$\geqslant$”化为“$\leqslant$”，这只需在原不等式两边乘以“-1”即可。这样，$\boldsymbol{b}$ 向量可能会出现负数，这是允许的。计算过程为：

```
>> A=[4 -3 -1 ;1 -1 2];
>> b=[-4 10]';
>> f=[-3 -2 1]';
>> Aeq=[2 -2 1];
>> beq=[1];
>> lb=[0 0 0]';
```

```
>> ub=[inf inf inf]';
>> [X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]=linprog(f,A,b,Aeq,beq)
Optimization terminated.
   Elapsed time is 0.006504 seconds.
X =
      31/3
      13
      19/3
FVAL =
    -152/3
EXITFLAG =
       1
OUTPUT =
      iterations: 4
       algorithm: 'large-scale: interior point'
    cgiterations: 0
         message: 'Optimization terminated.'
```

上述计算结果表明，经过 4 次迭代求得最优解 (EXITFLAG=1)，最优解为 $x_1^*=31/3$, $x_2^*=13, x_3^*=19/3$，最优值为 $z^*=152/3$。

例 1.16 利用上面给出的程序 MMSimplex.m 求解模型引入 1.2(最佳下料问题)。

解 模型引入 1.2 的线性规划问题参见式 (1-1-2)。该问题有 10 个变量，如果手工计算还需要 1 个人工变量。计算量较大。原问题是求极小，现求其相反函数的极大。利用 MMSimplex.m 计算如下：

```
>> A=[2 2 1 1 1 0 0 0 0 0;1 0 2 1 0 4 3 2 1 0;0 1 0 2 3 0 1 2 4 5];
>> b=[1000 1000 1000]';
>> c=-[0 0.3 0.5 0.1 0.4 0 0.3 0.6 0.2 0.5]';
>> [xstar,fxstar,iter]=MMSimplex(A,b,c)
Elapsed time is 0.000763 seconds.
xstar =
     500    0    0    0    0   125/2    0    0   250    0
fxstar =
     -50
iter =
       3
```

计算结果表明，$x_1^*=500, x_6^*=62.5, x_9^*=250$，其他变量为 0。最优值 $z^*=50$。这就

是说，用 500 根圆钢采用第 1 种方案剪裁，用 62.5 根圆钢采用第 6 种方案剪裁，用 250 根圆钢采用第 9 种方案剪裁。这样剪裁产生的料头只有 50m，共用圆钢 812.5 根。

1.3.4 应用举例

利用线性规划解决实际问题是数学建模的一个重要方面。除了前已述及的数学建模的一般原则外，还需注意目标函数和约束条件是否可以表示成线性函数。提高数学建模的能力需要长期的训练，下面通过几个例题说明线性规划在实际中的应用。

例 1.17 (生产安排问题) 某种产品由 3 种不同零件各一个组成。每种零件均可由 4 个部门各自生产，但它们的生产效率和生产能力各不同。表 1-10 给出了每个部门的能力限制和每个部门生产每种零件的效率。问各部门生产每一种零件的工作时数为多少时，使得完成产品的件数最多。

表 1-10 各部门的生产能力及其效率

部门	能力限制/h	生产效率 c_{ij}/(件/h)		
		零件 1	零件 2	零件 3
1	100	10	15	5
2	150	15	10	5
3	80	20	5	10
4	200	10	15	20

解 该问题问的是各部门生产每一种零件的工作时数。这是本题的决策变量，需要回答。因此，不妨假设 x_{ij} 表示第 i 个部门生产第 j 种零件的小时数 $(i=1,2,3,4;j=1,2,3)$。除此以外，还需要回答的是完成产品的件数应该是多少。根据题意，若 c_{ij} 表示第 i 个部门生产第 j 种零件的效率，则可以生产得到第 $j(j=1,2,3)$ 种零件 $\sum\limits_{i=1}^{4} c_{ij}x_{ij}(j=1,2,3)$ 个。题目还假设最终的产品是由这 3 种零件各一个组成，但由于生产效率和能力的限制，得到的每种零件的数量是不一样的。所以，能够获得的最终产品的数量是 $\sum\limits_{i=1}^{4} c_{ij}x_{ij}(j=1,2,3)$ 之中的最小值，该值记为 x。这就是最终产品的数量，目标函数显然就是对其求最大。结合每个部门生产能力的限制，最后得到如下数学模型：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \begin{cases}
10x_{11}+15x_{21}+20x_{31}+10x_{41}-x \geqslant 0 \\
15x_{12}+10x_{22}+5x_{32}+15x_{42}-x \geqslant 0 \\
5x_{13}+5x_{23}+10x_{33}+20x_{43}-x \geqslant 0 \\
x_{11}+x_{12}+x_{13} \leqslant 100 \\
x_{21}+x_{22}+x_{23} \leqslant 150 \\
x_{31}+x_{32}+x_{33} \leqslant 80 \\
x_{41}+x_{42}+x_{43} \leqslant 200 \\
x, x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1,2,3,4; j=1,2,3
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-3-3}
$$

模型 (1-3-3) 中有 13 个变量，为了求解，将其化为标准形还需要 3 个剩余变量和 4 个松弛变量。故最后该模型的标准形将会有 20 个变量。显然，利用单纯形表手工计算是不可行的。下面利用程序 MMSimplex.m 求解该模型。在利用该程序前，注意将原线性规划问题化为标准形式，但不需要添加人工变量。这里省略具体的标准形式。下面只是将其化为标准形式后在 MATLAB 的提示符下的操作列举出来。

```
>> A=[10 0 0 15 0 0 20 0 0 10 0 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0;...
0 15 0 0 10 0 0 5 0 0 15 0 -1 0 -1 0 0 0 0 0;...
0 0 5 0 0 5 0 0 10 0 0 20 -1 0 0 -1 0 0 0 0;...
1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;...
0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;...
0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1];
>> b=[0 0 0 100 150 80 200]';
>> c=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]';
>> [xstar,fxstar,iter]=MMSimplex(A,b,c)
Elapsed time is 0.002019 seconds.
xstar =
  1.0e+003 *
  Columns 1 through 13
  0  0.1000  0  0.0883  0.0617  0  0.0800  0  0  0  0.0538  0.1462
     2.9241
  Columns 14 through 20
  0   0   0   0   0   0   0
fxstar =
  2.9241e+003
iter =
     7
```

计算结果表明，经过 7 次迭代得到最优解为：

$$\begin{array}{llllll} x_{11}=0, & x_{12}=100, & x_{13}=0, & x_{21}=88.3, & x_{22}=61.7, & x_{23}=0 \\ x_{31}=80, & x_{32}=0, & x_{33}=0, & x_{41}=0, & x_{42}=53.8, & x_{43}=146.2 \end{array}$$

最优值 $z^*=2924.1$，即第 1 个部门用 100h 生产第 2 种零件，第 2 个部门用 88.3h 生产第 1 种零件，用 61.3h 生产第 2 种零件，第 3 个部门用 80 小时生产第 1 种零件，第 4 个部门用 53.8h 生产第 2 种零件，用 146.2h 生产第 3 种零件。这时能够得到最多的产品 2924.1 件。

例 1.18 (人员安排问题)　某服务机构通过一段时间的运行，统计出一周内每天对服务人员的需求，见表 1-11。根据有关要求，每位服务人员每周工作 5 天，休息 2 天，且这两天休息是连续的。问应如何安排服务人员的休息使得在满足工作需要的同时总的服务人员最少。

表 1-11　服务机构每天需要的服务人员

时间	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
所需服务人员数	28	15	24	25	19	31	28

解　根据题目要求和给出的信息，安排服务人员的休息就是安排服务人员哪两天休息，即等价于安排服务人员从哪一天开始上班。这里没有给出具体的服务人员，所以就是安排哪一天有几个服务人员开始上班。按照这个思路，可以设 $x_i(i=1,2,\cdots,7)$ 表示星期一至星期日上班的人数。按规定每人上班是连续的工作 5 天，于是星期日在岗的服务人员就应该是星期日开始上班的服务人员以及上一周从星期三至星期六开始上班的服务人员，这可以表示为 $x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$。其他每天的安排类似。一周总的服务人员数当然是每天开始上班的服务人员之和。因此，可建立数学模型 (1-3-4)：

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z=\sum_{i=1}^{7}x_i\\
&\text{s.t.}\\
&\qquad\left\{\begin{array}{l}
x_3+x_4+x_5+x_6+x_7\geqslant 28\\
x_4+x_5+x_6+x_7+x_1\geqslant 15\\
x_5+x_6+x_7+x_1+x_2\geqslant 24\\
x_6+x_7+x_1+x_2+x_3\geqslant 25\\
x_7+x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 19\\
x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\geqslant 31\\
x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\geqslant 28\\
x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,7
\end{array}\right.
\end{aligned}
\tag{1-3-4}
$$

该线性规划问题有 7 个变量，化为标准形还需要 7 个剩余变量。若要用单纯形表的方法求解，则还需要 7 个人工变量。这样将会有 21 个变量。显然，手工计算是非常烦琐的。利用程序 MMSimplex.m 求解如下 (与前例一样，需将其化为标准形，略。)：

```
>> A=[0 0 1 1 1 1 1 -1 0 0 0 0 0 0;1 0 0 1 1 1 1 0 -1 0 0 0 0 0;...
1 1 0 0 1 1 1 0 0 -1 0 0 0 0;1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 -1 0 0 0;...
1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 -1 0 0;1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0;...
0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 -1];
>> b=[28 15 24 25 19 31 28]';
```

```
>> c=-[1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0]';
>> [xstar,fxstar,iter]=MMSimplex(A,b,c)
Elapsed time is 0.392200 seconds.
xstar =
  8  0  12  0  11  5  0  0  9  0  0  1  0  0
fxstar =
   -36
iter =
     7
```

计算结果表明，经过 7 次迭代，得到的最优解为 $x_1=8, x_2=0, x_3=12, x_4=0, x_5=11, x_6=0, x_7=5$，即周一应该有 8 人开始上班，周三有 12 人开始上班，周五有 11 人开始上班，周日有 5 人开始上班。这样，可在满足对服务人员的要求下，总的服务人员是最少的 (36 人)。

例 1.19 (连续投资问题)　某金融机构在今后 5 年内考虑给下列项目投资。已知：项目 A 从第 1 年到第 4 年年初需要投资，并于次年末回收本利 115%；项目 B 从第 3 年年初需要投资，到第 5 年年末能回收本利 125%，但有一定风险，所以规定最大投资额不超过其资金拥有量的 40%；项目 C 在第 2 年年初需要投资，到第 5 年年末能回收本利 140%，同样由于风险等原因，规定最大投资额不超过资金拥有量的 30%；项目 D 为 5 年内每年年初可购买国债，于当年年末返回，并加利息 6%。该机构现有资金 100 万元，问该机构应如何确定给这些项目每年的投资额，使得到第 5 年年末时其资金的本利总额为最大。

解　这个问题问的是该机构给这些项目每年的投资额，这是需要解答者回答的问题，所以是本题的决策变量。根据题意，一共有 4 个项目，有的项目是每年初都需要投资，有的不需要每年投资，因此，可以按每年初投资到某项目来决定决策变量。如果某项目某年初不需投资，则不设该变量。故设 $x_{i1}(i=1,2,3,4)$ 表示第 i 年年初投资到 A 项目的投资额，x_{32} 表示第 3 年年初投资到 B 项目的投资额，x_{23} 表示第 2 年年初投资到 C 项目的投资额，$x_{i4}(i=1,2,3,4,5)$ 表示第 i 年年初投资到 D 项目中的投资额。

决策变量确定以后进一步分析：首先容易想到的就是所有投资额之和等于该机构拥有的资金总额。需要想解决的是该机构获利最大的投资方案，所以在考虑投资总额时除了开始拥有的 100 万元以外，第 2 年开始有了收益 (项目 D)，将此收益也应作为投资总额的一部分。同时，该机构每年用于投资的资金不应剩余。因此，在第 1 年年初有

$$x_{11}+x_{14}=1000000$$

第 2 年年初，因为第 1 年给 A 项目的投资到第 2 年年末才有收益，但 D 项目有了收益，故有

$$x_{21}+x_{23}+x_{24}=1.06x_{14}$$

第 3 年年初的资金来自于 A 项目在第 1 年投资的收益以及 D 项目在第 2 年年初投资的收益，故

$$x_{31}+x_{32}+x_{34}=1.15x_{11}+1.06x_{24}$$

第 4 年年初的资金来自于 A 项目在第 2 年年初的投资收益以及 D 项目在第 3 年年初的投资收益，故

$$x_{41}+x_{44}=1.15x_{21}+1.06x_{34}$$

第 5 年的资金来自于第 5 年年初 A 项目投资收益和第 4 年年初 D 项目的投资收益，故

$$x_{54}=1.15x_{31}+1.06x_{44}$$

题目还假设 B，C 两个项目有投资限额，即

$$x_{32}\leqslant 400000,\qquad x_{23}\leqslant 300000$$

目标函数应该是所有的资金额之和，即

$$z=1.15x_{41}+1.40x_{23}+1.25x_{32}+1.06x_{54}$$

根据如上分析，最后得到数学模型 (1-3-5)：

$$\begin{aligned}
&\max\quad z=1.15x_{41}+1.40x_{23}+1.25x_{32}+1.06x_{54}\\
&\text{s.t.}\\
&\qquad\left\{\begin{array}{l}
x_{11}+x_{14}=1000000\\
x_{21}+x_{23}+x_{24}=1.06x_{14}\\
-1.15x_{11}-1.06x_{24}+x_{31}+x_{32}+x_{34}=0\\
-1.15x_{21}-1.06x_{34}+x_{41}+x_{44}=0\\
-1.15x_{31}-1.06x_{44}+x_{54}=0\\
x_{32}\leqslant 400000\\
x_{23}\leqslant 300000\\
x_{11},x_{21},x_{31},x_{41},x_{32},x_{23},x_{14},x_{24},x_{34},x_{44},x_{54}\geqslant 0
\end{array}\right.
\end{aligned}\tag{1-3-5}$$

该线性规划问题有 11 个原始变量，将其化为标准形还需要两个松弛变量，若用单纯形表计算还需要 1 个人工变量。显然太烦琐。现利用程序 MMSimplex.m 计算，过程为：

```
>> A=[1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 -1.06 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;...
-1.15 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0;...
0 0 -1.15 0 0 0 0 -1.06 1 1 0 0 0;0 0 0 0 0 -1.15 0 0 0 -1.06 1 0 0;...
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1];
```

```
>> b=[1000000,0,0,0,0,300000,400000]';
>> c=[0 0 0 1.40 0 0 1.25 0 1.15 0 1.06 0 0]';
>> [xstar,fxstar,iter]=MMSimplex(A,b,c)
Elapsed time is 0.055076 seconds.
xstar =
  1.0e+005 *
  Columns 1 through 10
  7.1698   2.8302    0   3.0000    0   4.2453   4.0000    0    0    0
  Columns 11 through 13
   4.8821     0      0
fxstar =
  1.4375e+006
iter = 6
```

计算结果表明，经过 6 次迭代得到：$x_{11}=716980, x_{14}=283020$，即第 1 年投资 A 项目 716980 元，投资 D 项目 283020 元；$x_{23}=300000$，则表示第 2 年年初投资 C 项目 300000 元；$x_{31}=424530, x_{32}=400000$，表示第 3 年投资 A 项目 424530 元，投资 B 项目 400000 元；$x_{41}=488210$，表示第 4 年年初投资 A 项目 488210 元。这样，将会获得的最大收益为 $z^*=1437500$ 元。收益率达到 43.75%。

习题 1

1. 将下面的线性规划问题化为标准形式。

(1) $\min z=-3x_1+x_2+x_3$

s.t.

$$\begin{cases} 5\leqslant x_1+x_2+x_3\leqslant 10 \\ 3x_1\geqslant 4x_3 \\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3 \end{cases}$$

(2) $\min z=-3x_1+4x_2-2x_3+5x_4$

s.t.

$$\begin{cases} 4x_1-x_2+x_3-x_4=-2 \\ x_1+x_2+x_3-x_4\leqslant 14 \\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4\geqslant 2 \\ x_1\geqslant 0, x_3\geqslant 0, x_2\leqslant 0, x_4\text{无限制} \end{cases}$$

(3) $\min z=2x_1-x_2+5x_3$

s.t.

$$\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3=8 \\ 3x_1+x_2-x_3\geqslant 6 \\ x_1\leqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\text{无限制} \end{cases}$$

(4) $\max z=2x-3y$

s.t.

$$\begin{cases} |x|+|y|=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

2. 对下述线性规划问题找出所有基解，指出哪些是基可行解，并确定最优解。

(1) $\max z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$

s.t.

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 9 \\ 8x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 10 \\ 3x_1 - x_6 = 0 \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, 6 \end{cases}$$

(2) $\min z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4$

s.t.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

3. 用图解法求解下列线性规划问题，并指出问题的解的类型 (唯一解、无穷多组解、无界解、无可行解)。

(1) $\min z = 2x_1 + 3x_2$

s.t.

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \geqslant 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \geqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\max z = 3x_1 + 2x_2$

s.t.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(3) $\max z = x_1 + x_2$

s.t.

$$\begin{cases} 6x_1 + 10x_2 \leqslant 120 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 14 \\ 5 \leqslant x_1 \leqslant 10 \\ 3 \leqslant x_2 \leqslant 8 \end{cases}$$

(4) $\max z = 5x_1 + 6x_2$

s.t.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

4. 分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，并指出单纯形法迭代的每一步与图解法中的可行域哪一个点对应。

(1) $\max z = 10x_1 + 5x_2$

s.t.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 9 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\max z = 2x_1 + x_2$

s.t.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

5. 若 $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2 \in \boldsymbol{R}^n$ 是两个凸集，证明 $\boldsymbol{D}_1 \bigcap \boldsymbol{D}_2$ 也是凸集。

6. 证明若 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}$ 均为某线性规划问题的最优解，则在这两点连线上的所有点也是该问题的最优解。

7. 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划。

(1) $\max z = 10x_1 - 5x_2 + x_3$

s.t.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ -5x_1 + x_2 - 10x_3 \leqslant 15 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\min z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$

s.t.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geqslant 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leqslant 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

8. 某饲养场饲养某种动物出售，设每头动物每天至少需要 700g 蛋白质、30g 矿物质、100mg 维生素。现有 5 种饲料可供选用，各种饲料每千克的营养成分含量及单价见表 1-12。要求确定既能满足动物生长的营养要求，又使费用最省的选用饲料的方案。试建立数学模型并利用程序 MMSimplex.m 求解。

表 1-12 每种饲料的营养成分含量及价格

饲料	蛋白质/g	矿物质/g	维生素/mg	价格/(元/kg)
1	3	1	0.5	0.2
2	2	0.5	1.0	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	6	2	2	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

9. 一艘货轮分前、中、后 3 个舱位，它们的容积和最大允许载重量见表 1-13。现有 3 种货物待运，已知有关数据列于表 1-14。为了航运安全，前、中、后舱的实际载重量大体保持各舱最大载重量的比例关系。具体要求是：前、后舱分别与中舱之间载重量比例的偏差不超过 15%，前、后舱之间不超过 10%。问：该货轮应装载 A，B，C 各多少件运费收入最大？试建立这个问题的线性规划模型并用 MATLAB 程序 MMSimplex.m 求解。

表 1-13 各舱位的容积与最大允许载重量

项目	前舱	中舱	后舱
最大允许载重量/t	2000	3000	1500
容积/m^3	4000	5400	1500

表 1-14 货物的体积、数量及单位运价

商品	数量/件	体积/(m^3/件)	重量/(t/件)	运价/(元/件)
A	600	10	8	1000
B	1000	5	6	700
C	800	7	5	600

10. 某建筑公司需要用 6m 长的塑钢材料制作 A，B 两种型号的窗架。两种窗架所需材

料规格及数量见表 1-15。问：怎样下料使得余料最少？试建立数学模型并用 MMSimplex.m 或 linprog.m 求解。

表 1-15　窗架所需材料规格及数量

型号	A		B	
每套窗架所需材料	长度/m	数量/根	长度/m	数量/根
	A_1：1.7	2	B_1：2.7	2
	A_2：1.3	3	B_2：2.0	3
需要量/套	200		150	

11. 某投资人现有下列 4 种投资方案，3 年内每年年初都有 3 万元 (不计利息) 可供投资：方案一，在 3 年内投资人应在每年年初投资，一年结算一次，年收益率是 20%，下一年可继续将本息投入获利。方案二，在 3 年内投资人应在第 1 年年初投资，两年结算一次，收益率是 50%，下一年可继续将本息投入获利，这种投资最多不超过 2 万元。方案三，在 3 年内投资人应在第 2 年年初投资，两年结算一次，收益率是 60%，这种投资最多不超过 1.5 万元。方案四，在 3 年内投资人应在第 3 年年初投资，一年结算一次，年收益率是 30%，这种投资最多不超过 1 万元。问：该投资人应采用怎样的投资决策使得 3 年的总收益最大？试建立数学模型并用 MATLAB 求解。