第3章 计数

组合数学这一研究个体安排的学科是离散数学的重要部分，早在17世纪人们就开始了对这类课题的研究，当时在赌博游戏的研究中出现了组合的问题。枚举，具有确定性质的个体的计数，是组合数学的一个重要的部分。我们必须对个体计数来求解许多不同类型的问题。例如，用计数确定算法的复杂性，计数也用于确定是否存在着能够充分满足需求的电话号码或因特网址，计数技术也广泛用于计算事件的概率。我们可以用计数分析赌博游戏，如扑克。也可以确定抽奖获胜的概率，如25选6，排列5等彩票。

3.1 基本计数、排列与组合

3.1.1 基本的计数原则

定义 3.1 加法法则：如果完成第一项任务有 n_1 种方式，第二项任务有 n_2 种方式，并且这两项任务不能同时完成，那么完成第一项或第二项任务有 n_1+n_2 种方式(可推广到多个任务的情形)。

例 3.1 假定要从计算机学院10计本①，②班中推选一名学生参加院座谈会，若10计本①班有55名学生，10计本②班有60名学生，那么有多少种不同的选择？

解：完成第一项任务，选择10计本①班的一名学生作为代表，有55种不同的选择，完成第二项任务，选择10计本②班的一名学生作代表，有60种不同的选择，根据加法法则，结果有 $55+60=115$ 种不同的选择方式。

定义 3.2 乘法法则：假定一个过程可以分解成两个相互独立的任务。如果完成第一个任务有 n_1 种方式，完成第二个任务有 n_2 种方式，那么完成这个过程有 $n_1\times n_2$ 种方式(可推广到多个任务的情形)。

例 3.2 设一标识符由两个字符组成，第一个字符由 a,b,c,d,e 组成，第二个字符由1，2，3组成，则可以组成多少种不同的标识符？

解：第一个任务为从 a,b,c,d,e 中选择一个字符作为标识符的第一个字符，共有5种方式，第二个任务为从1，2，3中选择一个字符作为标识符的第二个字符，共有3种方式，根据乘法法则有 $5\times3=15$ 种不同的标识符。

许多计数问题不能仅仅使用加法法则或者乘法法则来求解。但是不管多复杂的计数问题总可以使用加法法则和乘法法则的组合来求解。

例 3.3 我国曾经推行的 02 式汽车的牌照的式样如下：999.999，999.XXX，XXX.999，那么共有多少个不同的车牌号码(其中 9 表示该位为数字，X 表示该位为大写字母)？

解：根据乘法法则：

式样为 999.999 的有 $10\times10\times10\times10\times10\times10=1\,000\,000$ 种不同牌照；

式样为 999.XXX 的有 $10\times10\times10\times26\times26\times26=17\,576\,000$ 种不同的牌照；

式样为 XXX.999 的同样有 17 576 000 种不同的牌照。

根据加法法则，可用车牌数量为

$$1\,000\,000+17\,576\,000+17\,576\,000=36\,152\,000 \text{ 种}$$

例 3.4 计算机系统的每个用户有一个 6 到 8 个字符构成的登录密码，其中每个字符是一个大写字母或者数字，且每个密码必须至少包含一个数字，有多少种可能的密码？

解：令 P 是可能的密码总数，且 P_6，P_7，P_8 分别表示 6，7 或 8 位的可能的密码数，由加法法则，$P=P_6+P_7+P_8$。现在找 P_6，P_7 和 P_8。直接找 P_6 是困难的，而找 6 个大写字母和数字构成的字符串数是容易的，其中包含那些没有数字的串在内，然后从中减去没有数字的串数就得到 P_6，由乘法法则可知，6 个字符的串数是 36^6，而没有数字的字符串数是 26^6，因此

$$P_6=36^6-26^6=2\,176\,782\,336-308\,915\,776=1\,867\,866\,560$$

类似地，

$$P_7=36^7-26^7=78\,364\,164\,096-8\,031\,810\,176=70\,332\,353\,920$$

$$P_8=36^8-26^8=2\,812\,109\,907\,456-208\,827\,064\,576=2\,612\,282\,842\,880$$

从而 $P=P_6+P_7+P_8=2\,684\,483\,063\,360$。

3.1.2 排列与组合

定义 3.3 设 A 是含有 n 个不同元素的集合，$0\leqslant r\leqslant n$，任取 A 中的 r 个元素，按顺序排成一列，称为从 A 中取 r 个的一个排列。

例如：$A=\{a, b, c\}$，$r=2$。从 A 中取 2 个的排列的全体如下：

ab，ac，ba，bc，ca，cb，总数为 6 个。

令 P_n^r 表示从 n 中取 r 个排列的全体数目，有时也记为 $P(n,r)$。从 n 中取 r 个排列，可以与下面问题一一对应。

图 3.1 为 r 个依次排列的具有不同序号的盒子，设 A 为带有标志 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个球。从 A 中取 1 个球放在第 1 个盒子中，从剩下的 $n-1$ 个球中取 1 个球放在第 2 个盒子中，以此类推，从 $n-r+1$ 个余下的球中取 1 个放在第 r 个盒子中。由此可得到从 A 中取 r 个的一个排列。

$$\boxed{(1)}\quad\boxed{(2)}\quad\boxed{(3)}\quad\cdots\quad\boxed{(r)}$$

图 3.1 r 个依次排列的盒子

根据乘法法则，排列总数为 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$。

定理 3.1 具有 n 个不同元素的集合的 r-排列数是

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=n!/(n-r)!$$

例 3.5 假定有 10 名长跑运动员，按成绩给前 3 名运动员分别颁发金、银、铜牌。如果比赛可能出现所有可能的结果。有多少种不同的颁奖方式？

解：颁奖方式就是 10 个不同元素集合的 3-排列数。

因此存在 $P_{10}^3=10\times9\times8=720$ 种可能的颁奖方式。

例 3.6 TSP 问题(旅行商问题)。一个商人从一个城市出发。不重复地走遍 n 个城市。如果路径可以按照他想要的任何次序进行，问可能有多少种不同的路径？

解：这个问题等同于求 n 个元素集合的 n-排列数。

$P_n^n=n!$，若 $n=8$，该商人要想找到一条具有最短距离的路径。那么他必须考虑 $8!=40320$ 条不同的路径。

定义 3.4 当从 n 个元素中取出 r 个而不考虑它们的顺序时，称为从 n 中取 r 的组合，其数目记为 C_n^r，$C(n,r)$ 或 $\binom{n}{r}$。

从 $\{a,b,c\}$ 中取 2 个进行组合，则有以下几种组合形式：

$$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$$

组合问题可以看作是：球有标志 $1,2,3,\cdots,n$，盒子则没有区别。从 n 个球中取 r 个球放到 r 个盒子里，每个盒子 1 个，便得到 n 取 r 的组合。

若在每一种组合结果的基础上再对盒子进行排列，便得到 n 取 r 的排列。所以有

$$P_n^r = C_n^r \cdot r!$$

即

$$C_n^r = P_n^r/r! = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

定理 3.2 设 n 是正整数，r 是满足 $0\leqslant r\leqslant n$ 的整数，n 元素集合的 r 组合数为 $C_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$。

推论 3.1 设 n 和 r 是满足 $r\leqslant n$ 的非负整数，那么 $C_n^r=C_n^{n-r}$。

证：由定理 3.2 得 $C_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!\ r!}$。

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-n+r)!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r$$

例 3.7 为开展学校的离散数学课程的教学工作，要选出一个委员会。如果数学系有 9 个教师，计算机科学系由 11 个教师，而这个委员会要由 3 个数学系的教师和 4 个计算机科学系的教师组成。那么有多少种不同的选择方式？

解：从数学系 9 个教师选 3 个教师有 $C_9^3=\dfrac{9!}{6!\cdot3!}=84$ 种不同的选择方式。从计算机科学系 11 个教师中选 4 个教师有 $C_{11}^4=\dfrac{11!}{7!\cdot4!}=330$ 不同的选择方式。

根据乘法法则，选择这个委员会的方式为 $84\times330=27\ 720$ 种。

例 3.8 从 1 到 300 间任取 3 个不同的数，使得这 3 个数的和正好被 3 除尽，试问有几种方案？

解：把 1 到 300 的数按除以 3 的余数分成 3 组。

$A=\{1,4,7,\cdots,298\}$

$B=\{2,5,8,\cdots,299\}$

$C=\{3,6,9,\cdots,300\}$

下面 2 种情况是被 3 除尽的可能情况。

(1) 3 个数同属于 A 或 B 或 C。

(2) 3 个数分别属于 A,B,C。

属于 A 的 3 个数共有 C_{100}^3 种方式,属于 B 或 C 的也各有 C_{100}^3 种方案,分别属于 A,B,C 的 3 个数,根据乘法规则有 100^3 种方案。

按照加法法则,总方案数 $N=3C_{100}^3+100^3=1\,485\,100$。

组合数 C_n^r 又称为二项式系数,使用这个名字是由于这些数作为系数出现在形如 $(a+b)^n$ 的二项式幂的展开式中:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$$

这个式子称为二项式定理。

定理 3.3 (帕斯卡恒等式)设 n 和 k 是满足 $n\geqslant k$ 的正整数,那么有

$$C_{n+1}^k=C_n^{k-1}+C_n^k$$

证明:假定 T 是包含 $n+1$ 个元素的集合。令 a 是 T 的一个元素,且 $S=T-\{a\}$。从 T 的 $n+1$ 个元素取 k 个元素的组合,可看成以下 2 种情况:

(1) 所取的 k 个元素一定包含 a。

(2) 所取的 k 个元素一定不包含 a。

第 1 种情况的组合数等于从除 a 之外的 n 个元素中取 $k-1$ 个的组合数,值为 C_n^{k-1}。

第 2 种情况的组合数等于从除 a 之外的 n 个元素中取 k 个的组合数,值为 C_n^k。

根据加法法则 $C_{n+1}^k=C_n^{k-1}+C_n^k$,即证。

当然也可以利用 C_n^r 的公式通过代数推导来证明这个恒等式。

帕斯卡恒等式是二项式系数以三角形表示的几何排列的基础,如图 3.2 所示。

C_0^0	1
$C_1^0\quad C_1^1$	1　1
$C_2^0\quad C_2^1\quad C_2^2$	1　2　1
$C_3^0\quad C_3^1\quad C_3^2\quad C_3^3$	1　3　3　1
$C_4^0\quad C_4^1\quad C_4^2\quad C_4^3\quad C_4^4$	1　4　6　4　1
$C_5^0\quad C_5^1\quad C_5^2\quad C_5^3\quad C_5^4\quad C_5^5$	1　5　10　10　5　1
…	…

图 3.2　帕斯卡三角形

这个三角形叫作杨辉三角形,也叫帕斯卡三角形。

例 3.9 $(a+b)^4$ 的展开式是什么?

解:$(a+b)^4=C_4^0a^4+C_4^1a^3b+C_4^2a^2b^2+C_4^3ab^3+C_4^4b^4$

$\qquad=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

例 3.10 在 $(3x+2y)^{17}$ 中 x^8y^9 的系数是什么?

解:$(3x+2y)^{17}=\sum\limits_{k=0}^{17}C_{17}^k(3x)^{17-k}(2y)^k$

当 $k=9$ 时,得到展开式中 x^8y^9 的系数为

$$C_{17}^{9}3^{8}2^{9}=\frac{17!}{9!8!}3^{8}2^{9}=81\ 662\ 929\ 920$$

3.2 排列组合的进一步讨论

许多计数问题里元素可以被重复使用,例如,一个字母或一个数字可以在一个车牌中多次使用;某些计数问题涉及不可区别的元素,例如,为计数单词 SUCCESS 的字母可能被重新排列的方式数;此外,还有把不同的元素放入盒子的方法数问题,如把扑克牌发给 4 个玩牌人的不同的方式数。

3.2.1 圆周排列

前面讨论的排列是排列成一列,如若排列在一个圆周上,则称为圆周排列,或简称圆排列。

如 4 个元素 a,b,c,d 的下面 4 种排列 $abcd,dabc,cdab,bcda$ 属于同一个圆周排列。

从 n 中取 r 个做圆周排列的排列数 Q_n^r 与 P_n^r 的关系是:

$$Q_n^r=P_n^r/r$$

因为取 r 个做排列的结果与圆周排列比较重复了 r 次。

例 3.11 5 对夫妻出席一宴会,围一圆桌坐下,试问有多少种不同的方案?若要求每对夫妻相邻又有多少种不同的方案?

解:10 个人围圆桌而坐,相当于 10 个元素的圆排列。排列数为:

$$Q_{10}^{10}=9!=362\ 880$$

若加上限制条件,夫妻相邻而坐,则可看做 5 个元素的圆排列,排列数为 4!,但夫妻双方可以交换座位。根据乘法法则,方案数为 $2^5\cdot 4!=768$。

3.2.2 有重复的排列

例 3.12 用英文字母可以构成多少个 n 位字符串?

解:英文字母有 26 个,每个字母可以被重复使用,故每位上都有 26 种可能。根据乘法法则存在 26^n 个 n 位字符串。

例 3.13 r 个不同的球放入 n 个盒子,每个盒子可放任意多个球,有多少种放法?

解:因为每个球都有 n 个盒子可供选择,根据乘法法则有 n^r 种放法。

定理 3.4 具有 n 个物体的集合允许重复的 r 排列数为 n^r。

在计数问题中某些元素可能是没有区别的,在这种情况下必须小心避免重复计数。

例 3.14 用 2 面红旗、3 面黄旗和 4 面蓝旗依次悬挂在一根旗杆上,问可以组成多少种不同的标志?

解:这个问题可以看成是 9 个位置上分别挂红旗、黄旗或蓝旗。

第 1 步:从 9 个位置上选 2 个位置挂红旗有 C_9^2 种方式。

第 2 步:从剩下的 7 个位置上选 3 个位置挂黄旗有 C_7^3 种方式。

第 3 步:从剩下的 4 个位置上选 4 个位置挂蓝旗有 C_4^4 种方式。

根据乘法法则，方式数为 $C_9^2C_7^3C_4^4=1260$。

定理 3.5 设类型 1 的相同的物体有 n_1 个，类型 2 的相同的物体有 n_2 个，……，类型 k 的相同的物体有 n_k 个，那么 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 个物体的不同排列数是：$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$。

证明：为确定排列数，按下面的步骤进行。

第 1 步：在 n 个位置中选择 n_1 个位置放置类型 1 的物体，有 $C_n^{n_1}$ 种选择。

第 2 步：在剩下的 $n-n_1$ 个空位置上选择 n_2 个位置放置类型 2 的物体，有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种选择。

依次类推。

第 k 步：在剩下的 $n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}=n_k$ 个空位置上选择 n_k 个位置放置类型 k 的物体，有 $C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}$ 种选择。

根据乘法法则，不同的排列数是：

$$\begin{aligned}C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}\cdots C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}&=\frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\\&\quad\cdot\cdots\cdot\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!}\\&=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\end{aligned}$$

。即证。

例 3.15 重新排序单词 SUCCESS 中的字母能构成多少个不同的串？

解：因为 SUCCESS 中的某些字母是重复的，因此答案并不是 7 个字母的排列数，这个单词包含 3 个 S，2 个 C，1 个 U 和 1 个 E。根据定理 3.5，排列数为：$\dfrac{7!}{3!2!1!1!}=420$。

有些计数问题可以通过枚举把不同的物体放入不同的盒子的方式来求解。典型的例子就是扑克牌游戏，此时物体是牌，而盒子是玩牌人的手。

例 3.16 有多少种方式把 52 张标准的扑克牌发给 4 个人使得每个人 5 张牌？

解：第 1 步，第 1 个人得 5 张牌，有 C_{52}^5 种可能；

第 2 步，第 2 个人得 5 张牌，有 C_{47}^5 种可能；

第 3 步，第 3 个人得 5 张牌，有 C_{42}^5 种可能；

第 4 步，第 4 个人得 5 张牌，有 C_{37}^5 种可能；

根据乘法法则有 $C_{52}^5C_{47}^5C_{42}^5C_{37}^5=\dfrac{52!}{5!5!5!5!32!}$。

值得注意的是，上例是将 52 个物体分成 5 堆，前 4 堆分别为 5 个，第 5 堆为 32 个，也就是说将 52 个物体放入 5 个不同的盒子中，前 4 个盒子是玩牌人的手，第 5 个盒子放剩下的牌。

定理 3.6 把 n 个不同的物体分配到 k 个不同的盒子，使得 n_i 个物体放入盒子 $i(i=1,2,\cdots,k)$ 的方式数等于 $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$。

例 3.17 打桥牌时，把一副标准的 52 张牌发给 4 个人，有多少种不同发牌的方式？

解：把 52 张牌发给 4 个人，每人得 13 张。

根据定理 3.6，其方式数为 $\dfrac{52!}{13!13!13!13!}$。

例 3.18 设某地的街道把城市分割成矩形方格,每个方格称为块,某甲从家里出发上班,向东要走过 m 块,向北要走过 n 块,问某甲上班的路径有多少种?

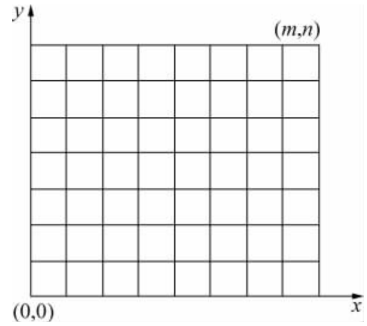

图 3.3 某地街道对应的方格图

解:问题可化成图 3.3 所示的方格图,每格一个单位,求从(0,0)点到(m,n)点的路径数,这里所谓"路径"指的是不允许后退,即不允许逆着 x,y 的正向走。

设从(0,0)点开始向水平方向前进一步为 x,垂直方向上升一步为 y。于是从(0,0)到(m,n)点,水平方向要走 m 步,垂直方向要走 n 步,总和为 $m+n$ 步。一条到达(m,n)点的路径对应一个由 m 个 x,n 个 y 组成的一个排列:$\underbrace{xxy\cdots xy}_{m个x,n个y}$。反之,$m$ 个 x,n 个 y 的任一排列对应一条从(0,0)到(m,n)的路径,所以从(0,0)点到(m,n)点的路径和 m 个 x,n 个 y 的排列一一对应,故所求的路径数为 $C_{m+n}^{m}=\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!}$。

3.2.3 有重复的组合

先看下面允许重复的组合实例。

例 3.19 从包含苹果、橙子和梨的篮子里选 4 个水果。如果选择水果的顺序无关,且只关心水果的类型而不管是该类型的哪一个水果,那么当篮子中每类水果至少有 4 个时,有多少种选法?

解:为了求解这个问题,我们列出选择水果的所有可能的方式。

令用 a 表示苹果,b 表示橙子,c 表示梨,共有以下 15 种方式。

aaaa, *aaab*, *aaac*, *aabb*, *aabc*, *aacc*,*abbb*, *abbc*, *abcc*, *accc*, *bbbb*, *bbbc*,*bbcc*, *bccc*, *cccc*。

这个解是从 3 个元素的集合$\{a,b,c\}$中允许重复的 4-组合数。

为求解这种类型的更复杂的计数问题,我们需要计数一个 n 元素集合的 r-组合的一般方法。在例 3.20 中,将给出这一方法。

例 3.20 从包含 1 元、2 元、5 元、10 元、20 元、50 元、100 元的钱袋中选 5 张纸币,有多少种方式?假设不管纸币被选的次序,同种币值的纸币都是不加区别的,并且至少每种纸币有 5 张。

解:因为纸币被选的次序是无关的且 7 种不同类型的纸币都可以最多选 5 次,问题涉及的是计数从 7 个元素的集合中允许重复的 5-组合数。列出所有的可能情况是乏味的,因为存在许多解。下面给出一种方法来计数允许重复的组合数。

假设一个零钱盒子有 7 个间隔,每格保存一种纸币,如图 3.4 所示。

1 元	2 元	5 元	10 元	20 元	50 元	100 元

图 3.4 零钱盒子示意图

这些间隔被 6 块隔板分开,每选择 1 张纸币就对应于在相应的隔板里放置 1 个标记。

图 3.5 针对选择 5 张纸币的 3 种不同方式给出了这种对应,其中的竖线表示 6 个隔板,

星表示 5 种纸币。

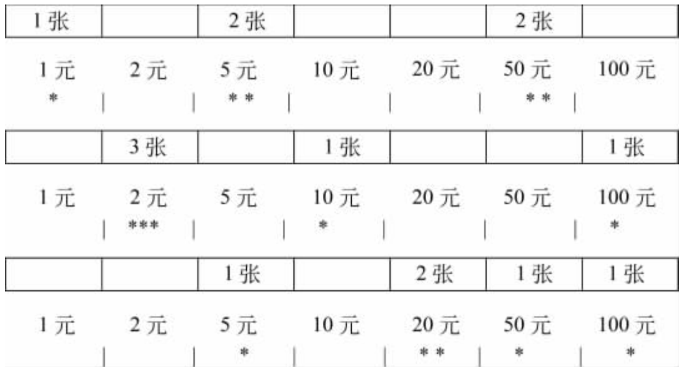

图 3.5　5 张纸币的 3 种不同方式示意图

选择 5 张纸币的方法数对应于安排 6 条竖线和 5 颗星的方法数，因此选择 5 张纸币的方法数就是从 11 个可能的位置选 5 颗星位置的方法数。这对应于从含 11 个物体的集合中无序地选择 5 个物体的方法数，可以有 C_{11}^{5} 种方式。

因此存在 $C_{11}^{5}=\dfrac{11!}{5!\,6!}=462$ 种方式从有 7 类纸币的袋中选择 5 张纸币。

定理 3.7　从 n 个元素的集合中允许重复的 r 组合有 C_{n+r-1}^{r} 个。

证明略。

例 3.21　方程 $x_1+x_2+x_3=11$ 有多少个解？其中 x_1,x_2,x_3 是非负整数。

解：方程 $x_1+x_2+x_3=11$ 的一个解对应从 3 个元素集合中允许重复地选 11 个元素的一种方式，以使得 x_1 为选自第一类的个数，x_2 为选自第二类的个数，x_3 为选自第三类的个数，因此解的个数就是 3 个元素集合允许重复的 11-组合数。根据定理 3.7，其值为 $C_{3+11-1}^{11}=C_{13}^{11}=78$。

思考：若添加限制，当变元满足 $x_1\geqslant1,x_2\geqslant2,x_3\geqslant3$ 的整数时，解的个数？

例 3.22　在下面的伪码被执行后 k 的值是多少？

```
k = 0;
for(i1 = 1; i1 <= n; i1++)
    for(i2 = 1; i2 <= i1; i2++)
          …
          for(im = 1; im <= im-1; im++)
              k++;
```

解：k 的初值是 0，且对于一组满足 $1\leqslant i_m\leqslant i_{m-1}\leqslant\cdots\leqslant i_1\leqslant n$ 的整数 $i_1,i_2,\cdots,i_m$，每次执行这个嵌套循环时 k 的值加 1，这种整数的组数是从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中允许重复地选择 m 个整数的方式数(因为一旦这组整数选定以后，如果按非降序排列它们，这就唯一地确定了一组对 $i_m,i_{m-1},\cdots,i_1$ 的赋值；相反，每个这样的赋值对应了一个唯一的无序集合)。所以由定理 3.7 得出代码被执行后 $k=C_{n+m-1}^{m}$。

定理 3.8　r 个无区别的小球放进 n 个有标志的盒子中，每个盒子可多于 1 个，则共有 C_{n+r-1}^{r} 种不同方式。

证明略。

例 3.23 试问$(x+y+z)^4$有多少项?

解:这个问题可对应于将 4 个无区别的球放进 3 个有标志的盒子的方法数(因为这个式子的展开式中每项的指数和为 4,分别分配到三个变量上,如:x^2yz 相当于放两个球到标志为 x 的盒子,各放一个球到标志为 y 和 z 的盒子)。根据定理 3.8 $r=4,n=3$ 的方法数为:$C_{n+r-1}^{r}=C_{3+4-1}^{4}=15$。

3.3 生成排列和组合

本章前几节已经描述了各种类型的排列和组合的计数方法,但是有时需要生成排列和组合,而不仅仅是计数。例如以下 3 个问题:

(1) TSP 问题,假设一个销售商必须访问 6 个城市,应该按照什么顺序访问这些城市而使得总的旅行时间最少?确定最好顺序的一种方法就是确定 6!=720 种不同顺序的访问时间并且选择具有最小旅行时间的访问顺序。

(2) 假定 6 个数的集合中某些数的和是 100。找出这些数的一种方法就是生成集合的所有 $2^6=64$ 个子集并且检查它们的元素和。

(3) 假设一个实验室有 95 个雇员,一个项目需要一组 12 人组成的有 25 种特定技能的雇员(每个雇员可能有一种或多种技能)。找出这组雇员的一种方法就是找出所有的 12 个雇员的小组,然后检查他们是否有所需要的技能。

这些例子都说明为了求解问题常常需要生成排列和组合。

3.3.1 生成排列

任何 n 元素集合可以与集合$\{1,2,\cdots,n\}$建立一一对应。可以如下列出任何 n 元素集合的所有排列:生成 n 个最小正整数的排列,然后用对应的元素替换这些整数。现在已经有许多不同的算法来生成这个集合的 $n!$ 个排列。下列要描述的算法是以$\{1,2,\cdots,n\}$的排列集合的字典顺序为基础的。按照这个顺序,如果对于某个 k,$1\leqslant k\leqslant n$,$a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_{k-1}=b_{k-1},a_k<b_k$,那么排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 在排列 $b_1b_2\cdots b_n$ 的前边。换句话说,如果在 n 个最小正整数集合的两个排列不等的第一位置,一个排列的数小于第二个排列的数,那么这个排列按照字典顺序排在第二个排列的前边。

例如:集合$\{1,2,3,4,5\}$的排列 23415 在排列 23514 的前边,因为这两个排列的前两位相同,但第一排列的第三位是 4,小于第二排列的第三位数 5。类似的,排列 41532 在排列 52143 的前边。

生成$\{1,2,\cdots,n\}$的排列的算法基础是从一个给定排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 按照字典顺序构成下一个排列的过程,具体描述如下。

首先,假设最后两位 $a_{n-1}<a_n$,交换 a_{n-1} 和 a_n 可以得到一个更大的排列而且没有任何一个排列既大于原来的排列而又小于这个通过交换 a_{n-1} 与 a_n 得到的排列,例 234156 后面的排列为 234165。

另一方面,如果 $a_{n-1}>a_n$,那么由交换这个排列中的最后两项不可能得到一个更大的排

列。此时可以看排列中的最后 3 个整数，如果 $a_{n-2}<a_{n-1}$，那么可以重新安排这后 3 个数而得到下一个更大的排列。在 a_{n-1} 和 a_n 中找一个大于 a_{n-2} 的较小数，先把这个数放在位置 $n-2$ 上，然后把剩下的那个数和 a_{n-2} 按照递增的顺序放到最后的两个位置上。例如在 234165 的下一个更大的排列是 234516，235461 的下一个更大的排列是 235614。

但是，如果 $a_{n-2}>a_{n-1}>a_n$，那么不可能由安排在这个排列的最后三项而得到下一个更大的排列。基于这个观察，可以描述一个一般的方法，对于给定的排列 $a_1a_2\cdots a_n$，依据字典顺序来生成下一个更大的排列：

首先找到整数 a_j 和 a_{j+1}，使得 $a_j<a_{j+1}$，且 $a_{j+1}>a_{j+2}>\cdots>a_n$，即在这个排列中的最后一对相邻的整数，使得这个对的第一个整数小于第二个整数，然后把 $a_{j+1},a_{j+2},\cdots,a_n$ 中大于 a_j 的最小的整数放到第 j 个位置，再按照递增顺序从位置 $j+1$ 到 n 列出 $a_j,a_{j+1},\cdots,a_n$ 中其余的整数，这就得到依照字典顺序的下一个更大的排列。容易看出，没有其他排列大于 $a_1a_2\cdots a_n$ 而小于这个新生成的排列。

例 3.24　在 362541 后面按照字典顺序的下一个更大排列是什么？

解：使得 $a_j<a_{j+1}$ 的最后一对整数是 a_3 和 a_4（$a_3=2,a_4=5$），排列在 a_3 右边大于 a_3 的最小整数是 $a_5=4$。因此交换 a_3 与 a_5 的位置。后三个数字依递增顺序排列，即 125。于是得下一排列为 364125。

为生成整数 $1,2,\cdots,n$ 的 $n!$ 个排列，按照字典顺序由最小的排列，即从 $123\cdots n$ 开始，连续施用 $n!-1$ 次生成下一个更大排列的过程，就得到 n 个最小整数按字典顺序的所有排列。

例 3.25　按字典顺序生成整数 1，2，3，4 的排列。

解：从 1234 开始，交换 4，3 得下一个排列 1243。下一步，由于 $4>3,2<4$，把 3，4 中大于 2 的最小数 3 放在第二位，后两位按递增序放置，得 1324。依次类推，得到：

1234→1243→1324→1342→1423→1432
→2134→2143→2314→2341→2413→2431
→3124→3142→3214→3241→3412→3421
→4123→4132→4213→4231→4312→4321

下面算法为在给定排列不是最大排列 $n,n-1,\cdots,1$ 时，在它的后面按照字典顺序找到下一个更大排列的过程。

算法 3.3.1

```
void nextpermutation(int a[1…n])
//a1 a2 … an 存储在数组 a 中
{
    j = n - 1;
    while(a[j]> a[j + 1]) j -- ;
        //使得 j 是 aj < aj+1 的最大下标
    k = n;
    while(a[j]> a[k]) k -- ;
        //ak 是在 aj 的右边大于 aj 的最小正整数
    swap(a[j],a[k]);        //互换 aj,ak
    r = n;
    s = j + 1;
```

```
    while(r > s){swap(a[r],a[s]); r -- ; s++; }
}
```

3.3.2 生成组合

怎样可以生成一个有穷集的元素的所有组合呢？由于一个组合仅仅就是一个子集，我们可以利用在$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和n位二进制串之间的对应。

如果a_k在子集中，对应的二进制串在位置k有一个1；如果a_k不在子集中，对应的二进制串在位置k有一个0。如果可以列出所有的n位二进制串，那么通过在子集和二进制串之间的对应就可以列出所有的子集。

一个n位二进制串也是一个在0到2^n-1之间的整数的二进制展开式。按照它们的二进制展开式，作为整数根据递增顺序可以列出这2^n个二进制串。为生成所有的n位二进制展开式，从具有n个0的二进制串000…00开始，然后继续找下一个更大的二进制展开式，直到得到111…11为止。在每一步找下一个更大的二进制展开式时先确定从右边起第一个不是1的位置，然后把这个位置的0变成1，它的右边的所有1变成0。

例 3.26 找出在1000100111后面的下一个更大的二进制串。

解：这个串最右边的0在右起第4位上，把这位变成1，它的右边的3位都变成0，就生成下一个更大的二进制串1000101000。

下面给出生成串$b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1b_0$的下一个更大的二进制串的算法：

算法 3.3.2

```
void nextbitstring(bn-1 bn-2 … b1 b0 不等于 111 … 11 的二进制串)
{
    i = 0;
    while(bi == 1)
    {
        bi = 0;
        i++;
    }
  bi = 1;
}
```

下面将给出生成集合$\{1,2,\cdots,n\}$的r-组合的算法，一个r-组合可以表示成一个序列，这个序列按照递增的顺序包含这个子集中的元素。使用在这个序列的字典顺序可以列出这些r-组合。

例如：集合{1,2,3,4}的2-组合可由下面的几个序列给出：

{1,2},{1,3},{1,4},{2,3},{2,4},{3,4}。

在$a_1a_2\cdots a_r$后面的下一个组合可以按下列的方法得到。首先，找到序列中使得$a_i\neq n-r+i$的最后元素a_i，然后用a_i+1代替a_i，且对于$j=i+1,i+2,\cdots,r$，用a_i+j-i代替a_j。

这就是按字典顺序生成下一组合的方法。

例 3.27 找到集合{1,2,3,4,5,6}在{1,2,5,6}后面的下一个更大的4-组合。

解：在具有$a_1=1,a_2=2,a_3=5,a_4=6$的项中使得$a_i\neq 6-4+i$的最后项是$a_2=2$，根

据上面的方法，为得到下一个更大的组合，执行 $a_2 \leftarrow a_2+1$ 得 $a_2=3$，然后置 $a_3=4$，$a_4=5$ 得下一个更大的组合{1,3,4,5}。

例 3.28 列出集合{1,2,3,4,5,6}所有 4-组合。

解：最小的一个 4-组合为{1,2,3,4}。根据上面方法，下一个为{1,2,3,5}。如此依次得到所有的 4-组合：

{1,2,3,4}，{1,2,3,5}，{1,2,3,6}；

{1,2,4,5}，{1,2,4,6}，{1,2,5,6}；

{1,3,4,5}，{1,3,4,6}，{1,3,5,6}；

{1,4,5,6}，{2,3,4,5}，{2,3,4,6}；

{2,3,5,6}，{2,4,5,6}，{3,4,5,6}。

下面给出这个生成下一个组合的算法：

算法 3.3.3

```
void nextr_combination({a1a2 … ar})
    //{a1a2 … ar}包含于{1,2, … ,n},且满足 a1 < a2 <…< ar 的不等于{n - r + 1, … ,n}的真子集
{
    i = r;
    while(ai == n - r + i)i -- ;
    ai++;
    for(j = i + 1; j <= r; j++)
        aj = ai + j - i;
}
```

3.4 生成函数及其应用

表示序列的一种有效方法就是生成函数，它把序列的项作为一个形式幂级数中变量 x 的幂的系数。可以用生成函数求解许多类型的计数问题，例如在各种限制下选取或分配不同种类物体的方式数，使用不同面额的硬币换 10 元钱的方式数等，还可以用生成函数求解递推关系。

3.4.1 生成函数的定义

定义 3.5 实数序列 $a_0,a_1,\cdots,a_k,\cdots$的生成函数是无穷级数

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

例如序列$\{a_k\}$具有 $a_k=3$，$a_k=k+1$ 和 $a_k=2^k$ 的生成函数分别为

$$\sum_{k=0}^{\infty}3x^k,\quad \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k,\quad \sum_{k=0}^{\infty}2^kx^k$$

可以通过置 $a_{n+1}=0,a_{n+2}=0,\cdots$把一个有限的序列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 扩充成一个无限的序列，就可以定义一个实数的有限序列的生成函数。这个有限序列$\{a_n\}$的生成函数为 $G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$。

例 3.29 求序列 1,1,1,1,1,1 的生成函数。

解：序列 1,1,1,1,1,1 的生成函数是 $G(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5=\dfrac{x^6-1}{x-1}$。

例 3.30 设 m 是正整数，令 $a_k=C_m^k,k=0,1,\cdots,m$，那么序列 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 的生成函数是什么？

解：$G(x)=C_m^0+C_m^1x+\cdots+C_m^mx^m$，根据二项式定理得 $G(x)=(1+x)^m$。

表 3.1 列出了几个有用的生成函数。

表 3.1 几个有用的生成函数

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k$	C_n^k
$(1+ax)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ka^kx^k$	$C_n^ka^k$
$\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k$	当 $k\leqslant n$ 时为 1，否则为 0
$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$	1
$\dfrac{1}{1-ax}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a^kx^k$	a^k
$\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$	$k+1$
$\dfrac{1}{(1-x)^n}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^kx^k$	C_{n+k-1}^k
$e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$	$\dfrac{1}{k!}$
$\ln(1+x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^k=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots$	$\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$

3.4.2 生成函数求解计数问题

$G(x)=(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kx^k$ 是组合数 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$ 的生成函数，称 $(1+x)^n$ 为组合问题的生成函数。我们的目的是求组合问题的解，而不是由组合问题的解求出生成函数。因此，希望能对具体的问题构造出生成函数，再由 x^k 的系数来求组合问题的解，即组合问题的解是某生成函数所对应的数列通项。

考虑 $(1+x)^n=\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{n}$，$C_n^r$ 所考虑的组合数是 n 个对象中取 r 个进行组合的方式数，每个因子 $(1+x)$ 代表一个对象，因子中有 2 项，$1=x^0$ 表示没取到该对象，$x=x^1$ 表示取到了该对象，每个因子正好提供这个对象取到还是没取到的两种信息。二项式展开时，x^r 是由于这些因子中有 r 个取的是 x，$(n-r)$ 个取的是 1 而产生的。

$$x^r=x^{r_1+r_2+\cdots+r_n}=x^{r_1}\cdot x^{r_2}\cdot\cdots\cdot x^{r_n}$$

其中，

$$r_k=\begin{cases}0, & \text{没取到第 } k \text{ 个对象}\\ 1, & \text{取到第 } k \text{ 个对象}\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} r_k = r$$

x^r 前的系数 C_n^r 应该是含 x^r 的单项的系数之和，任意取到 r 个对象都会构成一个 x^r 的单项，C_n^r 也正是 n 个对象中任选 r 个的方式数。把生成函数 $G(x)=(1+x)^n$ 看成是用这种思想构造出来的。有 n 个对象，就对应 n 个因子，每个因子包括题意中可能出现的情况，如取到或取不到，取到的个数以 x 的指数形式表示，把这种思想加以扩充，扩充到一种对象可取多个的情况。n 类可以重复选取的对象(充分供应)，任取 r 个的组合数，也就是 3.2.3 节是讨论的有重复的组合问题。如果用生成函数来解，可以想到，应该有 n 个因子，由于每类对象都可以无限制地选取，因此，每个因子应形如$(1+x+x^2+\cdots)$，x 的指数正是此对象被选取的次数。

$$G(x) = (1+x+x^2+\cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n$$

只需求展开式中 x^r 前的系数 a_r 就够了。

对 $G(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)^n$ 求 r 次导数：

$$G^{(r)}(x) = n(n+1)\cdots(n+r-1)\frac{1}{(1-x)^{n+r}} \tag{3.1}$$

令：$G(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_rx^r+\cdots+a_nx^n+\cdots$

$$\begin{aligned} G^{(r)}(x) &= a_r r! + a_{r+1}\cdot(r+1)r\cdots2\cdot x+\cdots \\ &\quad + a_n\cdot n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r}+\cdots \end{aligned} \tag{3.2}$$

将 $x=0$ 分别代入式(3.1)和式(3.2)，分别得到式(3.3)和式(3.4)

$$G^{(r)}(0) = n(n+1)\cdots(n+r-1) \tag{3.3}$$

$$G^{(r)}(0) = a_r r! \tag{3.4}$$

由式(3.3)和式(3.4)得

$$a_r = \frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = C_{n+r-1}^r$$

所得结论与 3.2.3 节一致。

例 3.31 用生成函数求解例 3.21。

解：$x_1+x_2+x_3=11$ 的非负解可看作 3 个元素重复计数的 11-组合数。

因为每个对象可以取任意个数，故因子为 $1+x+x^2+\cdots$，则生成函数

$$G(x) = (1+x+x^2+\cdots)^3 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3$$

展开式中 x^{11} 的系数 a_{11} 即为解。

$$a_{11} = \frac{G^{(11)}(0)}{11!} = \frac{3\times4\times5\times\cdots\times13}{11!} = \frac{13!}{11!2!} = 78$$

例 3.32 若对例 3.31 的问题的解添加一些限制。如求 $x_1+x_2+x_3=11$ 的非负解的个数且满足 $2\leqslant x_1\leqslant5$，$3\leqslant x_2\leqslant4$，$2\leqslant x_3\leqslant6$。

解：对于对象 x_1 要满足 $2\leqslant x_1\leqslant5$，则对应因子为 $x^2+x^3+x^4+x^5$。同理，对象 x_2 对应的因子为 x^3+x^4，对象 x_3 对应的因子为 $x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$。

则生成函数 $G(x)=(x^2+x^3+x^4+x^5)(x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$。

$G(x)$中 x^{11}的系数为 8。

故满足条件的 $x_1+x_2+x_3=11$ 的非负解的个数为 8。

例 3.33 把 8 块相同的饼干分给 3 个不同的孩子,如果每个孩子至少接受 2 块饼干并且不超过 4 块饼干,那么有多少种不同的方式?

解:每个孩子是一个对象,因为他们每个人都必须接受 2 块饼干并且不超过 4 块饼干,则对应的因子为 $x^2+x^3+x^4$,则生成函数 $G(x)=(x^2+x^3+x^4)^3$。

因为 $G(x)$中 x^8 的系数等于 6,故存在着 6 种分配方案。

例 3.34 某单位有 8 个男同志,5 个女同志,现要组织一个由偶数个男同志和不少于 2 个女同志组成的工作组,有多少种组织法?

解:男同志取偶数个,有 0,2,4,6,8 五种情况,但是男同志不能看成一类对象,8 个男同志是 8 个不同的人。选取的人数定下后选谁还有不同的方案,如果选 2 人参加,就有 C_8^2 种方案。因此有关男同志的因子应为 $C_8^0+C_8^2x^2+C_8^4x^4+C_8^6x^6+C_8^8x^8$。同理,女同志的因子应为 $C_5^2x^2+C_5^3x^3+C_5^4x^4+C_5^5x^5$。

该生成函数
$$\begin{aligned} G(x) &= (C_8^0+C_8^2x^2+C_8^4x^4+C_8^6x^6+C_8^8x^8)(C_5^2x^2+C_5^3x^3+C_5^4x^4+C_5^5x^5) \\ &= 10x^2+10x^3+285x^4+281x^5+840x^6+728x^7 \\ &\quad +630x^8+350x^9+150x^{10}+38x^{11}+5x^{12}+x^{13} \end{aligned}$$

有 10 种方法组织 2 人小组;

有 10 种方法组织 3 人小组;

有 285 种方法组织 4 人小组;

有 281 种方法组织 5 人小组。

3.4.3 使用生成函数求解递推关系

可以通过找相关生成函数的显式公式来求解关于一个递推关系和初始条件的解。

例 3.35 求解递推关系 $a_k=3a_{k-1}, k=1,2,\cdots$且初始条件 $a_0=2$。

解:设 $G(x)$是序列$\{a_n\}$的生成函数。

即

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \tag{3.5}$$

$$3xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty}3a_kx^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}3a_{k-1}x^k \tag{3.6}$$

式(3.5)-式(3.6)得

$$\begin{aligned} G(x)-3xG(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-\sum_{k=1}^{\infty}3a_{k-1}x^k \\ &= a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k-\sum_{k=1}^{\infty}3a_{k-1}x^k \\ &= a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-3a_{k-1})x^k \\ &= a_0 \end{aligned}$$

$$G(x)=\frac{a_0}{1-3x}=\frac{2}{1-3x}=2\sum_{k=0}^{\infty}3^k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}2\cdot 3^k x^k$$

于是 $a_k=2\cdot 3^k$。

例 3.36 设一个有效的编码是一个包含偶数个 0 的 n 位十进制数字串。令 a_n 表示 n 位有效编码字的个数，已经知道序列$\{a_n\}$的递推关系是 $a_n=8a_{n-1}+10^{n-1}$ 及初始条件 $a_1=9$，使用生成函数找出关于 a_n 的显式公式。

解：为了简化关于生成函数的推导，通过置 $a_0=1$ 将序列扩充，当把这个值赋给 a_0 并且使用递推关系就得到 $a_1=8a_0+10^0=9$，这与初始条件一致（由于存在长度为 0 的编码字——空串，这也是有意义的）。

序列$\{a_n\}$的生成函数

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \tag{3.7}$$

$$8xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty}8a_k x^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}8a_{k-1}x^k \tag{3.8}$$

式(3.7)－式(3.8)得

$$\begin{aligned}(1-8x)G(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k-\sum_{k=1}^{\infty}8a_{k-1}x^k\\&=a_0x^0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^k-\sum_{k=1}^{\infty}8a_{k-1}x^k\\&=1+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-8a_{k-1})x^k\\&=1+\sum_{k=1}^{\infty}10^{k-1}x^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}10^{k-1}x^k+1-10^{-1}\\&=\frac{1}{10(1-10x)}+\frac{9}{10}=\frac{1-9x}{1-10x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(x)&=\frac{1-9x}{(1-10x)(1-8x)}=\frac{1}{2(1-10x)}+\frac{1}{2(1-8x)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}10^k x^k+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}8^k x^k\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(10^k+8^k)x^k\end{aligned}$$

于是，有 $a_n=\frac{1}{2}(10^n+8^n)$。

例 3.37 Fibonacci(斐波拉契)数列的递推关系为 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$。当 $n>2$，初始条件为 $a_1=1,a_2=1$。试利用生成函数求$\{a_n\}$的显式公式。

解：同例 3.36 一样，通过置 $a_0=0$ 将序列扩充。

序列$\{a_n\}$的生成函数

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \tag{3.9}$$

$$xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1} \tag{3.10}$$

$$x^2G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+2} \tag{3.11}$$

式(3.9)－式(3.10)－式(3.11)得

$$\begin{aligned}(1-x-x^2)G(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+2}\\&=a_0+a_1x+\sum_{k=2}^{\infty}a_kx^k-a_0x-\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+2}\\&=x+\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+2}x^{k+2}-\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}x^{k+2}-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+2}\\&=x+\sum_{k=0}^{\infty}(a_{k+2}-a_{k+1}-a_k)x^{k+2}\\&=x\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}G(x)&=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}-\frac{1}{\sqrt{5}\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^kx^k-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^kx^k\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]x^k\end{aligned}$$

所以 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。

3.5 鸽巢原理

3.5.1 一般的鸽巢原理

先看下面几个例子：

(1) 367 个人中必然有至少 2 个人生日相同。

(2) 抽屉里散放着 10 双手套，从中任意抽取 11 只，其中至少有 2 只是成双的。

(3) 某些会议有 n 位代表参加，每位代表认识其他代表中某些人，则至少有两个认识的人数是一样的。

(4) 在 27 个英文单词中一定至少有 2 个单词以同一个字母开始。

这些例子的道理都很简单，以第 1 个例子为例，一年最多 366 天(闰年)，367 个人至少有 2 个人的生日相同。第 4 个例子因为英文字母表中只有 26 个字母。这些例子都可以通俗地用鸽巢原理来描述。

一群鸽子飞入一组鸽巢安歇，如果鸽子数比鸽巢数多，那么一定至少有一个鸽巢里至少有 2 只鸽子。

定理 3.9 如果 $k+1$ 个或更多的物体放入 k 个盒子，那么至少有 1 个盒子包含了 2 个或更多的物体。

证明：假定 k 个盒子中没有 1 个盒子包含的物体多于 1 个，那么物体总数至多是 k，这与至少有 $k+1$ 个物体矛盾。

鸽巢原理也叫狄利克莱(G. L. Dirichlet)抽屉原理。以 19 世纪的法国数学家狄利克莱命名，他经常在工作中使用这个原理。

例 3.38 如果考试给分是从 0 到 100，班上必须有多少个学生才能保证在这次期终考试中至少有 2 个学生得到相同的分数？

解：期终考试有 101 个分数，鸽巢原理证明在 102 个学生中一定至少有 2 个学生是有相同的分数。

例 3.39 从 1 到 $2n$ 的正整数中人取 $n+1$ 个，则这 $n+1$ 个数中至少有一对数，其中一个数是另一个数的倍数。

证明：设所取 $n+1$ 个数是 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$，对 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$序列中的每一个数去掉一切 2 的因子，直到剩下一个奇数为止，例如 $68=2\times 34=2\times 2\times 17$，去掉因子 2，留下奇数 17，结果得到由奇数组成的序列 $r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}$，1 到 $2n$ 中只有 n 个奇数，故序列 $r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}$中至少有两个是相同的。

不妨设 $r_i=r_j=r$，则对应地有 $a_i=2^{e_i}r$，$a_j=2^{e_j}r$（其中 e_i 为 a_i 中因子 2 的个数，e_j 为 a_j 中因子 2 的个数）。若 $a_i>a_j$，则 a_i 是 a_j 的倍数。

3.5.2 推广的鸽巢原理

鸽巢原理指出当物体比盒子多时，一定至少有 2 个物体在同 1 个盒子里。但是当物体数超过盒子数的倍数时可以得到更多的结果。例如，有 21 只鸽子，只有 10 个鸽巢，则至少有 1 个鸽巢中住着 3 只鸽子。

定理 3.10 （推广的鸽巢原理）如果 N 个物体放入 k 个盒子，那么至少有 1 个盒子包含了至少$\lceil N/k \rceil$个物体。其中$\lceil x \rceil$是不小于 x 的最小整数。

证明：假定没有盒子包含了比$\lceil N/k \rceil-1$ 多的物体，那么物体总数至多是

$$k(\lceil N/k \rceil-1)<k[(N/k+1)-1]=N$$

这与存在有总数为 N 个物体矛盾。这里用到不等式$\lceil N/k \rceil<N/k+1$。

例 3.40 在 100 个人中至少有$\lceil 100/12 \rceil=9$ 个人生日在同一个月。

例 3.41 如果有 5 个可能的成绩 A, B, C, D, E，那么在一个离散数学班里至少要多少个学生才能保证有 7 个学生得到同 1 个分数？

解：为保证至少有 7 个学生得到相同的分数所需的最少学生数是使得$\lceil N/5 \rceil=7$ 的最小整数 N。这样的最小整数 $N=5\times 6+1=31$。于是 31 是保证至少 7 个学生得到相同的分数所需要的最少学生数。

在鸽巢原理的许多有趣应用中必须使用某种巧妙的公式选择放入盒子的物体。下面将描述这样的一些应用。

例 3.42 每个由 n^2+1 个不同实数构成的序列都包含一个长为 $n+1$ 的严格递增子序列或严格递减子序列。例如序列 8,11,9,1,4,6,12,10,5,7 包含 10 项,则一定存在长为 4 的递增子序列或递减子序列。这些序列有 {1,4,6,12},{1,4,6,7},{1,4,6,10},{1,4,5,7},{11,9,6,5}。

证明:令 $a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$ 是 n^2+1 个不同的实数的序列。和序列中的每一项 a_k 联系着一个有序对,即 (i_k,d_k),其中 i_k 是从 a_k 开始的最长的递增子序列的长度,且 d_k 是从 a_k 开始的最长的递减子序列的长度。

假定没有长为 $n+1$ 的递增或递减子序列,那么 i_k 和 d_k 都是小于或等于 n 的正整数,由乘法法则:(i_k,d_k) 存在 n^2 个可能的有序对。根据鸽巢原理,n^2+1 个有序对中必有 2 个相等。换句话说,存在项 a_s 和 a_t,$s<t$,使得 $i_s=i_t$ 和 $d_s=d_t$,我们将证明这是不可能的。由于序列的项是不同的,不是 $a_s<a_t$ 就是 $a_t<a_s$。如果 $a_s<a_t$ 那么由于 $i_s=i_t$,那么把 a_s 加到从 a_t 开始的递增子序列前面就构造出一个从 a_s 开始的长为 i_s+1 的递增子序列,从而产生矛盾。类似地,如果 $a_t<a_s$,可以证明 d_s 一定大于 d_t,从而也产生矛盾。

例 3.43 假定一组有 6 个人,任意 2 个人或者是朋友或者是敌人。证明在这组人中或存在 3 个人彼此都是朋友,或存在 3 个人彼此都是敌人。

证明:令 A 是 6 个人中的 1 人,但是其他 5 个人中至少有 3 个人是 A 的朋友或至少有 3 个人是 A 的敌人。这可从推广的鸽巢原理得出,因为当 5 个物体被分成 2 个集合时,其中的 1 个集合至少有 $\lceil 5/2 \rceil=3$ 个元素。若是前一种情况,假定 B,C,D 是 A 的朋友,如果这 3 人中有 2 个人也是朋友,那么这 2 个人与 A 构成彼此是朋友的 3 人组,否则 B,C,D 构成彼此是敌人的 3 人组。对于后一种情况,当 A 存在 3 个或更多的敌人时可以用类似的方法证明。

这个例子说明了怎样把推广的鸽巢原理用于组合数学的重要部分——拉姆赛理论,它是以英国数学家拉姆赛(F. P. Ramsey)而命名的。一般地说,拉姆赛理论可用于处理集合元素的子集分配问题。

3.6 容斥原理

3.6.1 容斥原理

容斥原理是计数中常用的一种方法,先看下面的例子:求不超过 20 的正整数中为 2 或 3 的倍数的数的个数。

不超过 20 的正整数中为 2 的倍数的数有 10 个:2,4,6,8,10,12,14,16,18,20;不超过 20 的正整数中为 3 的倍数的数有 6 个:3,6,9,12,15,18。但其中为 2 或 3 的倍数的数只有 13 个,而不是 10+6=16 个,即 2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,其中 6,12,18 同时为 2 和 3 的倍数,若计算 10+6=16,则 6,12,18 三个数都重复计算了一次。

这里引入集合,用求集合的元素个数来求解更为广泛的计数问题。

定理 3.11 设 A,B 是两个有限集合,则 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$。其中 $|A|$,$|B|$ 分别表示集合 A,B 的元素个数。

证明：(1) 当 $A\cap B=\varnothing$ 时，由于 A,B 无公共部分，故 $A\cup B$ 的元数就是 A 的元素与 B 的元素之和，如图 3.6(a)所示。

(2) 当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，A,B 的公共元素的个数是 $|A\cap B|$，在计算 $|A\cup B|$ 时，$A\cap B$ 的元素只能计算一次，但在计算 $|A|+|B|$ 时，$A\cap B$ 的元素计算了两次，故 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$，如图 3.6(b)所示。

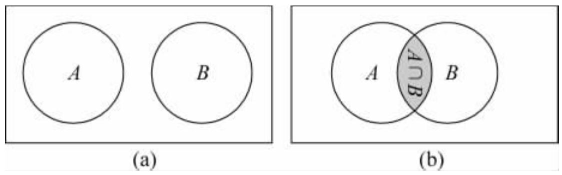

图 3.6 $A\cup B$ 的两种情况

此定理称为容斥定理(包容排斥定理)。

例 3.44 以 1 开始或者以 00 结束的 8 位二进制符号串有多少个?

解：设 A 为以 1 开始的 8 位二进制符号串集合，B 为以 00 结束的 8 位二进制符号串集合。已知 $|A|=2^7=128$，$|B|=2^6=64$，$A\cap B$ 表示以 1 开始 00 结束的 8 位二进制符号串集合，故 $|A\cap B|=2^5=32$。以 1 开始或者以 00 结束的 8 位二进制符号串全体可以用 $A\cup B$ 来表示。根据容斥原理：

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=128+64-32=160$$

例 3.45 假设我院有 1807 个新生，这些学生中有 453 人选了一门计算机科学课，567 人选了一门数学课，299 人同时选了计算机科学课和数学课。有多少学生既没有选计算机科学课也没有选数学课?

解：为找出既没有选数学课也没有选计算机科学课的新生数，就要从新生总数中减去至少选了其中一门课的学生数。设：A 为选择计算机课的新生集合，B 为选择数学课的新生集合，则有 $|A|=453$，$|B|=567$ 且 $|A\cap B|=299$。选了一门计算机科学或数学课的学生数是

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=453+567-299=721$$

因此，存在 $1807-721=1086$ 个新生既没选计算机科学课，也没选数学课。

接着要推导求 n 个(n 为任意正整数)有限集合的并集中的元素数。先推导 3 个集合的并集的元素数。

设 A,B,C 为 3 个有限集，一般情况如图 3.7 所示，从图中可以看出集合 $A\cup B\cup C$ 由 7 部分组成。

Ⅰ部分的元素个数为 $|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$；

Ⅱ部分的元素个数为 $|B|-|A\cap B|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$；

Ⅲ部分的元素个数为 $|C|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$；

Ⅳ部分的元素个数为 $|A\cap B|-|A\cap B\cap C|$；

Ⅴ部分的元素个数为 $|A\cap C|-|A\cap B\cap C|$；

Ⅵ部分的元素个数为 $|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$；

Ⅶ部分的元素个数为 $|A\cap B\cap C|$。

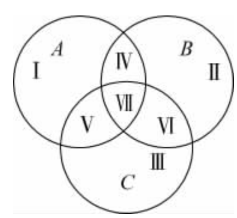

图 3.7 $A\cup B\cup C$ 的组成部分

则$|A\cup B\cup C|=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$

$+|B|-|A\cap B|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

$+|C|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

$+|A\cap B|-|A\cap B\cap C|$

$+|A\cap C|-|A\cap B\cap C|$

$+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$

$+|A\cap B\cap C|$

$=(|A|+|B|+|C|)-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C|$

把这推广到 n 个有限集的情况，有如下的定理。

定理 3.12 (一般的容斥原理) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$是有限集，那么

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j| \\ &\quad+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots \\ &\quad+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\end{aligned}$$

证明：将通过证明并集中的每个元素在等式的右边恰好被计数一次来证明这个公式。

假设a中恰好是$A_1,A_2,\cdots,A_n$中r个集合的成员，其中$1\leqslant r\leqslant n$。这个元素被$\sum_{i=1}^{n}|A_i|$计数了 C_r^1 次。被$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|$计数了 C_r^2 次，一般来说，它被涉及 m 个集合的求和计数了 C_r^m 次，于是，这个元素恰好被等式右边的表达式计数了 $C_r^1-C_r^2+\cdots+(-1)^{r+1}C_r^r$ 次。

根据二项式定理，有 $C_r^0-C_r^1+C_r^2-\cdots+(-1)^rC_r^r=0$。

得 $C_r^1-C_r^2+\cdots+(-1)^{r+1}C_r^r=C_r^0=1$。

因此，并集中的每个元素在等式右边的表达式中恰好被计数 1 次，即证。

例 3.46 1232 个学生选了西班牙语课，879 个学生选了法语课，114 个学生选了俄语课，103 个学生选了西班牙语和法语课，23 个学生选了西班牙语和俄语课，14 个学生选了法语和俄语课。如果 2092 个学生至少在西班牙语，法语和俄语中选 1 门，有多少个学生选了所有这 3 门语言课？

解：设S 是选西班牙语课的学生集合；

F 是选法语课的学生集合；

R 是选俄语课的学生集合。

那么$|S|=1232$，$|F|=879$，$|R|=114$，$|S\cap F|=103$，$|S\cap R|=23$，$|F\cap R|=14$ 且$|S\cup F\cup R|=2092$。

根据容斥原理：

$|S\cup F\cup R|=|S|+|F|+|R|-|S\cap F|-|S\cap R|-|F\cap R|+|S\cap F\cap R|$

得 $2092=1232+879+114-103-23-14+|S\cap F\cap R|$

$$|S\cap F\cap R|=7$$

因此存在 7 个学生选了所有这 3 门语言课。

3.6.2 容斥原理的应用

例 3.47 求在 1 和 1000 之间不能被 5 和 6 整除，也不能被 8 整除的数的个数。

解：设 1 到 1000 之间的整数构成全集 E，A，B，C 分别表示其中可被 5，6 或 8 整除的数的集合。

则 $|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$，$|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$，$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$，式中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数。

$A\cap B$ 表示能同时被 5 和 6 整除的数。即能够被 5 和 6 的最小公倍数 30 整除的数。

则 $|A\cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33$，同理 $|A\cap C|=\lfloor 1000/40 \rfloor=25$，

$|B\cap C|=\lfloor 1000/24 \rfloor=41$，$|A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/120 \rfloor=8$。

根据容斥原理，得

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C| &= (|A|+|B|+|C|) \\
&\quad -(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C| \\
&= 200+166+125-33-25-41+8=400
\end{aligned}
$$

则 $|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|E|-|A\cup B\cup C|=1000-400=600$。

所以，不能被 5，6 和 8 整除的数有 600 个。

可以用例 3.47 的方法找出不超过一个给定的正整数的素数个数。一个合数可以被一个不超过它的平方根的素数整除。因此，为找出不超过 100 的素数个数，首先注意到不超过 100 的合数一定有一个不超过 10 的素因子。由于小于 10 的素数只有 2，3，5，7，因此不超过 100 的素数就是这 4 个素数以及那些大于 1 和不超过 100 且不被 2，3，5 和 7 整除的正整数。

同例 3.47 一样的计算方法，1 到 100 内能够被 2，3，5 或 7 整除的数的个数为

$$
\begin{aligned}
&=\left\lfloor\frac{100}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{7}\right\rfloor \\
&\quad-\left\lfloor\frac{100}{2\times 3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{2\times 5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{2\times 7}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{3\times 5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{3\times 7}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{100}{5\times 7}\right\rfloor \\
&\quad+\left\lfloor\frac{100}{2\times 3\times 5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{2\times 3\times 7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{2\times 5\times 7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{3\times 5\times 7}\right\rfloor \\
&\quad-\left\lfloor\frac{100}{2\times 3\times 5\times 7}\right\rfloor \\
&=50+33+20+14-16-10-7-6-4-2+3+2+1+0-0=78
\end{aligned}
$$

1 到 100 之间不能被 2，3，5，7 整除数的个数为 $100-78=22$ 个。则 100 以内的素数应在 22 个数内除去 1 这个数，再加上 2，3，5，7 这 4 个数，共 $22-1+4=25$ 个素数。

于是存在 25 个不超过 100 的素数。

可以用伊拉脱森(Eratosthens)筛求不超过一个给定正整数的所有的素数。首先，保留 2 而将其余那些被 2 整除的整数删除，因为 3 是保留下来的第一个大于 2 的整数，除 3 之外，删除其余那些被 3 整除的整数，因为 5 是在 3 后面下一个留下来的整数，除 5 之外删除其余被 5 整除的整数，下一个留下的整数是 7，因此留下 7，删除其余那些被 7 整除的整数。由于所有不超过 100 的合数被 2，3，5 或 7 整除，那么所有留下来的大于 1 的数是素数。

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

（1）除 2 以外删除 2 的倍数

	2	3	5	7	~~9~~
11		13	~~15~~	17	19
~~21~~		23	25	~~27~~	29
31		~~33~~	35	37	~~39~~
41		43	~~45~~	47	49
~~51~~		53	55	~~57~~	59
61		~~63~~	65	67	~~69~~
71		73	~~75~~	77	79
~~81~~		83	85	~~87~~	89
91		~~93~~	95	97	~~99~~

（2）除 3 以外删除 3 的倍数

	2	3	5	7	
11		13		17	19
		23	~~25~~		29
31			~~35~~	37	
41		43		47	49
		53	~~55~~		59
61			~~65~~	67	
71		73		77	79
		83	~~85~~		89
91			~~95~~	97	

（3）除 5 以外删除 5 的倍数

	2	3	5	7	
11		13		17	19
		23			29
31				37	
41		43		47	~~49~~
		53			59
61				67	
71		73		~~77~~	79
		83			89
~~91~~				97	

（4）除 7 以外删除 7 的倍数

得到 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97 25 个素数。

习题 3

1. 一个学院有 180 个数学专业和 300 个计算机科学专业的学生。

(1) 选两个代表,使得一个是数学专业的学生且另一个是计算机科学专业的学生,有多少种方式?

(2) 选一个数学专业的或计算机科学专业的学生作代表又有多少种方式?

2. 在一场 12 匹马的赛马中,如果所有的比赛结果都是可能的,对于第一名、第二名和第三名有多少种可能性?

3. 有 6 个不同的同学竞选班长,有多少种不同的次序在选票上打印竞选者的名字?

4. 一个 10 元素集合有多少个子集含有奇数个元素?

5. 一个老师写了 30 道的离散数学的真假判断题,其中有 16 道为真。如果按照任意的次序排列这些题,可能有多少种不同的答案?

6. 求$(x+y)^{15}$的展开式中 x^7y^8 的系数,$(2x+3y)^{15}$的展开式中 x^7y^8 的系数,$(2x-3y)^{15}$的展开式中的 x^8y^7 系数。

7. 从一个 3 元素集合中允许重复有序选取 5 个元素有多少种不同的方式?从一个 3 元素集合中允许重复地无序选取 5 个元素有多少种不同的方式?

8. 一个小猪储钱罐有 100 个相同的 5 角和 80 个 1 元的硬币,从中选出 8 个硬币有多少种方式?

9. 一个小猪储钱罐有 1 分、2 分、5 分、1 角、5 角和 1 元等硬币,从中选出 20 个硬币有多少种方式?

10. 设 x_1,x_2,x_3,x_4 是非负整数,方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=17$ 有多少个解?

11. 设 x_1,x_2,x_3 是非负整数,不等式 $x_1+x_2+x_3\leqslant 11$ 有多少个解?

12. 假设一个大家庭有 14 个孩子,包括 2 组三胞胎,3 组双胞胎,以及 2 个单胞胎。这些孩子坐在一排椅子上,如果相同的三胞胎或双胞胎的孩子不能互相区分,那么有多少种不同的方式?

13. 使用 MISSISSIPPI 中的所有字母可以构成多少个不同的串?使用 ABRACADABR 中的所有字母可以构成多少个不同的串?

14. 有多少种不同的方式在 xyz 空间上从原点(0,0,0)到达(4,3,5)点?这个旅行的每一步是在 x 的正方向移动一个单位,y 的正方向移动一个单位,或者 z 的正方向移动一个单位,负方向的移动是禁止的。

15. 把一副标准的 52 张扑克牌发给 5 个人,每人得 7 张,有多少种不同的方式?把一副标准的 52 张扑克牌平均发给 4 个人,有多少种不同的方式?

16. 有多少种不同的方式把 5 个不同的物体放到 3 个不同的盒子里?有多少种不同的方式把 5 个相同的物体放到 3 个不同的盒子里?

17. 找出按照字典顺序跟在下面每个排列后面的下一个更大的排列。

(1) 1432。 (2) 54123。 (3) 12453。

(4) 45231。 (5) 6714235。 (6) 31528764。

18. 按照字典顺序排列下述{1,2,3,4,5,6}的排列：234561,231456,165432,156423,543216,541236,231465,314562,432561,654321,654312,435612。

19. 使用算法 3.3.1 按照字典顺序生成前 4 个正整数的 24 个排列。

20. 使用算法 3.3.2 列出集合{1,2,3,4}的所有子集。

21. 使用算法 3.3.3 列出集合{1,2,3,4,5}的所有的 3-组合。

22. 求有穷序列 2,2,2,2,2,2 的生成函数。

23. 求下面每个序列的生成函数。

(1) 0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,…。

(2) 2,4,8,16,32,64,128,256,…。

(3) 0,0,3,−3,3,−3,3,−3,…。

(4) 0,1,−2,4,−8,16,−32,64,…。

24. 求关于序列$\{a_n\}$的生成函数。

(1) $a_n=5$,对所有的 $n=0,1,2,\cdots$。

(2) $a_n=3^n$,对所有的 $n=0,1,2,\cdots$。

(3) $a_n=1/(n+1)!$,对所有的 $n=0,1,2,\cdots$。

(4) $a_n=C_n^2$,对所有的 $n=2,\cdots$。

25. 对于下面每一个生成函数,求对应的序列。

(1) $(3x-4)^3$。

(2) $(x^3+1)^3$。

(3) $1/(1-5x)$。

(4) $1/(1-2x^2)$。

26. 求出下列每个函数的幂级数中 x^{12} 的系数。

(1) $1/(1+3x)$。

(2) $1/(1-2x)^2$。

(3) $1/(1+x)^8$。

(4) $1/(1-4x)^3$。

27. 把 10 个相同的球分给 4 个孩子,如果每个孩子至少得到 2 个球,使用生成函数确定不同的分法数。

28. 把 12 个相同的图片分给 5 个孩子,如果每个孩子至多得到 3 张,使用生成函数确定不同的分法数。

29. 从包含 100 个红球、100 个蓝球和 100 个绿球的罐子中选 14 个球,使得篮球不少于 3 个且不多于 10 个。假定不考虑选球的顺序,使用生成函数求出选法数。

30. 求序列$\{c_k\}$的生成函数,其中 c_k 是使用 1 美元、2 美元、5 美元和 10 美元纸币换 k 美元的方法数。

31. 使用生成函数求出换 1 美元的方式数。

(1) 用 10 美分和 25 美分。

(2) 用 5 美分、10 美分和 25 美分。

(3) 用 1 美分、10 美分和 25 美分。

(4) 用 1 美分、5 美分、10 美分和 25 美分。

32. 使用生成函数求解递推关系 $a_k=7a_{k-1}$,初始条件 $a_0=5$。

33. 使用生成函数求解递推关系 $a_k=3a_{k-1}+2$,初始条件 $a_0=1$。

34. 使用生成函数求解递推关系 $a_k=3a_{k-1}+4^{k-1}$,初始条件 $a_0=1$。

35. 使用生成函数求解递推关系 $a_k=5a_{k-1}-6a_{k-2}$,初始条件 $a_0=6$ 和 $a_1=30$。

36. 假定周末不排课,证明在任一组 6 门课中一定有 2 门课安排在同一天上课。

37. 证明在任意给定的 5 个正整数中(不一定连续)有 2 个整数被 4 除的余数相同。

38. 一个碗里有 10 个红球和 10 个蓝球。一位女士不看着球而随机地选取。

(1) 她必须选多少个球才能保证至少有 3 个球是同色的?

(2) 她必须选多少个球才能保证至少有 3 个球是蓝色的?

39. 一个计算机网络由 6 台计算机组成,每台计算机至少连接到 1 台其他计算机。证明网络中至少有 2 台计算机直接连接相同数目的其他计算机。

40. 在序列 22,5,7,2,23,10,15,21,3,17 中找出一个最长的递增子序列和一个最长的递减子序列。

41. 用伪码描述一个算法产生一个不同数据的序列的最大递增或递减子序列。

42. 一个学院有 345 个学生选了微积分课,212 个学生选了离散数学课,188 个学生同时选了微积分和离散数学课,有多少学生选了微积分或离散数学课?

43. 求 $A\cup B\cup C$ 中的元素数,如果每个集合有 100 个元素,并且

(1) 这些集合是两两不交的。

(2) 每对集合存在 50 个公共元素,并且没有元素在所有这 3 个集合里。

(3) 每对集合存在 50 个公共元素,并且有 25 个元素在所有这 3 个集合里。

(4) 这些集合是相等的。

44. 一个学校有 2504 个计算机科学专业的学生,其中 1876 人选修了 Pascal,999 人选修了 FORTRAN,345 人选修了 C,876 人选修了 Pascal 和 FORTRAN,231 人选修了 FORTRAN 和 C,290 人选修了 Pascal 和 C。如果 189 个学生选了 Pascal、FORTRAN 和 C,那么 2504 个学生中有多少学生没有选这 3 门程序设计语言课中的任何 1 种?

45. 有多少 8 位二进制串不包含 6 个连续的 0?

46. 在容斥原理所给出的有关 10 个集合并集元素数的公式中有多少项?

47. 根据容斥原理写出关于 5 个集合并集元素数的显示公式。

48. 用数学归纳法证明容斥原理。

49. 使用容斥原理求小于 200 的素数个数。

50. 一个整数叫作无平方的,如果它不被一个大于 1 的正整数的平方整除。求小于 100 的无平方的正整数个数。

51. 有多少个小于 10 000 的正整数不是一个整数的 2 次或更高次幂?