第3章 状态方程的解

第 2 章讨论了系统的状态空间模式数学模型的建立。一旦得到了系统的数学模型，下一步就是分析系统模型。对系统进行分析的目的，就是要揭示系统状态的运动规律和基本特性。通常对系统的分析有定性分析和定量分析两种。在定性分析中，重点介绍对决定系统行为和特性具有重要意义的几个关键性质，而能控性、能观测性和稳定性的研究将在第 4 章和第 5 章中讨论。在定量分析中，则要对系统的运动规律进行精确的研究，即定量地确定系统由外部激励作用所引起的响应。本章将讨论线性系统的定量分析问题，即状态方程的求解问题。

3.1 线性定常系统齐次状态方程的解

考虑 n 维线性定常系统状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t \geqslant t_0 \tag{3.1.1}$$

齐次状态方程是指输入为零的状态方程，即

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \tag{3.1.2}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)$为 n 维列向量，$\boldsymbol{x}(t_0)$为初始状态，$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 定常矩阵。要求确定状态变量未来的变化，即系统的状态响应 $\boldsymbol{x}(t)$。状态方程是一个向量微分方程，它的求解方法与标量一阶微分方程的求解方法相类似。大家知道，标量一阶微分方程的齐次方程为

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geqslant t_0$$

它的解为

$$x(t) = \mathrm{e}^{a(t-t_0)}x(t_0)$$

式中指数函数可展开为一无穷级数

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{a(t-t_0)} &= 1 + a(t-t_0) + \frac{1}{2!}a^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}a^n(t-t_0)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}a^n(t-t_0)^n\end{aligned}$$

与此类似，一阶向量微分方程的齐次方程$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$的解有如下

形式

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)$$

式中

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)} &= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}(t-t_0) + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n(t-t_0)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n(t-t_0)^n \end{aligned}\tag{3.1.3}$$

经过数学证明，如 $\boldsymbol{A}$ 为实数阵，则该级数是绝对收敛且一致收敛的。式(3.1.3)中的无穷矩阵级数的收敛式 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$ 叫作**矩阵指数**。

综上所述，得出下面的结论。

结论 3.1.1　方程式(3.1.2)满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t)|_{t=t_0}=\boldsymbol{x}(t_0)$ 的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)\tag{3.1.4}$$

当 $t_0=0$ 时，有

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)\tag{3.1.5}$$

该解是系统输入 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 时的解，故又称为**零输入解或零输入响应**。

例 3.1.1　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

解　根据定义

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} &= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \cdots \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & t\\ -t & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix}-t^2 & 0\\ 0 & -t^2\end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix}0 & -t^3\\ t^3 & 0\end{bmatrix} + \cdots \\ &= \begin{bmatrix}1-\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^4}{4!}-\cdots & t-\dfrac{t^3}{3!}+\dfrac{t^5}{5!}-\cdots \\ -t+\dfrac{t^3}{3!}-\dfrac{t^5}{5!}+\cdots & 1-\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^4}{4!}-\cdots\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\end{aligned}$$

从上式可以看出，若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 的方阵，则矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 也是一个 $n\times n$ 的方阵，它包含着 $n\times n$ 个级数，只有当其中的每个级数都收敛时，矩阵指数才是收敛的。前已涉及，如 $\boldsymbol{A}$ 为实数阵，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 对任何 t 绝对收敛且一致收敛。

3.2　矩阵指数

考虑到矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 在线性定常系统运动分析中的重要性，因此这里对其性质和计算方法作一比较系统和细致的讨论。

3.2.1 矩阵指数的性质

从矩阵指数函数的定义式(3.1.3)出发,可导出矩阵指数函数具有如下基本性质。

(1) 矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 对时间 t 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A} \tag{3.2.1}$$

证 根据定义

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^nt^n+\cdots$$

由于此无穷级数对任何有限 t 收敛,所以可将上式逐项对 t 求导,有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^3t^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{A}^nt^{(n-1)}+\cdots\\&=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{A}^{(n-1)}t^{(n-1)}+\cdots\right)\\&=\boldsymbol{A}\cdot e^{\boldsymbol{A}t}\\&=e^{\boldsymbol{A}t}\cdot\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

这一结论表明,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和与其对应的矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 是可以交换的。

(2) 设 t_1 和 t_2 为独立的自变量,则有

$$e^{\boldsymbol{A}(t_1+t_2)}=e^{\boldsymbol{A}t_1}e^{\boldsymbol{A}t_2} \tag{3.2.2}$$

证 根据定义

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{A}t_1}e^{\boldsymbol{A}t_2}&=\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t_1+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t_1^2+\cdots\right)\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t_2+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t_2^2+\cdots\right)\\&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(t_1+t_2)+\boldsymbol{A}^2\left(\frac{t_1^2}{2!}+t_1t_2+\frac{t_2^2}{2!}\right)+\boldsymbol{A}^3\left(\frac{t_1^3}{3!}+\frac{1}{2!}t_1^2t_2+\frac{1}{2!}t_1t_2^2+\frac{t_2^3}{3!}\right)+\cdots\\&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(t_1+t_2)+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2(t_1+t_2)^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3(t_1+t_2)^3\cdots\\&=e^{\boldsymbol{A}(t_1+t_2)}\end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{t\to0}e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}$ (3.2.3)

证 在式(3.1.3)中,令 $\lim\limits_{t\to t_0}(t-t_0)=0$,即可得证。

(4) $(e^{\boldsymbol{A}t})^{-1}=e^{-\boldsymbol{A}t}$ (3.2.4)

证 由性质(2),令 $t_2=-t_1$,得

$$e^{\boldsymbol{A}t_1}e^{-\boldsymbol{A}t_1}=e^{\boldsymbol{A}(t_1-t_1)}=e^{\boldsymbol{A}\cdot0}=\boldsymbol{I}$$

同理也可证明 $e^{-\boldsymbol{A}t}e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}$。

从这两个式子可以看出 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 和 $e^{-\boldsymbol{A}t}$ 是互为逆阵,从而性质(4)成立。

（5）对于 $n\times n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的，即

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA} \tag{3.2.5}$$

则有

$$\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t} \tag{3.2.6}$$

证　根据定义

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}&=\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2t^2+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^3t^3+\cdots\\&=\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2)\\&\quad+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{ABA}+\boldsymbol{AB}^2+\boldsymbol{BA}^2+\boldsymbol{BAB}+\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^3)t^3+\cdots\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\cdot\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}&=\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\cdots\right)\times\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{B}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{B}^3t^3+\cdots\right)\\&=\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2)+\frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}^3+3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{AB}^2+\boldsymbol{B}^3)+\cdots\end{aligned}$$

比较以上两式可以看出，仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，才有 $\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}$。

3.2.2　几个特殊的矩阵指数

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵，如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{3.2.7}$$

则 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 也为对角矩阵，且有

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{bmatrix} \tag{3.2.8}$$

证　把对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 代入定义式(3.1.3)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots\\&=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}t+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}\lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2\end{bmatrix}t^2+\cdots\end{aligned}$$

$$
= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\lambda_1^n t^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\lambda_2^n t^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\lambda_n^n t^n \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}
$$

可见,当 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵时,$e^{\boldsymbol{A}t}$ 的计算很简单。

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m \times m$ 的若尔当块,即

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \boldsymbol{0} \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & 1 \\ \boldsymbol{0} & & & & \lambda \end{bmatrix}_{m \times m} \tag{3.2.9}
$$

则矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 为

$$
e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & t \\ \boldsymbol{0} & & & & 1 \end{bmatrix}_{m \times m} \tag{3.2.10}
$$

证 把 $\boldsymbol{A}$ 代入定义式(3.1.3),则有

$$
e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 t^2 + \cdots
$$

由于

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \boldsymbol{0} \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \boldsymbol{0} & & & \lambda \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad \boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & & \boldsymbol{0} \\ & \lambda^2 & 2\lambda & \ddots & \\ & & \lambda^2 & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 2\lambda \\ \boldsymbol{0} & & & & \lambda^2 \end{bmatrix}_{m \times m}
$$

$$
\boldsymbol{A}^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & & \boldsymbol{0} & \\ & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & 1 \\ & & & & & & 3\lambda \\ & & & & & & 3\lambda^3 \\ & \boldsymbol{0} & & & & & \lambda^3 \end{bmatrix}_{m\times m}
$$

利用归纳法可以证明，如 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$ 代表任一幂函数，则有

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & f''(\lambda)/2! & f'''(\lambda)/3! & \cdots & \cdots \\ & f(\lambda) & f'(\lambda) & f''(\lambda)/2! & \cdots & \cdots \\ & & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & f'(\lambda) \\ & & & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & & & f(\lambda) \end{bmatrix}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} &= \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} & \dfrac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{e}^{\lambda t} \\ & \mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{m-2}}{(m-2)!}\mathrm{e}^{\lambda t} \\ & & & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & t\mathrm{e}^{\lambda t} \\ & \boldsymbol{0} & & & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \dfrac{1}{2}t^2 & \cdots & \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & t \\ & \boldsymbol{0} & & & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

当得到每个若尔当块的矩阵指数后，即可写出有多个若尔当块的若尔当矩阵的矩阵指数。

(3) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个有多个若尔当块的若尔当矩阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_j\end{bmatrix} \tag{3.2.11}$$

式中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_j$ 代表若尔当块,则

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1 t} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_2 t} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_j t}\end{bmatrix} \tag{3.2.12}$$

式中 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1 t},\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_2 t},\cdots,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_j t}$ 是由式(3.2.10)所表示的矩阵。

(4) 若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix} \tag{3.2.13}$$

则有

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{e}^{\sigma t}\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix} \tag{3.2.14}$$

这个结论从例3.1.1中就可看出,具体的证明步骤从略。

3.2.3 矩阵指数的计算

下面介绍确定矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的常用计算方法,并举例说明它们的应用。

(1) **方法1** 直接按照定义计算法。这种方法以式(3.1.3)为依据,在例3.1.1中已经做过,不再举例说明了。此法计算步骤简单,便于编程,适合于计算机计算。但通常只能得到 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的数值结果,一般难以获得其函数表达式。

(2) **方法2** 拉氏变换法。这种方法实际上是用拉氏变换法在频域中求齐次状态方程的解。

设线性定常齐次状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant t_0 \tag{3.2.15}$$

式中,$\boldsymbol{x}(0)$为初始条件。上式两边进行拉氏变换,得

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)$$

整理得

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{x}(0)$$

由此可解出

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$

再取拉氏反变换,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=L^{-1}[\boldsymbol{X}(s)]=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)]\\&=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)\end{aligned}\tag{3.2.16}$$

把它与定义式(3.1. 5)比较,根据定常微分方程解的唯一性,则有

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\tag{3.2.17}$$

例 3.2.1　试用拉氏变换法计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵指数。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}$$

解

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}s&-1\\2&s+3\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}&=\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix}s+3&1\\-2&s\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}&\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\\dfrac{-2}{(s+1)(s+2)}&\dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

由此便得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=L^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}&\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\-\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}&-\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}&\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\-2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}&-\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(3) **方法 3**　将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为对角标准形或若尔当标准形法。

若 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵,如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}$$

则由式(3.2.8)知 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 也为对角矩阵,且有

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}&0&\cdots&0\\0&\mathrm{e}^{\lambda_2 t}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

可见,当 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵时,$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的计算很简单。但是,一般情况下,系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 并非对角矩阵,如果存在线性非奇异变换,能将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵,则 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的计算就有办法了。

假若已经求得了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值时,可按以下方法计算矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

① 系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为两两互异,则在确定出使 $\boldsymbol{A}$ 实现对角化

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

的变换阵 $\boldsymbol{P}$ 及其逆 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 后,即有

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{3.2.18}$$

式中,$\boldsymbol{P}$ 是使 $\boldsymbol{A}$ 化为对角标准形的变换矩阵。关于 $\boldsymbol{P}$ 的求取,在第2章中已经详细介绍过。

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异,则一定存在一个非奇异变换阵 $\boldsymbol{P}$,将 $\boldsymbol{A}$ 化为对角标准形

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{3.2.19}$$

对于对角标准形的矩阵指数已经算得

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{bmatrix} \tag{3.2.20}$$

且

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^nt^n+\cdots$$

由于

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^nt^n=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\underbrace{t\cdot\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}t\cdots\boldsymbol{P}^{-1}}_{n个}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}t=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^nt^n\boldsymbol{P}$$

故有

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}t}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^nt^n+\cdots)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{P}$$

因而有

$$e^{At}=Pe^{P^{-1}APt}P^{-1}=P\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}P^{-1}$$

例 3.2.2　试用化为对角标准形法求矩阵指数 e^{At}。

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

解　首先求 A 的特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$。然后求出使 A 实现对角化的变换阵 P 和其逆 P^{-1} 为

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

所以，矩阵指数 e^{At} 为

$$\begin{aligned}e^{At}&=P\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

例 3.2.3　已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -6 & -11 & 6\\ -6 & -11 & 5\end{bmatrix}$$

试用化为对角标准形法求矩阵指数 e^{At}。

解　首先求 A 的特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 1\\ 6 & \lambda+11 & -6\\ 6 & 11 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)=0$$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-3$。然后求对应的特征向量可得

$$p_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad p_2=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\quad p_3=\begin{bmatrix}1\\6\\9\end{bmatrix}$$

由此求得变换矩阵 P

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&6\\1&4&9\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}3&\frac{5}{2}&-2\\-3&-4&3\\1&\frac{3}{2}&-1\end{bmatrix}$$

所以,矩阵指数

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}&0&0\\0&\mathrm{e}^{-2t}&0\\0&0&\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}3\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}&\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}&-2\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t}\\-6\mathrm{e}^{-t}+6\mathrm{e}^{-3t}&-8\mathrm{e}^{-2t}+9\mathrm{e}^{-3t}&6\mathrm{e}^{-2t}-6\mathrm{e}^{-3t}\\3\mathrm{e}^{-t}-12\mathrm{e}^{-2t}+9\mathrm{e}^{-3t}&\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-t}-16\mathrm{e}^{-2t}+\frac{27}{2}\mathrm{e}^{-3t}&-2\mathrm{e}^{-t}+12\mathrm{e}^{-2t}-9\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

② 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有重特征根　设 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 重特征根 λ,存在线性非奇异变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为若尔当标准形

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda&1&&\boldsymbol{0}\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\\boldsymbol{0}&&&\lambda\end{bmatrix}_{n\times n}\boldsymbol{P}^{-1}\tag{3.2.21}$$

则矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\mathrm{e}^{\lambda t}\begin{bmatrix}1&t&\frac{t^2}{2!}&\cdots&\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\\&1&t&\ddots&\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&t\\\boldsymbol{0}&&&&1\end{bmatrix}_{n\times n}\boldsymbol{P}^{-1}\tag{3.2.22}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 为使 $\boldsymbol{A}$ 化为若尔当标准形的变换矩阵,它的证明从略。在一般情况下,$\boldsymbol{A}$ 阵既有重特征值,又有单特征值。例如有三重特征值 λ_1,二重特征值 λ_2,单特征值 λ_3 的矩阵 $\boldsymbol{A}$,且可找到变换阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}^{-1}$,使其化为若尔当标准形即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1&1&&&&\boldsymbol{0}\\&\lambda_1&1&&&\\&&\lambda_1&&&\\&&&\lambda_2&1&\\&&&&\lambda_2&\\\boldsymbol{0}&&&&&\lambda_3\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

则其矩阵指数 e^{At} 应有如下形式

$$
e^{At}=P\left[\begin{array}{ccc:cc:c}
e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0\\
0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & 0\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3 t}
\end{array}\right]P^{-1} \tag{3.2.23}
$$

例 3.2.4　试求下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵指数。

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 6 & -5\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}
$$

解　因为

$$
|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix}\lambda & -6 & 5\\ -1 & \lambda & -2\\ -3 & -2 & \lambda-4\end{bmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)
$$

所以，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有二重特征值 $\lambda_{1,2}=1$，一重特征值 $\lambda_3=2$，求与之相应的特征向量和广义特征向量，可得

$$
\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{3}{7}\\ -\frac{5}{7}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{22}{49}\\ -\frac{46}{49}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ -2\end{bmatrix}
$$

所以，可得变换矩阵

$$
\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -\frac{3}{7} & -\frac{22}{49} & -1\\ -\frac{5}{7} & -\frac{46}{49} & -2\end{bmatrix}
$$

且得

$$
\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -6 & 5\\ 7 & 28 & -7\\ -4 & -11 & +1\end{bmatrix}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} &= \boldsymbol{P}\mathrm{e}^{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}t}\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -\dfrac{3}{7} & -\dfrac{22}{49} & -1 \\ -\dfrac{5}{7} & -\dfrac{46}{49} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t} & t\mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 7 & 28 & -7 \\ -4 & -11 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9\mathrm{e}^{t}+7t\mathrm{e}^{t}-8\mathrm{e}^{2t} & 22\mathrm{e}^{t}+28t\mathrm{e}^{t}-22\mathrm{e}^{2t} & -2\mathrm{e}^{t}-7t\mathrm{e}^{t}+2\mathrm{e}^{2t} \\ -4\mathrm{e}^{t}-3t\mathrm{e}^{t}+4\mathrm{e}^{2t} & -10\mathrm{e}^{t}-12t\mathrm{e}^{t}+11\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{t}+3t\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{2t} \\ -8\mathrm{e}^{t}-5t\mathrm{e}^{t}+8\mathrm{e}^{2t} & -22\mathrm{e}^{t}-20t\mathrm{e}^{t}+22\mathrm{e}^{2t} & 3\mathrm{e}^{t}+5t\mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(4) **方法 4**　化矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的有限项法。

即把 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 表示为 $\boldsymbol{A}^{k}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 的一个多项式

$$
\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = a_0(t)\boldsymbol{I} + a_1(t)\boldsymbol{A} + \cdots + a_{n-1}(t)\boldsymbol{A}^{n-1} \tag{3.2.24}
$$

式中,当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为两两互异时,$a_0(t),a_1(t),\cdots,a_{n-1}(t)$ 可按下式计算:

$$
\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tag{3.2.25}
$$

对于 $\boldsymbol{A}$ 包含重特征值的情况,例如其特征值为 λ_1(三重),λ_2(二重),$\lambda_3,\cdots,\lambda_{n-3}$ 时,$a_0(t),a_1(t),\cdots,a_{n-1}(t)$ 可按下式计算:

$$
\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \\ a_5(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \dfrac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda_1^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & \dfrac{(n-1)}{1!}\lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \hdashline 0 & 1 & 2\lambda_2 & 3\lambda_2^2 & \cdots & \dfrac{(n-1)}{1!}\lambda_2^{n-2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \hdashline 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{n-3} & \lambda_{n-3}^2 & \lambda_{n-3}^3 & \cdots & \lambda_{n-3}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2!}t^2\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \dfrac{1}{1!}t\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \hdashline \dfrac{1}{1!}t\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \hdashline \mathrm{e}^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_{n-3} t} \end{bmatrix} \tag{3.2.26}
$$

证明关系式(3.2.24)～式(3.2.26)的正确性,要用到凯莱-哈密顿(Cayley-Hamilton)定理。它的叙述如下。

凯莱-哈密顿定理　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 方阵,则 $\boldsymbol{A}$ 满足其自身的特征方程,即若

$$
f(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{3.2.27}
$$

则

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \tag{3.2.28}$$

定理的证明从略。从凯莱-哈密顿定理出发,可以导出

$$\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+a_2\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$$

这表明 $\boldsymbol{A}^n$ 可表为 $\boldsymbol{A}^{n-1},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 的线性组合,即

$$\boldsymbol{A}^n=-a_1\boldsymbol{A}^{n-1}-a_2\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_{n-1}\boldsymbol{A}-a_n\boldsymbol{I}$$

又因

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{n+1}&=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}(-a_1\boldsymbol{A}^{n-1}-a_2\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_{n-1}\boldsymbol{A}-a_n\boldsymbol{I})\\&=-a_1\boldsymbol{A}^n-a_2\boldsymbol{A}^{n-1}-\cdots-a_{n-1}\boldsymbol{A}^2-a_n\boldsymbol{A}\\&=-a_1(-a_1\boldsymbol{A}^{n-1}-a_2\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_{n-1}\boldsymbol{A}-a_n\boldsymbol{I})-a_2\boldsymbol{A}^{n-1}-a_3\boldsymbol{A}^{n-2}\cdots\\&\quad-a_{n-2}\boldsymbol{A}^2-a_n\boldsymbol{A}\\&=(a_1^2-a_2)\boldsymbol{A}^{n-1}+(a_1a_2-a_3)\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+(a_1a_n-a_n)\boldsymbol{A}+a_1a_n\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

这表明 $\boldsymbol{A}^{n+1}$ 也可表示为 $\boldsymbol{A}^{n-1},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 的线性组合。依此类推,$\boldsymbol{A}^{n+2},\boldsymbol{A}^{n+3},\cdots$ 均可表示为 $\boldsymbol{A}^{n-1},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 的线性组合。即

$$\boldsymbol{A}^k=\sum_{i=0}^{n-1}C_i\boldsymbol{A}^i,\quad k\geqslant n \tag{3.2.29}$$

所以,对于矩阵指数

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots$$

的无穷多项表达式可表示为 $\boldsymbol{A}^{n-1},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 的有限项表达式,但其系数为时间 t 的函数,也即式(3.2.24)。

下面证明当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值两两互异时式(3.2.25)的正确性。

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及其特征值都是满足特征方程的,即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,$f(\lambda)=0$,所以,既然 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 可以表示为 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 次多项式,则同样方法也可以证明 $\mathrm{e}^{\lambda t}$ 也可以表示为 λ 的 $n-1$ 次多项式,而且两者的系数 $a_i(t)(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 应该是相同的,即有

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=a_0(t)+a_1(t)\lambda_1+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}\\\mathrm{e}^{\lambda_2 t}=a_0(t)+a_1(t)\lambda_2+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1}\\\quad\vdots\\\mathrm{e}^{\lambda_n t}=a_0(t)+a_1(t)\lambda_n+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1}\end{cases} \tag{3.2.30}$$

解此方程组,即可求出系数 $a_i(t)(i=0,1,2,\cdots,n-1)$。即

$$\begin{bmatrix}a_0(t)\\a_1(t)\\\vdots\\a_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\lambda_2^2&\cdots&\lambda_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\lambda_n&\lambda_n^2&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\\\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\\\vdots\\\mathrm{e}^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 有重特征值时,证明式(3.2.26)的正确性。

设 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个重特征值 λ,则显然下式成立。

$$\mathrm{e}^{\lambda t}=a_0(t)+a_1(t)\lambda+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} \tag{3.2.31}$$

但是只此一个方程式，为了解出 $a_i(t)(i=0,1,2,\cdots,n-1)$，必须添上 $n-1$ 个方程，办法是将式(3.2.31)依次对 λ 求导，直到 $n-1$ 次，其结果是

$$\begin{cases} t\mathrm{e}^{\lambda t} = a_1(t) + 2a_2(t)\lambda + \cdots + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2} \\ t^2\mathrm{e}^{\lambda t} = 2a_2(t) + 6a_3(t)\lambda + \cdots + (n-1)(n-2)a_{n-1}\lambda^{n-3} \\ \quad\vdots \\ t^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda t} = (n-1)!a_{n-1}(t) \end{cases} \tag{3.2.32}$$

由此导出了关于 $a_i(t)(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 的 n 个方程，从而可以解出这些系数来。如果有几个重特征值，则可分别对每个重特征值按上述方法进行，这样，总会有所需个数的独立方程存在，从而求出 n 个系数来，即式(3.2.26)。

式(3.2.26)较为复杂，不易记忆，对于有重特征值的情况可直接由式(3.2.31)和式(3.2.32)构成 n 个线性独立方程，对其求解得出对应系数 $a_i(t)(i=0,1,2,\cdots,n-1)$。

下面给出例子说明上述方法。

例 3.2.5 用化为有限项法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵指数。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

解 先求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$，则由式(3.2.25)有

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

带入式(3.2.24)即可得出

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} &= a_0(t)\boldsymbol{I} + a_1(t)\boldsymbol{A} \\ &= (2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 3.2.6 用化为有限项法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵指数。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

解 先求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$，则由式(3.2.25)有

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^{-t} - 3\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t} \\ \dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-t} - 4\mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t} \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}$$

带入式(3.2.24)即可得出

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} &= a_0(t)\boldsymbol{I}+a_1(t)\boldsymbol{A}+a_2(t)\boldsymbol{A}^2 \\
&= \begin{bmatrix}
3\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t} & \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} \\
-3\mathrm{e}^{-t}+6\mathrm{e}^{-2t}-3\mathrm{e}^{-3t} & -\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-t}+8\mathrm{e}^{-2t}-\frac{9}{2}\mathrm{e}^{-3t} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t} \\
3\mathrm{e}^{-t}-12\mathrm{e}^{-2t}+9\mathrm{e}^{-3t} & \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-t}-16\mathrm{e}^{-2t}+\frac{27}{2}\mathrm{e}^{-3t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t}+\frac{9}{2}\mathrm{e}^{-3t}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

例 3.2.7　已知矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}
$$

用化为有限项法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

解　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $(\lambda+1)^2(\lambda-2)=0$，特征值为 $-1,-1,+2$。

对于 $\lambda_3=2$，有

$$
\mathrm{e}^{2t}=a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)
$$

对于 $\lambda_{1,2}=-1$，有

$$
\mathrm{e}^{-t}=a_0(t)-a_1(t)+a_2(t)
$$

因为 -1 是二重特征根，故还需补充方程

$$
t\mathrm{e}^{-t}=a_1(t)-2a_2(t)
$$

从而可联立求解得

$$
a_0(t)=\frac{1}{9}(\mathrm{e}^{2t}+8\mathrm{e}^{-t}+6t\mathrm{e}^{-t})
$$

$$
a_1(t)=\frac{1}{9}(2\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{-t}+3t\mathrm{e}^{-t})
$$

$$
a_2(t)=\frac{1}{9}(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-t}-3t\mathrm{e}^{-t})
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} &= a_0(t)\boldsymbol{I}+a_1(t)\boldsymbol{A}+a_2(t)\boldsymbol{A}^2 \\
&= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}
\mathrm{e}^{2t}+(8+6t)\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{2t}-(2-3t)\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{2t}-(1+3t)\mathrm{e}^{-t} \\
2\mathrm{e}^{2t}-(2+6t)\mathrm{e}^{-t} & 4\mathrm{e}^{2t}+(5-3t)\mathrm{e}^{-t} & 2\mathrm{e}^{2t}-(2-3t)\mathrm{e}^{-t} \\
4\mathrm{e}^{2t}+(6t-4)\mathrm{e}^{-t} & 8\mathrm{e}^{2t}+(3t-8)\mathrm{e}^{-t} & 4\mathrm{e}^{2t}+(5-3t)\mathrm{e}^{-t}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3.3　线性定常连续系统非齐次状态方程的解

前面讨论了线性连续系统齐次状态方程的解，此解描述了由初始状态所引起的系统自由运动即**零输入响应**的情况，得到了自由运动的统一公式

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)$$

现在在此基础上进一步讨论线性连续系统在控制作用下的受控运动。

线性定常连续系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant 0 \tag{3.3.1}$$

式中,$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量,$\boldsymbol{u}$ 为 p 维输入向量,$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 维矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times p$ 维矩阵。

给定状态变量的初值 $\boldsymbol{x}(0)$和控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$,要确定状态变量未来的变化,即系统的状态响应 $\boldsymbol{x}(t)$。

将 $\boldsymbol{x}(t)$左乘 $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$之后再求导,即有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t)]=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}[\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)]=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{3.3.2}$$

将式(3.3.2)两边积分,积分限从0到 t,即

$$\int_0^t\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{x}(\tau)]\right\}\mathrm{d}\tau=\int_0^t\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

可以得到

$$\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{I}=\int_0^t\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

所以

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant 0 \tag{3.3.3}$$

更一般的形式为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant t_0 \tag{3.3.4}$$

由式(3.3.3)和式(3.3.4)可见,系统的动态响应由两部分组成:一部分是由初始状态引起的系统自由运动,叫作**零输入响应**;另一部分是由控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$所产生的受控运动,叫作**零状态响应**。正是由于受控项的存在,提供了通过选取合适的 $\boldsymbol{u}$ 使 $\boldsymbol{x}(t)$的轨线满足期望的要求的可能性。这一思想是分析系统结构特性和对系统进行综合的基本依据。

3.4 线性定常系统的状态转移矩阵

本节引入状态转移矩阵的概念。从本质上看,不管是由初始状态引起的运动,还是由输入引起的运动,都是一种状态转移,其形态可用状态转移矩阵来表征。此外,利用状态转移矩阵,可对线性系统的运动规律,不管系统是定常的还是时变的,建立起统一的表达形式。在状态空间分析中,状态转移矩阵是一个十分重要的概念。采用状态转移矩阵可以对线性系统的运动给出一个清晰的描述。

3.4.1　基本概念

先来回顾一下线性定常状态方程的解。由式(3.3.4)知,对于定常系统,有

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant t_0$$

这个表达式反映了两个方面的问题:一是 $\boldsymbol{x}(t)$是线性定常系统状态方程的解,是由状态初始值所引起的**零输入响应**和控制输入所产生的**零状态响应**的叠加和。二是它反映了从初始状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$到任意 $t>t_0$ 时刻,状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$的一种向量变换关系。变换矩阵是 $\boldsymbol{x}(t_0)$左边的时间函数矩阵。随着时间的推移,它将不断地把系统的状态变换为其他时间的值,从而在状态空间中形成一条轨迹。在这个意义上说,这个变换矩阵起着一种状态转移的作用,所以把它称作**状态转移矩阵**,用符号$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$表示(对于线性定常系统用符号$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$表示)。它不仅是时间 t 的函数,而且是初始时刻 t_0 的函数。因此它是一个 $n\times n$ 的二元时变函数矩阵。则状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{Bu}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant t_0$$

的解可表示为如下状态转移的形式:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.1}$$

式(3.4.1)又称为状态转移方程。它的几何意义,若以二维状态向量为例,则可用图 3.4.1 表示。

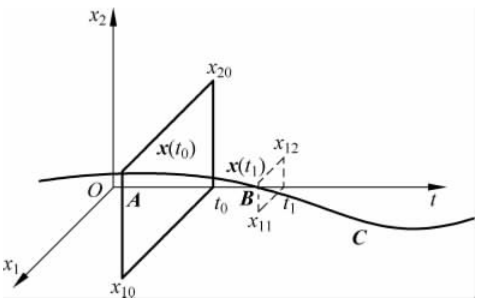

图 3.4.1　状态转移示意图

如图 3.4.1 所示,在 $t=t_0$ 时,$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_{10}\\x_{20}\end{bmatrix}$,依此为初始条件,则$\overset{\frown}{\boldsymbol{AB}}$表示状态从 $\boldsymbol{x}(t_0)$变化到 $\boldsymbol{x}(t_1)=\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{12}\end{bmatrix}$,即

$$\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t_1\geqslant t_0 \tag{3.4.2}$$

在 $t=t_2$ 时的状态将为

$$x(t_2)=\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)x(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t_2\geqslant t_1 \tag{3.4.3}$$

$\overset{\frown}{BC}$表示了状态从 $\boldsymbol{x}(t_1)$转移到 $\boldsymbol{x}(t_2)$的过程。系统状态从 $\boldsymbol{x}(t_0)$开始,随着时间的推移,它将按$\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)$和$\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)$转移到 $\boldsymbol{x}(t_1)$,继而转移到 $\boldsymbol{x}(t_2)$,在状态空间中描绘出一条运动轨线。

3.4.2 线性定常系统的状态转移矩阵

在前面讨论的基础上,给出如下状态转移矩阵的定义。

定义 3.4.1 线性定常连续系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.4}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量,称满足如下矩阵方程

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t-t_0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t-t_0),\quad \boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I},\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.5}$$

的 $n\times n$ 解阵$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$为系统的**状态转移矩阵**。

由于系统为 n 维,所以自由方程$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 有且仅有 n 个线性无关的解。任意选取 n 个线性无关的解,并以它们为列构成 $n\times n$ 矩阵函数$\boldsymbol{\Psi}(t)$,则称$\boldsymbol{\Psi}(t)$为$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的一个**基本解阵**。显然$\boldsymbol{\Psi}(t)$满足如下的矩阵方程

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Psi}(t),\quad \boldsymbol{\Psi}(t_0)=\boldsymbol{H},\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.6}$$

式中 $\boldsymbol{H}$ 为非奇异实常值矩阵。

结论 3.4.1(状态转移矩阵与基本解阵的关系) 对线性定常连续系统的状态转移矩阵方程式(3.4.5),其解阵即状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$可由基本解阵$\boldsymbol{\Psi}(t)$得出,即

$$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)=\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0),\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.7}$$

式(3.4.7)给出了系统的状态转移矩阵和系统基本解阵之间的关系式,其证明如下。

证 证明式(3.4.7)归结为证明$\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)$满足状态转移矩阵方程式(3.4.5)和初始条件。为此对式(3.4.7)求导并利用基本矩阵方程式(3.4.6),可证得$\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)$满足状态转移矩阵方程:

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t-t_0)=\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$$

再在式(3.4.7)中令 $t=t_0$,可证得$\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)$满足初始条件

$$\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)=\boldsymbol{\Psi}(t_0)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{I}$$

结论 3.4.2(状态转移矩阵的形式) 对线性定常连续系统的状态转移矩阵方程式(3.4.5),其解阵即状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$的形式可按以下两种形式给出:

当 $t_0\neq 0$ 时,有

$$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)},\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.8}$$

当 $t_0=0$ 时,有

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t},\quad t\geqslant 0 \tag{3.4.9}$$

证　考虑前面已经证得$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$，而对任意 t_0，$\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t_0}$为非奇异实常值矩阵，因此 $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$是$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基本解阵，即有

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t},\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.10}$$

把式(3.4.10)代入式(3.4.7)，进而导出线性定常系统的状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t_0}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)},\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.11}$$

而当取 $t_0=0$ 时，则可将其表示为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t},\quad t\geqslant 0 \tag{3.4.12}$$

结论 3.4.3(状态转移矩阵的唯一性)　对线性定常连续系统的状态转移矩阵方程式(3.4.5)，其解阵即状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$为唯一。并且，在运用式(3.4.7)确定$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$时，与所选择基本解阵$\boldsymbol{\Psi}(t)$无关。

证　由常微分方程理论知，定常矩阵方程式(3.4.5)在指定初始条件下解唯一。进而设$\boldsymbol{\Psi}_1(t)$和$\boldsymbol{\Psi}_2(t)$为系统任意两个基本解阵，且知它们必为线性非奇异变换关系，即有$\boldsymbol{\Psi}_2(t)=\boldsymbol{\Psi}_1(t)\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}$ 为非奇异常阵。则利用式(3.4.7)，就可导出

$$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)=\boldsymbol{\Psi}_2(t)\boldsymbol{\Psi}_2^{-1}(t_0)=\boldsymbol{\Psi}_1(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_1^{-1}(t_0)=\boldsymbol{\Psi}_1(t)\boldsymbol{\Psi}_1^{-1}(t_0)$$

从而证得$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$是唯一的，与$\boldsymbol{\Psi}(t)$的选取无关。

利用由式(3.4.11)和式(3.4.12)给出的关系式，可把上节中导出的线性定常系统的零输入响应的表达式(3.1.5)和式(3.1.4)进一步表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t;\ t_0;\ \boldsymbol{x}_0,0)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.13}$$

和

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t;\ 0;\ \boldsymbol{x}_0,0)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant 0 \tag{3.4.14}$$

上述关系式为状态转移矩阵提供了清晰的物理意义，$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$就是将时刻 t_0 的状态 $\boldsymbol{x}_0$ 映射到时刻 t 的状态 $\boldsymbol{x}$ 的一个线性变换，它在定义区间内决定了状态向量的自由运动。

根据式(3.4.11)和式(3.4.12)，可以把 3.3 节中推证得到的线性定常系统运动规律的表达式(3.3.4)和式(3.3.3)改写成以状态转移矩阵表示的形式：

$$\boldsymbol{\phi}(t;\ t_0;\ \boldsymbol{x}_0,u)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant t_0 \tag{3.4.15}$$

和

$$\boldsymbol{\phi}(t;\ 0;\ \boldsymbol{x}_0,u)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0+\int_{0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\quad t\geqslant 0 \tag{3.4.16}$$

在对线性时变系统的分析中将可以看到，采用上述形式的表达式，有助于把线性定常系统和线性时变系统的运动规律的表达式在形式上统一起来。

应当指出，对于线性定常系统，其状态转移矩阵的数学表达式即是矩阵指数。严格地说，矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$和状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$是从两个不同的角度所提出

的概念,矩阵指数是一个数学函数的名称,而状态转移矩阵是表征从初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 到时刻 t 的状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 之间的转移关系。

3.4.3 状态转移矩阵的性质

从基本关系式(2.4.7)出发,可导出状态转移矩阵的如下一些重要性质:

- $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{\Psi}(t_0)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{I}$。
- $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t-t_0)=\boldsymbol{\Psi}(t_0)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t_0-t)$。

这一性质说明,状态转移矩阵是可逆的,当系统从 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 转移到 $\boldsymbol{x}(t)$ 的状态转移矩阵可表示为从 $\boldsymbol{x}(t)$ 转移到 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的状态转移矩阵的逆阵。

- $\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_0)=\boldsymbol{\Psi}(t_2)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{\Psi}(t_2)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_1)\boldsymbol{\Psi}(t_1)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1-t_0)$。
- $\boldsymbol{\Phi}(t_2+t_1)=\boldsymbol{\Phi}(t_2-(-t_1))=\boldsymbol{\Phi}(t_2-0)\boldsymbol{\Phi}(0-(-t_1))=\boldsymbol{\Phi}(t_2)\boldsymbol{\Phi}(t_1)$。
- $\boldsymbol{\Phi}(mt)=\boldsymbol{\Phi}(t+t+\cdots+t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\cdots\boldsymbol{\Phi}(t)=[\boldsymbol{\Phi}(t)]^m$。
- $\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$由 $\boldsymbol{A}$ 唯一决定,与所选择的基本解阵$\boldsymbol{\Psi}(t)$无关。

3.5 线性时变系统状态方程的解

严格地说,一般的系统都是时变系统,因为系统中的某些参数是随时间变化的。如电机的升温会导致导线电阻 R 的变化,火箭燃料的消耗使其质量 m 不断减小等。这些都说明系统参数的可变性,只不过有时变化甚小,在工程上可以忽略不计,才将参数看成是常数。所以线性时变系统比线性定常系统更具有普遍意义。本节,在线性定常系统运动规律的基础上,将进一步讨论线性时变系统的运动规律。下面将看到,线性时变系统运动规律在形式上是十分类似于线性定常系统的,它导致了理解上和理论分析上的简便性,而这正是状态空间法的一个优点。但是,从计算的角度而言,线性时变系统的运动分析则比线性定常系统要复杂得多,通常只能采用计算机进行计算。

3.5.1 线性时变系统齐次状态方程的解

线性时变系统齐次状态方程可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\in[t_0,t_a] \tag{3.5.1}$$

式中,$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量,$\boldsymbol{A}(t)$为 $n\times n$ 的时变实值矩阵。设初始时刻 $t=t_0$ 时,初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$为已知,且在 $t_0\leqslant t\leqslant t_a$ 的时间间隔内,$\boldsymbol{A}(t)$各元素是 t 的分段连续函数。

现在先讨论标量时变系统

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=a(t)x(t),\quad x(t)\mid_{t=t_0}=x(t_0) \tag{3.5.2}$$

的解。分离变量后,可得上式的解为

$$x(t)=\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)\mathrm{d}\tau}x(t_0) \tag{3.5.3}$$

或写成

$$x(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(\tau)\mathrm{d}\tau\right)x(t_0) \tag{3.5.4}$$

与方程式(3.5.2)比较,方程式(3.5.1)的解参照齐次定常状态方程矩阵指数的含义,似应有

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{x}(t_0) \tag{3.5.5}$$

但这里情况不同,只有当 $\boldsymbol{A}(t)$ 与 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 满足矩阵乘法可交换条件时,式(3.5.5)才能成立。对这一结论证明如下。

如果 $\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{x}(t_0)$ 是齐次方程(3.5.1)的解,那么必须有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{A}(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{x}(t_0) \tag{3.5.6}$$

把 $\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau}$ 展成幂级数

$$\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau}=\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2!}\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2+\cdots \tag{3.5.7}$$

式(3.5.7)两边对时间求导,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau}=\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^2\boldsymbol{A}(t)+\cdots \tag{3.5.8}$$

把式(3.5.7)和式(3.5.8)代入方程式(3.5.6),可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(t)+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{A}(t)+\cdots\\&=\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau+\cdots\end{aligned}$$

要使上述方程两边相等,其充要条件是

$$\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{A}(t) \tag{3.5.9}$$

即 $\boldsymbol{A}(t)$ 和 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是可交换的,但是这个条件一般是不成立的,因而时变系统的齐次解通常得不到像定常系统解那样的封闭形式。

对于不满足条件式(3.5.9)的时变系统,可求得时变系统齐次状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\left\{\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1}\boldsymbol{A}(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1\right.$$
$$\left.+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1}\boldsymbol{A}(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2}\boldsymbol{A}(\tau_3)\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1+\cdots\right\}\boldsymbol{x}(t_0) \qquad (3.5.10)$$

这个关系式的证明很简单,只需验证它满足时变系统齐次方程式(3.5.1)和初始条件即可。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left[\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1}\boldsymbol{A}(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1}\boldsymbol{A}(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2}\boldsymbol{A}(\tau_3)\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1+\cdots\right]\boldsymbol{x}(t_0)\right\}$$
$$=\boldsymbol{A}(t)\left[\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_2)\int_{t_0}^{\tau_2}\boldsymbol{A}(\tau_3)\mathrm{d}\tau_3\mathrm{d}\tau_2+\cdots\right]\boldsymbol{x}(t_0)$$
$$=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

且

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\left[\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t_0}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t_0}\boldsymbol{A}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1}\boldsymbol{A}(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1+\cdots\right]\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}(t_0)$$

当然上式成立的条件必须是无穷级数是收敛的。$\boldsymbol{A}(t)$的元素是有界时,此条件是可以满足的。这就证明了式(3.5.10)确是时变齐次方程式(3.5.1)的解,该级数称为皮亚诺-贝克(Peano-Baker)级数。

例 3.5.1 设线性时变系统的齐次状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t+1)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t), \quad t\geqslant t_0$$

其初始条件为 $\boldsymbol{x}(t_0)$,试求它的解。

解 首先校核 $\boldsymbol{A}(t)$和 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是否为可交换的,也就是说,对任意时刻 t 是否有

$$\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{A}(t)$$

上式即为

$$\int_{t_0}^{t}[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{A}(\tau)-\boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{A}(t)]\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{0}$$

此式即表示对于任意的 t_1 和 t_2,要求校验 $\boldsymbol{A}(t_1)$和 $\boldsymbol{A}(t_2)$是否为可交换的。对于本题,有

$$\boldsymbol{A}(t_1)\boldsymbol{A}(t_2)=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t_1+1)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t_2+1)^2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A}(t_2)\boldsymbol{A}(t_1)=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t_2+1)^2}\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{(t_1+1)^2}\\0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

满足可交换条件，所以可用式(3.5.5)计算时变系统齐次状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{x}(t_0)=\mathrm{e}^{\begin{bmatrix}0 & \frac{(t-t_0)}{(t+1)(t_0+1)}\\0 & 0\end{bmatrix}}\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{(t-t_0)}{(t+1)(t_0+1)}\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t_0)$$

例 3.5.2　设线性时变系统的齐次状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & t\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t),\quad t\geqslant t_0$$

其初始条件为 $\boldsymbol{x}(t_0)$，试求它的解。

解　因为

$$\boldsymbol{A}(t_1)\boldsymbol{A}(t_2)=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & t_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & t_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & t_2\\0 & t_1t_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(t_2)\boldsymbol{A}(t_1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & t_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & t_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & t_1\\0 & t_2t_1\end{bmatrix}$$

两式不等，说明 $\boldsymbol{A}(t_1)$和 $\boldsymbol{A}(t_2)$，亦即 $\boldsymbol{A}(t)$和 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是不可交换的，此时必须按式(3.5.10)计算 $\boldsymbol{x}(t)$。为此计算

$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & \tau\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}0 & (t-t_0)\\0 & \dfrac{1}{2}(t^2-t_0^2)\end{bmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1}\boldsymbol{A}(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1=\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & \tau_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & (\tau_1-t_0)\\0 & \dfrac{1}{2}(\tau_1^2-t_0^2)\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau_1$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{6}(t-t_0)^2(t+2t_0)\\0 & \dfrac{1}{8}(t^2-t_0^2)^2\end{bmatrix}$$

等，最后得

$$\boldsymbol{x}(t)=\left\{\boldsymbol{I}+\begin{bmatrix}0 & (t-t_0)\\0 & \dfrac{1}{2}(t^2-t_0^2)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{6}(t-t_0)^2(t+2t_0)\\0 & \dfrac{1}{8}(t^2-t_0^2)^2\end{bmatrix}+\cdots\right\}\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & (t-t_0)+\frac{1}{6}(t-t_0)^2(t+2t_0)+\cdots \\ 0 & 1+\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)+\frac{1}{8}(t^2-t_0^2)^2+\cdots\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t_0)$$

3.5.2 线性时变系统的状态转移矩阵

尽管线性时变系统齐次状态方程的解一般不能像定常系统那样写成封闭的解析形式,但如前所述,它仍然能够表示为如下形式:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{3.5.11}$$

这与定常系统的表达式是一致的。为区分起见,通常把定常系统的状态转移矩阵写成为$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$。在以上讨论的基础上,给出如下的定义。

定义 3.5.1 对于连续时间线性时变系统

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\in[t_0,t_a]\\&\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

式中,$\boldsymbol{x}$为n维状态向量,$\boldsymbol{u}$为p维输入向量,$\boldsymbol{y}$为q维输出向量,$\boldsymbol{A}(t)$,$\boldsymbol{B}(t)$,$\boldsymbol{C}(t)$和$\boldsymbol{D}(t)$分别为$n\times n$,$n\times p$,$q\times n$和$q\times p$的时变实值矩阵。系统的**状态转移矩阵**是如下矩阵微分方程和初始条件

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0),\quad \boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)=\boldsymbol{I} \tag{3.5.13}$$

的$n\times n$解阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$。

用$\boldsymbol{\Psi}(t)$表示$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$的任意基本解阵,它是以$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$的$n$个线性无关解为列构成的解阵。

结论 3.5.1(状态转移矩阵与基本解阵的关系) 线性时变系统(3.5.12)的状态转移矩阵即矩阵方程式(3.5.13)的解阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$可表示为

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}(t_0)^{-1},\quad t\geqslant t_0 \tag{3.5.14}$$

证 上述关系式的正确性,可由验算其满足式(3.5.13)的方程和初始条件而得到证实,其中还要用到关系式$\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)$。证明过程与定常系统相似,略。

结论 3.5.2(状态转移矩阵的形式) 线性时变系统(3.5.12),其状态转移矩阵即矩阵方程式(3.5.13)的解阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$具有以下的形式。

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_1)\left[\int_{t_0}^{\tau_1}\boldsymbol{A}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_2\right]\mathrm{d}\tau_1+\cdots,\quad t\in[t_0,t_a] \tag{3.5.15}$$

证 式(3.5.15)的正确性可通过验证其满足(3.5.13)的方程和初始条件而证明。

结论 3.5.3(状态转移矩阵的唯一性) 线性时变系统(3.5.12),其状态转移

矩阵即矩阵方程式(3.5.13)的解阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$为唯一。并且,在运用式(3.5.14)确定$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$时,与所选择基本解阵$\boldsymbol{\Psi}(t)$无关。

证明过程与定常系统相似,略。

由式(3.5.14)的基本关系式出发,可导出如下的一些有关状态转移矩阵的重要性质:

(1) $\boldsymbol{\Phi}(t,t)=\boldsymbol{I}$。

(2) $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,t_0)=\boldsymbol{\Psi}(t_0)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)$。

(3) $\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_0)=\boldsymbol{\Psi}(t_2)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{\Psi}(t_2)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_1)\boldsymbol{\Psi}(t_1)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)$。

(4) 当$\boldsymbol{A}(t)$给定后,$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$是唯一的。

从上面的分析可以看出,线性时变系统的状态转移矩阵,无论是矩阵方程、基本关系式或是性质,都是和线性定常系统相类似的。但是,两者之间的一个重要区别是,线性定常系统的状态转移矩阵总是可以定出其闭合形式的表达式,而线性时变系统的状态转移矩阵,除了极为简单的情况外,往往难以求得其闭合形式的表达式。

3.5.3　线性时变系统非齐次状态方程的解

在引入状态转移矩阵的基础上,可以给出线性时变系统非齐次状态方程的解,现将其表述为如下的一个结论。

结论 3.5.4　连续时间线性时变系统,由初始状态和输入同时引起的状态响应,即系统状态方程式(3.5.12)的解基于状态转移矩阵的表达式为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\in[t_0,t_a] \tag{3.5.16}$$

式中$\boldsymbol{\Phi}(t,\cdot)$为系统的状态转移矩阵。

证　考虑系统为线性,满足叠加原理,所以不妨设解$\boldsymbol{x}(t)$由两部分组成。一部分是初始状态$\boldsymbol{x}_0$的转移,另一部分是待定向量$\boldsymbol{\xi}(t)$的转移。即设解具有如下形式:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\xi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)[\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{\xi}(t)] \tag{3.5.17}$$

由此,并利用系统的状态方程和状态转移方程,可得到

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)[\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{\xi}(t)]+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)[\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{\xi}(t)]+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\\&=\dot{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\end{aligned} \tag{3.5.18}$$

进而可导出

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u} \tag{3.5.19}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u} \tag{3.5.20}$$

将式(3.5.20)中 t 换为 τ,再从 t_0 积分到 t,有

$$\boldsymbol{\xi}(t)=\boldsymbol{\xi}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.5.21}$$

将式(3.5.21)代入式(3.5.17),则可得

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\xi}(t_0),\quad t\geqslant t_0 \tag{3.5.22}$$

从而,利用 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 可由上式定出 $\boldsymbol{\xi}(t_0)=\boldsymbol{0}$ 的同时,即导出了式(3.5.16)。

下面针对式(3.5.16)所描述的线性时变系统的状态响应,进行几点讨论。

(1) 由式(3.5.16)可以看出,线性时变系统的状态响应由两部分组成,一个是零输入响应

$$\boldsymbol{\phi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{0})=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0,\quad t\in[t_0,t_a] \tag{3.5.23}$$

另一个是零状态响应

$$\boldsymbol{\phi}(t,t_0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{u})=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\in[t_0,t_a] \tag{3.5.24}$$

(2) 由式(3.5.16)还可以看出,一旦状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,\cdot)$ 定出,则 $x(t)$ 就能通过计算得到。但是除了极简单的情况外,状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,\cdot)$ 是很难求得的。因此,式(3.5.16)的主要意义不在于计算中的应用,而在于在系统理论研究中的应用。实际上,计算由 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{u}$ 引起的线性时变系统的状态方程的解的问题常可采用数值方法来解决,并已有专门的计算机求解程序。

(3) 比较式(3.5.16)和式(3.4.14)可看出,线性时变系统和线性定常系统的状态响应具有类同的形式,这种表述上的统一性对理论研究是很有利的。两个表达式的区别仅在于,在时变系统中状态转移矩阵用 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 表示,其物理上的含义是 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 依赖于初始时刻 t_0,而在定常系统中状态转移矩阵用 $\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$ 表示,这表明 $\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$ 只依赖于时间差值 $t-t_0$,而和初始时刻 t_0 没有直接关系。当然,上述讨论是只就形式上而言的,从实质上看,线性时变系统的状态响应,无论是在计算上还是在响应的表达式上,都远比线性定常系统的运动规律要复杂得多。

例 3.5.3 给定线性时变系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ t & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u,\quad t\in[1,10]$$

式中,u 为单位阶跃函数 $1(t-1)$,初始状态为 $x_1(1)=1$ 和 $x_2(1)=2$,试求状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 和状态响应 $\boldsymbol{x}(t)$。

解　首先求状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$；为此，将 $u=0$ 时的系统状态方程改写为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=0\\ \dot{x}_2=tx_1\end{cases}$$

对其求解可得到

$$\begin{cases}x_1(t)=x_1(t_0)\\ x_2(t)=0.5t^2x_1(t_0)-0.5t_0^2x_1(t_0)+x_2(t_0)\end{cases}$$

再取 $x_1(t_0)=0,x_2(t_0)=1$ 和 $x_1(t_0)=2,x_2(t_0)=0$，可得到两个线性无关解：

$$\boldsymbol{\psi}_1=[0\quad 1]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\psi}_2=[2\quad t^2-t_0^2]^{\mathrm{T}}$$

于是，系统的一个基本解阵为

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & t^2-t_0^2\end{bmatrix}$$

现利用式(3.5.14)，就可定出系统的状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}(t_0)^{-1}&=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & t^2-t_0^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.5t^2-0.5t_0^2 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

进而确定系统的状态响应：利用上述得到的状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$和式(3.5.16)，即可定出：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.5t^2-0.5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+\int_1^t\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.5t^2-0.5\tau^2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau\\ &=\begin{bmatrix}1\\ 0.5t^2+1.5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t-1\\ \frac{1}{3}t^3-0.5t^2+t-\frac{5}{6}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}t\\ \frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

3.6　线性连续系统的时间离散化

对于含有采样开关或数字计算机的系统，存在着两种信号：连续时间信号和离散时间信号。为了分析和设计这类系统，有必要将连续时间系统的状态空间表达式化成等价的离散时间系统的状态空间表达式，这便是线性连续系统的时间离散化问题。

线性连续系统的时间离散化问题的数学实质就是在一定的采样方式和保持

方式下,由系统的连续时间状态空间描述来导出其对应的离散时间状态空间描述,并建立起两者的系数矩阵间的关系式。

3.6.1 近似离散化

给定线性连续时变系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{3.6.1}$$

在采样周期 T 较小、且对其精度要求不高时,通过近似离散化,可以把它变成线性离散状态方程,以便求出它的近似解,即在采样时刻的近似值。利用近似等式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\frac{1}{T}\{\boldsymbol{x}((k+1)T)-\boldsymbol{x}(kT)\} \tag{3.6.2}$$

将式(3.6.2)代入式(3.6.1)中,并令 $t=kT$,则得

$$\frac{1}{T}\{\boldsymbol{x}((k+1)T)-\boldsymbol{x}(kT)\}=\boldsymbol{A}(kT)\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{B}(kT)\boldsymbol{u}(kT) \tag{3.6.3}$$

或者写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}((k+1)T)&=[\boldsymbol{I}+T\boldsymbol{A}(kT)]\boldsymbol{x}(kT)+T\boldsymbol{B}(kT)\boldsymbol{u}(kT)\\&=\boldsymbol{G}(kT)\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{H}(kT)\boldsymbol{u}(kT)\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

式中

$$\boldsymbol{G}(kT)=\boldsymbol{I}+T\boldsymbol{A}(kT),\quad \boldsymbol{H}(kT)=T\boldsymbol{B}(kT) \tag{3.6.5}$$

方程式(3.6.4)就是方程式(3.6.1)的近似离散化,通常当采样周期为系统最小时间常数的1/10左右,其近似度已是足够满意的了,所以这种方法可以在实际中采用。

例 3.6.1 系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

式中

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & 5(1-\mathrm{e}^{-5t})\\0 & 5(\mathrm{e}^{-5t}-1)\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}(t)=\begin{bmatrix}5 & 5\mathrm{e}^{-5t}\\0 & 5(1-\mathrm{e}^{-5t})\end{bmatrix}$$

试列写采样周期 $T=0.2\mathrm{s}$ 时的离散化状态方程。

解 根据式(3.6.5)可得

$$\boldsymbol{G}(kT)=\boldsymbol{I}+T\boldsymbol{A}(kT)=\begin{bmatrix}1 & 1-\mathrm{e}^{-k}\\0 & \mathrm{e}^{-k}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}(kT)=T\boldsymbol{B}(kT)=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{e}^{-k}\\0 & (1-\mathrm{e}^{-k})\end{bmatrix}$$

于是,离散化状态方程为

$$\boldsymbol{x}((k+1)T)=\boldsymbol{G}(kT)\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{H}(kT)\boldsymbol{u}(kT)$$

这种离散化方法的优点是比较简单,但终究是近似解。对于线性连续系统的

时间离散化，往往用下述离散化方法。

3.6.2 线性连续系统状态方程的离散化

线性连续系统的时间离散化问题的数学实质，就是在一定的采样方式和保持方式下，由系统的连续时间状态空间描述来导出其对应的离散时间状态空间描述，并建立起两者的系数矩阵间的关系式。

设线性连续系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}, \quad t \in [t_0, t_a] \tag{3.6.6}$$

根据状态方程的求解公式，有

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t, \tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \in [t_0, t_a] \tag{3.6.7}$$

为使离散化后的描述具有简单的形式，并保证它是可复原的，引入如下假设：

(1) 采样方式取为以常数 T 为周期的等间隔采样。采样时间宽度 Δ 比采样周期 T 要小很多，即 $\Delta \ll T$，因而可将其视为零。用 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{x}(k)$ 分别表示采样器的输入信号和输出信号，则在此假设下两者之间有如下关系式

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{cases} \boldsymbol{x}(t), & t = kT \\ 0, & t \neq kT \end{cases} \tag{3.6.8}$$

(2) 采样周期 T 的确定要满足香农(Shannon)采样定理。即

$$T \leqslant \pi/\omega_c \tag{3.6.9}$$

式中 ω_c 为截止频率。

(3) 保持器采用零阶保持器，即把离散信号转换为连续信号是按零阶保持方式来实现的。则认为保持器的输出 $\boldsymbol{u}(t)$ 是只在采样时刻发生变化，在一个采样周期内其值不变，即在每个采样周期内

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(kT), \quad kT \leqslant t \leqslant (k+1)T \tag{3.6.10}$$

在上述三点基本假设的前提下，现在给出并证明线性连续系统的时间离散化问题的两个基本结论。

结论 3.6.1(时变系统情形)　给定线性连续时间系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad t \in [t_0, t_a] \tag{3.6.11}$$

则其在基本假设下的离散化状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{u}(k), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad k = 0,1,2,\cdots,l \tag{3.6.12}$$

并且，两者的变量和系数矩阵之间存在如下关系：

$$\boldsymbol{x}(k) = [\boldsymbol{x}(t)]_{t=kT}, \quad \boldsymbol{u}(k) = [\boldsymbol{u}(t)]_{t=kT}$$

$$\boldsymbol{G}(k) = \boldsymbol{\Phi}[(k+1)T, kT] \triangleq \boldsymbol{\Phi}(k+1, k)$$

$$\boldsymbol{H}(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \boldsymbol{\Phi}[(k+1)T, \tau]\boldsymbol{B}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.6.13}$$

式中，T为采样周期，$l=(t_a-t_0)/T$，$\boldsymbol{\Phi}(\cdot,\cdot)$是连续时间线性时变系统式(3.6.11)的状态转移矩阵。

证　前已导出线性时变系统式(3.6.11)的状态响应为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\in[t_0,t_a] \tag{3.6.14}$$

上式中，令$t=(k+1)T$，而t_0对应为$k=0$，可得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1)&=\boldsymbol{\Phi}(k+1,0)\boldsymbol{x}_0+\int_0^{(k+1)T}\boldsymbol{\Phi}((k+1)T,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\boldsymbol{\Phi}(k+1,k)\left[\boldsymbol{\Phi}(k,0)\boldsymbol{x}_0+\int_0^{kT}\boldsymbol{\Phi}(kT,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\\&\quad+\left[\int_{kT}^{(k+1)T}\boldsymbol{\Phi}((k+1)T,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\boldsymbol{u}(k)\\&=\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{u}(k)\end{aligned} \tag{3.6.15}$$

式中，基于零阶保持器的约定，在最后等式前的关系式中将$\boldsymbol{u}(k)$移出积分式，并且，进而基于关系式(3.6.13)，导出最后的关系式。

结论3.6.2(定常系统情形)　给定线性定常连续时间系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant t_0 \tag{3.6.16}$$

则其在基本假设下的时间离散化状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{3.6.17}$$

两者在变量和系数矩阵上具有如下关系

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}(k)=[\boldsymbol{x}(t)]_{t=kT},\quad \boldsymbol{u}(k)=[\boldsymbol{u}(t)]_{t=kT}\\\boldsymbol{G}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\\\boldsymbol{H}=\left(\int_0^T\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{B}\end{gathered} \tag{3.6.18}$$

证　考虑定常系统是时变系统的一种特殊情况，因此由式(3.6.12)即可导出式(3.6.17)，而由式(3.6.13)则可导出

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{\Phi}[(k+1)T-kT]=\boldsymbol{\Phi}(T)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T} \tag{3.6.19}$$

和

$$\boldsymbol{H}=\int_{kT}^{(k+1)T}\boldsymbol{\Phi}((k+1)T-\tau)\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau \tag{3.6.20}$$

对上式作变量代换$t=(k+1)T-\tau$，相应地有

$$\mathrm{d}\tau=-\mathrm{d}t,\quad \int_{kT}^{(k+1)T}\mathrm{d}\tau=-\int_T^0\cdot\,\mathrm{d}t \tag{3.6.21}$$

则利用式(3.6.21)可把式(3.6.20)改写为

$$\boldsymbol{H}=\left(-\int_T^0\boldsymbol{\Phi}(t)\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{B}=\left(\int_0^T\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{B}$$

从而式(3.6.18)得证。

上述两个基本结论提供了线性连续系统时间离散化问题的算法。而且，由此

还可导出两点推论：第一，时间离散化不改变系统的时变性或定常性，即时变连续系统离散化后仍为时变系统，而定常连续时间系统离散化后仍为定常系统；第二，考虑到连续系统的状态转移矩阵必须是非奇异的，因此不管连续系统矩阵$\boldsymbol{A}(t)$或$\boldsymbol{A}$是否为非奇异，但离散化系统的矩阵$\boldsymbol{G}(k)$或$\boldsymbol{G}$一定是非奇异的。

例 3.6.2　给定线性连续定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u,\quad t\geqslant 0$$

试列写采样周期 $T=0.1\mathrm{s}$ 的离散化状态方程。

解　首先计算给定连续系统的矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。为此，采用拉氏变换法先定出

$$[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\0 & s+2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s(s+2)}\\0 & \dfrac{1}{(s+2)}\end{bmatrix}$$

再将上式取拉氏反变换，即可得到

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=L^{-1}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0.5(1-\mathrm{e}^{-2t})\\0 & \mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$$

进而，根据式(3.6.18)可求出时间离散化系统的系数矩阵

$$\boldsymbol{G}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}=\begin{bmatrix}1 & 0.5(1-\mathrm{e}^{-2T})\\0 & \mathrm{e}^{-2T}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0.091\\0 & 0.819\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\left(\int_0^T\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\mathrm{d}t\right)B=\left(\int_0^T\begin{bmatrix}1 & 0.5(1-\mathrm{e}^{-2t})\\0 & \mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}\mathrm{d}t\right)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}T & 0.5T+0.25\mathrm{e}^{-2T}-0.25\\0 & -0.5\mathrm{e}^{-2T}+0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0.5T+0.25\mathrm{e}^{-2T}-0.25\\-0.5\mathrm{e}^{-2T}+0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.005\\0.091\end{bmatrix}\end{aligned}$$

于是时间离散化状态方程为

$$\boldsymbol{x}[(k+1)]=\begin{bmatrix}1 & 0.091\\0 & 0.819\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}0.005\\0.091\end{bmatrix}u(k)$$

3.7　离散时间系统状态方程的解

随着系统理论研究领域的扩大和计算机的普及，离散时间系统已逐渐成为系统与控制理论中的一类主要研究对象。对离散时间线性系统的运动分析数学上

归结为求解时变或定常线性差分方程。相比于连续时间系统的微分方程形状态方程,离散时间系统的差分方程形状态方程的求解,既在计算上简单得多也更宜于采用计算机进行计算。离散时间系统的差分方程形状态方程有两种解法:递推法(迭代法)和 z 变换法。递推法对于定常系统和时变系统都是适用的,而 z 变换法则只能用于定常系统。

3.7.1 递推法求解线性离散系统的状态方程

考虑离散时间系统,对时变情形系统状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{u}(k),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad k=0,1,2,\cdots,l \tag{3.7.1}$$

对应定常系统状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{3.7.2}$$

式中,$\boldsymbol{x}(k)$为 n 维状态,$\boldsymbol{u}(k)$为 p 维输入。

可以看出,不论是时变差分方程式(3.7.1),还是定常差分方程式(3.7.2),都可采用递推法容易地求解。

在方程式(3.7.1)中依次令 $k=0,1,2,\cdots,l$ 可递推求得

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{G}(0)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}(0)\boldsymbol{u}(0)\\ \boldsymbol{x}(2)=\boldsymbol{G}(1)\boldsymbol{x}(1)+\boldsymbol{H}(1)\boldsymbol{u}(1)\\ \boldsymbol{x}(3)=\boldsymbol{G}(2)\boldsymbol{x}(2)+\boldsymbol{H}(2)\boldsymbol{u}(2)\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{x}(l)=\boldsymbol{G}(l-1)\boldsymbol{x}(l-1)+\boldsymbol{H}(l-1)\boldsymbol{u}(l-1)\end{cases} \tag{3.7.3}$$

其中 l 是给定问题的时间区间的未时刻,当给定初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$和输入信号序列 $\boldsymbol{u}(0),\boldsymbol{u}(1),\cdots,\boldsymbol{u}(l-1)$即可求得 $\boldsymbol{x}(l)$。

这是一种递推算法,因此特别适宜于在计算机上计算,但是,由于后一步的计算依赖于前一步的计算结果,因此计算过程中引入的差错和误差都会造成累计式的差错和误差,这是递推法的一个缺点。

对于定常系统,$\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都是常值矩阵,于是可得以下一系列方程:

$$\begin{cases}k=0,\quad \boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(0)\\ k=1,\quad \boldsymbol{x}(2)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(1)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(1)=\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(0)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(1)\\ k=2,\quad \boldsymbol{x}(3)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(2)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(2)=\boldsymbol{G}^3\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(0)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(1)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(2)\\ \quad\vdots\qquad\qquad\vdots\end{cases} \tag{3.7.4}$$

继续下去,运用归纳法,可以得到递推求解公式

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{G}^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{G}^{k-i-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(i) \tag{3.7.5}$$

方程式(3.7.5)称为线性定常离散时间系统的状态转移方程。

在此说明两点：

① 容易看出，离散时间系统状态转移方程与连续系统状态转移方程是相对应的且十分类似的，也是必然的结果。它由两部分组成：第一部分是由初始状态所引起的零输入响应（即所谓自由分量）；第二部分是由控制输入作用所引起的零状态响应（即所谓强制分量）。

② 第 k 个采样时刻的状态只取决于此时刻之前的 $k-1$ 个输入采样值，而与第 k 个输入采样值及以后的采样值无关。

方程式(3.7.5)中的 $\boldsymbol{G}^k$ 称为线性离散时间定常系统的状态转移矩阵，记 $\boldsymbol{G}^k$ 为 $\boldsymbol{\Phi}(k)$，与连续系统状态转移矩阵相对应地有如下性质。

(1) 它满足矩阵差分方程

$$\boldsymbol{\Phi}(k+1)=\boldsymbol{G\Phi}(k) \tag{3.7.6}$$

和初始条件

$$\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I} \tag{3.7.7}$$

(2)
$$\boldsymbol{\Phi}(k_2-k_0)=\boldsymbol{\Phi}(k_2-k_1)\boldsymbol{\Phi}(k_1-k_0) \tag{3.7.8}$$

(3)
$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(k)=\boldsymbol{\Phi}(-k) \tag{3.7.9}$$

利用状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(k)$ 可将式(3.7.5)改写为

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(k-i-1)\boldsymbol{Hu}(i) \tag{3.7.10}$$

或

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}(k)\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(j)\boldsymbol{Hu}(k-j-1) \tag{3.7.11}$$

3.7.2　z 变换法

对于线性定常离散时间系统，还可采用 z 变换法来求解状态方程。

设定常离散时间系统的状态方程是

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{Gx}(k)+\boldsymbol{Hu}(k),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{3.7.12}$$

对上式两边进行 z 变换，可得

$$z\boldsymbol{x}(z)-z\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{Gx}(z)+\boldsymbol{Hu}(z)$$

整理后则有

$$\boldsymbol{x}(z)=(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}z\boldsymbol{x}(0)+(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{Hu}(z) \tag{3.7.13}$$

作 z 反变换得到 $\boldsymbol{x}$ 的离散序列

$$\boldsymbol{x}(k)=Z^{-1}[(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}z]\boldsymbol{x}(0)+Z^{-1}[(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{Hu}(z)] \tag{3.7.14}$$

由解的唯一性，比较式(3.7.14)和式(3.7.5)，应有

$$Z^{-1}[(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}z]=\boldsymbol{G}^k \tag{3.7.15}$$

$$Z^{-1}[(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{Hu}(z)]=\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{G}^{k-i-1}\boldsymbol{Hu}(i) \tag{3.7.16}$$

例 3.7.1 系统的状态方程是

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}u(k)$$

式中

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\quad \text{初始条件为 } \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

试求当 $u(k)=1$ 时,状态方程的解。

解法 1 用递推法,本题的 $u(k)$ 是标量。

$$\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}u(0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\ 1.84\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(2)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(1)+\boldsymbol{H}u(1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1.84\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2.84\\ -0.84\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(3)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(2)+\boldsymbol{H}u(2)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.16 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.84\\ -0.84\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.16\\ 1.386\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

可以继续递推下去,直到所要求计算的时刻为止。所得结果是 $\boldsymbol{x}(k)$ 的离散序列,经过不难,但是比较烦琐的计算,可以得到状态的离散序列表达式为

$$\boldsymbol{x}(k)=\begin{bmatrix}-\dfrac{17}{6}(-0.2)^k+\dfrac{22}{9}(-0.8)^k+\dfrac{25}{18}\\ \dfrac{3.4}{6}(-0.2)^k-\dfrac{17.6}{9}(-0.8)^k+\dfrac{7}{18}\end{bmatrix},\quad k=1,2,\cdots$$

解法 2 用 z 变换法,先计算 $(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}$,有

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}=\begin{bmatrix}z & -1\\ 0.16 & z+1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)}\begin{bmatrix}z+1 & 1\\ -0.16 & z\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{z+0.2}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{z+0.8} & \dfrac{5}{3}\times\dfrac{1}{z+0.2}-\dfrac{5}{3}\times\dfrac{1}{z+0.8}\\ -\dfrac{0.8}{3}\times\dfrac{1}{z+0.2}+\dfrac{0.8}{3}\times\dfrac{1}{z+0.8} & -\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{z+0.2}+\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{z+0.8}\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{\Phi}(k)=Z^{-1}[(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}z]$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}(-0.2)^k-\frac{1}{3}(-0.8)^k & \frac{5}{3}(-0.2)^k-\frac{5}{3}(-0.8)^k\\ -\frac{0.8}{3}(-0.2)^k+\frac{0.8}{3}(-0.8)^k & -\frac{1}{3}(-0.2)^k+\frac{4}{3}(-0.8)^k\end{bmatrix}$$

再计算 $\boldsymbol{x}(k)$，因 $u(k)=1$，所以 $u(z)=z/(z-1)$。

$$z\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}u(z)=\begin{bmatrix}z\\-z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{z}{z-1}\\ \frac{z}{z-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{z^2}{z-1}\\ \frac{-z^2+2z}{z-1}\end{bmatrix}$$

将它们代入式(2.7.13)，得

$$\boldsymbol{x}(z)=(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}[z\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}u(z)]$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{17}{6}\frac{z}{z+0.2}+\frac{22}{9}\frac{z}{z+0.8}+\frac{25}{18}\frac{z}{z-1}\\ \frac{3.4}{6}\frac{z}{z+0.2}-\frac{17.6}{9}\frac{z}{z+0.8}+\frac{7}{18}\frac{z}{z-1}\end{bmatrix}$$

对 $\boldsymbol{x}(z)$ 取 z 反变换，得

$$\boldsymbol{x}(k)=\begin{bmatrix}-\frac{17}{6}(-0.2)^k+\frac{22}{9}(-0.8)^k+\frac{25}{18}\\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k-\frac{17.6}{9}(-0.8)^k+\frac{7}{18}\end{bmatrix}$$

3.8 利用 MATLAB 求解系统的状态方程

对于线性定常连续系统其状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant 0 \tag{3.8.1}$$

式中变量、矩阵及其维数定义同前。由式(2.4.14)知式(3.8.1)的状态响应为

$$\boldsymbol{\phi}(t;0;x_0,\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant 0$$

对于线性定常系统，式中状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。则有

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant 0 \tag{3.8.2}$$

(1) 可以用 MATLAB 中的 expm 函数来计算给定时刻的状态转移矩阵。请注意 expm(A)函数用来计算矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$，而 exp($\boldsymbol{A}$)函数却是对 $\boldsymbol{A}$ 中每个元素 a_{ij} 计算 $\mathrm{e}^{a_{ij}}$。

例 3.8.1 一 RC 网络状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}u,\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad u=0$$

试求当 $t=0.2$ 时系统的状态响应。

解 用 MATLAB 函数来求解状态响应。

① 计算 $t=0.2$ 时的状态转移矩阵(即矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}|_{t=0.2}$)。

```
>> A = [0 - 2; 1 - 3]; B = [2; 0];
>> expm(A * 0.2)
ans =
     0.9671     - 0.2968
     0.1484    0.5219
```

② 计算 $t=0.2$ 时系统的状态响应。因为 $u=0$,由式(3.8.2)得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{t=0.2}=\begin{bmatrix} 0.9671 & -0.2968 \\ 0.1484 & 0.5219 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix} 0.6703 \\ 0.6703 \end{bmatrix}$$

(2) 可以用 step()函数求取阶跃输入时系统的状态响应。

在 MATLAB 控制工具箱中给出了一个函数 step()直接求取线性系统的阶跃响应,函数调用格式为

```
>> [y,t,x] = step(G)
```

其中,G 为给定系统的 LTI 对象模型。当该函数被调用后,将同时返回自动生成的时间变量 t、系统输出 y、系统状态响应向量 x。

例 3.8.2 系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix} -21 & 19 & -20 \\ 19 & -21 & 20 \\ 40 & -40 & -40 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}u(t),\quad \boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$$

解 该系统在单位阶跃输入作用下的状态响应可由下面的 MATLAB 语句求得

```
>> A = [ - 21,19, - 20; 19, - 21,20; 40, - 40, - 40]; B = [0; 1; 2]; C = [1,0,2]; D = [0];
>> G = ss(A,B,C,D); [y,t,x] = step(G); plot(t,x)
```

系统状态响应曲线如图 3.8.1 所示。

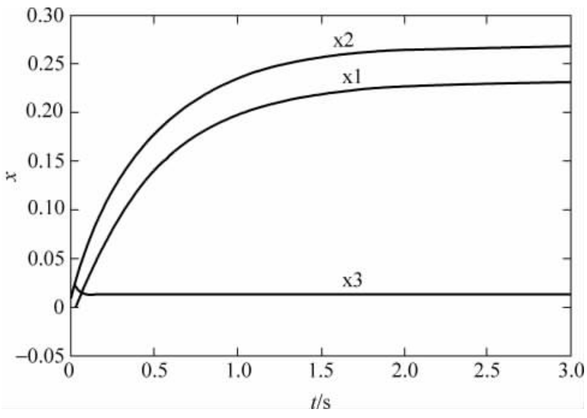

图 3.8.1 状态响应曲线(1)

（3）可以用 MATLAB 控制系统工具箱中提供的 lsim()函数求取任意输入时系统的状态响应。这个函数的调用格式为

```
>> [y,t,x] = lsim(G,u,t)
```

可见这个函数的调用格式与 step()函数是很相似的，只是在这个函数的调用中多了一个向量 u，它是系统输入在各个时刻的值。当系统状态初值为零时的响应（即零状态响应）可用 lsim()函数直接求得。

例 3.8.3　例 3.8.2 系统当状态初值为零，控制输入 $u=1+e^{-t}\cos 5t$ 时系统的零状态响应可用下面的 MATLAB 语句直接求得。

```
>> A = [ - 21,19, - 20; 19, - 21,20; 40, - 40, - 40]; B = [0; 1; 2]; C = [1,0,2]; D = [0];
>> t = [0: .04: 4]; u = 1 + exp( - t). * cos(5 * t); G = ss(A,B,C,D); [y,t,x] = lsim(G,u,t);
>> plot(t,x)
```

系统状态响应曲线如图 3.8.2 所示。

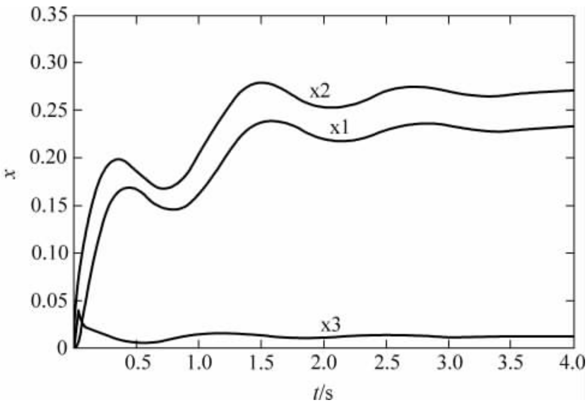

图 3.8.2　状态响应曲线(2)

零输入响应可用控制系统工具箱中提供的 initial()函数求取。该函数的调用格式为

```
>>[y,t,x] = initial(G,x0)
```

其中，x0 为状态初值。

上例系统当控制输入为零，状态初值 x0=[0.2,0.2,0.2]时，系统的零输入响应可用下面的 MATLAB 语句直接求得

```
>> t = [0: .01: 2]; u = 0; G = ss(A,B,C,D); x0 = [0.2,0.2,0.2];
>> [y,t,x] = initial(G,x0,t);
>> plot(t,x)
```

系统状态响应曲线如图 3.8.3 所示。

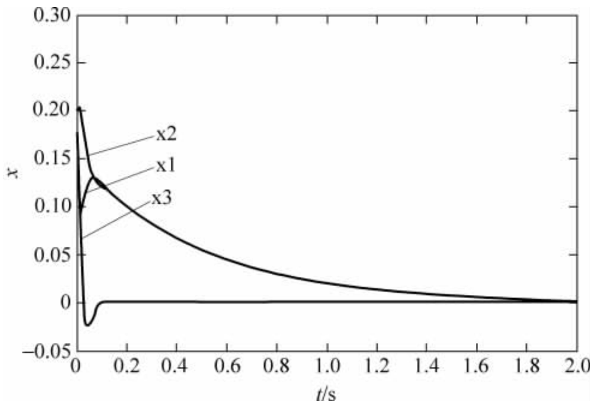

图 3.8.3 状态响应曲线

小结

本章讲述了状态方程的求解方法,介绍了线性定常连续系统齐次和非齐次状态方程的解以及线性连续时变系统和线性离散时间系统状态方程的解;分析了系统状态变量解的组成,系统状态运动由初始状态引起的自由分量和输入控制作用引起的强制分量两部分所构成。系统运动的关键在于状态转移矩阵,本章分析了它的性质及计算方法,重点介绍了定常系统的矩阵性质和计算。本章还结合离散系统状态方程的求解,讲解了连续时间系统的离散化问题。最后介绍了利用MATLAB求系统状态响应的方法。

习题

3.1 计算下列矩阵的矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$; (4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$。

3.2 已知系统状态方程和初始条件为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

(1) 试用拉氏变换法求其状态转移矩阵。

（2）试用化对角标准形法求其状态转移矩阵。

（3）试用化有限项法求其状态转移矩阵。

（4）根据所给初始条件，求齐次状态方程的解。

3.3　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 2×2 的常数矩阵，关于系统的状态方程式 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，有

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\text{时},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2t}\\-\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\text{时},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}\\-\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$$

试确定这个系统的转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,0)$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}$。

3.4　现有二阶标量微分方程式

$$\ddot{y}+\omega^2y=0$$

令 $x_1=y$、$x_2=\dot{y}=\dot{x}_1$，关于 $\boldsymbol{x}=[x_1\quad x_2]^{\mathrm{T}}$ 的系统状态方程式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&\omega\\-\omega&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试证明系统的转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,0)$ 是

$$\boldsymbol{\Phi}(t,0)=\begin{bmatrix}\cos\omega t&\sin\omega t\\-\sin\omega t&\cos\omega t\end{bmatrix}$$

3.5　关于矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，利用 $\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}$ 的性质，试确定系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\sigma&\omega\\-\omega&\sigma\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,0)$。

3.6　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 2×2 常数矩阵，关于系统的状态方程式 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，有

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\text{时},\quad\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-t}\\\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\text{时},\quad\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}+2t\mathrm{e}^{-t}\\\mathrm{e}^{-t}+t\mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}$$

试确定系统的转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,0)$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}$。

3.7　给定一个二维连续时间线性定常自治系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$t\geqslant0$。现知，对应于两个不同初态的状态响应分别为

$$\text{对 }\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-3t}\\-4\mathrm{e}^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$\text{对 }\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{-2t}\\-\mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}$$

试据此定出系统矩阵 $\boldsymbol{A}$。

3.8　试说明下列矩阵是否满足状态转移矩阵的条件，如果满足，试求与之对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$。

(1) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sin t & \cos t\\ 0 & -\cos t & \sin t\end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-2t}-2e^{-t}\\ e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-2t}-e^{-t}\end{bmatrix}$。

3.9 已知系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}$ 的转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t,0)$是

$$\boldsymbol{\Phi}(t,0)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & 2(e^{-2t}-e^{-t})\\ e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-2t}-e^{-t}\end{bmatrix}$$

试确定矩阵$\boldsymbol{A}$。

3.10 已知系统状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 1]\boldsymbol{x}$$

(1) 求系统的单位阶跃响应;(2) 求系统的脉冲响应。

3.11 求下列系统在输入作用为:①脉冲函数;②单位阶跃函数;③单位斜坡函数下的状态响应。

(1) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-a & 0\\ 0 & -b\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{b-a}\\ \dfrac{1}{a-b}\end{bmatrix}u$;

(2) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -ab & -(a+b)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$。

3.12 线性时变系统$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$的系数矩阵如下。试求与之对应的状态转移矩阵。

(1) $\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & t\end{bmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ t & 0\end{bmatrix}$

3.13 对连续时间线性定常系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}$,$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$,试利用拉氏变换证明系统状态运动的表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

3.14 已知线性定常离散系统的差分方程如下:

$$y(k+2)+0.5y(k+1)+0.1y(k)=u(k)$$

若设$u(k)=1$,$y(0)=1$,$y(1)=0$,试用递推法求出$y(k)$,$k=2,3,\cdots,10$。

3.15 设线性定常连续时间系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad t\geqslant 0$$

取采样周期$T=0.1$s,试将该连续系统的状态方程离散化。

3.16　已知线性定常离散时间系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

设 $u_1(k)$与 $u_2(k)$是同步采样，$u_1(k)$是来自斜坡函数 t 的采样，而 $u_2(k)$是由指数函数 e^{-t}采样而来。试求该状态方程的解。

3.17　试证明：若 $\boldsymbol{A}$ 是二阶方阵，其特征值为 λ_1 和 λ_2，特征向量为 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$，则方程$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的解一定能够表示成

$$\boldsymbol{x} = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{p}_1 + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \boldsymbol{p}_2$$

式中，常数 c_1 和 c_2 由下式确定

$$\boldsymbol{x}(0) = c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2$$

利用此结论求解方程$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。