第 1 天

考前冲刺突破之一
——探索规律

经典选读

“数学王子”高斯从小就善于观察和思考.在他读小学时候就能在课堂上快速地计算出 $1+2+3+\cdots+98+99+100=5050$,今天我们可以将高斯的做法归纳如下：

令 $S=1+2+3+\cdots+98+99+100$, ①

$S=100+99+98+\cdots+3+2+1$, ②

①+②：有 $2S=(1+100)\times 100$,解得 $S=5050$.

为了回答下列问题：若 n 为正整数,$3+5+7+\cdots+(2n+1)=168$,则 $n=$________.根据高斯的计算方法,设 $S=3+5+7+\cdots+(2n+1)=168$ ③

则 $S=(2n+1)+\cdots+7+5+3=168$, ④

③+④得 $2S=n(2n+1+3)=2\times 168$,

整理得 $n^2+2n-168=0$,解得 $n_1=12$,$n_2=-14$(舍去).

所以 $n=12$.

小明为了求 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{2016}$ 的值,在上述方法启发下得到下列方法：

设 $S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{2016}$,则 $2S=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{2017}$,因此 $2S-S=2^{2017}-1$,所以 $S=2^{2017}-1$.

你能仿照以上推理,计算出 $1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{2017}$ 的值吗?

1.1 等式规律

冲刺突破关键词

竖排、比较、相异联系序号

【数学情境[①]】

第 1 个等式：$a_1=\frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$；

第 2 个等式：$a_2=\frac{1}{3\times 5}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$；

第 3 个等式：$a_3=\frac{1}{5\times 7}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$；

第 4 个等式：$a_4=\frac{1}{7\times 9}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)$；

…

【数学眼光】

1. 问题

(1) 按以上规律列出第 5 个等式：$a_5=$________$=$________；

(2) 用含有 n 的代数式表示第 n 个等式：$a_n=$________$=$________(n 为正整数)；

(3) 求 $a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{100}$ 的值.

2. 分析

纵向比较可知：

相同点：(1) 中间项：分子都为 1,分母都是相邻两奇数的积,即两因数相差 2.

(2) 右边项：一个因数是$\frac{1}{2}$,另一因数是相邻两奇数的倒数差.

不同点：分母相对应位置不同的数字逐次增加 2.

横向比较可知：

相同点：中间项分母两因数为右边项中的被减数、减数分母.

不同点：中间项分母中较小奇数是序号的 2 倍减 1,较大奇数是序号的 2 倍加 1.

3. 解答

(1) $\frac{1}{9\times 11}$,$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)$.

---

① "数学情境"是指不含具体问题的数学背景,目的是引领师生用命题者的视角看试题设计,下同.

(2) $\dfrac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}$，$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$.

(3) $a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{100}$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{199}-\dfrac{1}{201}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{199}-\dfrac{1}{201}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{201}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{200}{201}=\dfrac{100}{201}$.

4. 思想与方法

(1) 探索等式规律的思考方法一般可以概括为：

纵向排列编写序号，横竖比较寻找异同；纵向不同的数字考虑用序号统一.

(2) 一般地，解答规律问题的基础知识是“简单”的数字规律，而基本方法是等式规律.

5. 数学情境再思考①

(1) 中间项分母相差 1 或 n，相应问题是什么？

(2) 如何设计为分式问题、方程问题？

选一题，练一练②

1. (2015 山东济宁)若 $1\times2^2-2\times3^2=-1\times2\times7$；

$(1\times2^2-2\times3^2)+(3\times4^2-4\times5^2)=-2\times3\times11$；

$(1\times2^2-2\times3^2)+(3\times4^2-4\times5^2)+(5\times6^2-6\times7^2)=-3\times4\times15$；

则$(1\times2^2-2\times3^2)+(3\times4^2-4\times5^2)+\cdots+[(2n-1)(2n)^2-2n(2n+1)^2]=$________.

2. (2015 湖南张家界，2012 江苏扬州)任意大于 1 的正整数 m 的三次幂均可“分裂”成 m 个连续奇数的和，如：$2^3=3+5$，$3^3=7+9+11$，$4^3=13+15+17+19$，…. 按此规律，若 m^3 分裂后其中有一个奇数是 2015，则 m 的值是(　　).

A. 46　　B. 45　　C. 44　　D. 43

3. (2013 四川达州)已知 $f(x)=\dfrac{1}{x\times(x+1)}$，则

$$f(1)=\frac{1}{1\times(1+1)}=\frac{1}{1\times2},\quad f(2)=\frac{1}{2\times(2+1)}=\frac{1}{2\times3},\quad\cdots$$

已知 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=\dfrac{14}{15}$，求 n 的值.

---

① “数学情境再思考”中的条件不加特殊说明仍为“数学情境”原条件，下同.

② 为方便使用，本书涉及的习题不再留空白答题，下同.

1.2　数字(阵)规律

冲刺突破关键词

数字规律化等式规律、循环节

【数学情境】

如图 1-1 是我国古代数学家杨辉最早发现的，称为“杨辉三角”，我们在此不妨称为“杨辉三角形”. 它的发现比西方要早五百年左右，由此可见我国古代数学的成就是非常值得中华民族自豪的!

【数学眼光】

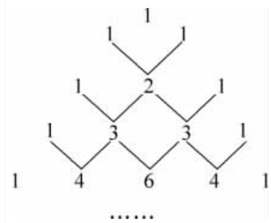


图　1-1

1. 问题

(1) 你能写出图 1-1 中的下一行数字吗?

(2) 若杨辉三角形的“底边”上的数字个数是 n，那么这个三角形称为 n 阶杨辉三角形. n 阶杨辉三角形共有多少个数字?

2. 分析

(1) 观察可知，三角形的“两腰”上的数字都是 1，底边上非顶点的数字都是这个数字正上方两个数字的和.

(2) 观察可知每一个三角形边上的数字个数相等，因此 n 阶杨辉三角形共有 $(3n-3)$ 个数字.

3. 解答

(1) 1,5,10,10,5,1.

(2) n 阶杨辉三角形共有 $(3n-3)$ 个数字.

4. 思想与方法

探索如 “杨辉三角”数阵中规律问题，常常需要纵横观察，前后联系，然后转化为“数字规律问题”，简单的“数字规律问题”可直接得到，复杂的“数字规律问题”可借助等式规律进行探索.

5. 数学情境再思考

“杨辉三角”中有许多规律，如它的每一行的数字正好对应了 $(a+b)^n$(n 为非负整数)的展开式中 a 按次数从大到小排列的项的系数.

例如，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 展开式中的系数 1,2,1 恰好对应图中第三行的数字；$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 展开式中的系数 1,3,3,1 恰好对应图中第四行的数字；$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ 展开式中的系数 1,4,6,4,1 恰好对应图中第五行的数字……

利用这个规律，请写出一个$(a+b)^n$的展示式：

$(a+b)^7=$________.

选一题，练一练

1. 一个叫巴尔末的中学教师成功地从光谱数据$\frac{9}{5}$，$\frac{16}{12}$，$\frac{25}{21}$，$\frac{36}{32}$，…中得到巴尔末公式，从而打开了光谱奥秘的大门，按照这种规律，第$n(n\geqslant 1)$个数据是________.

2.（2015 湖北咸宁）古希腊数学家把数 1，3，6，10，15，21，…叫做三角数，它有一定的规律性.若把第一个三角数记为a_1，第二个三角数记为a_2，…，第n个三角数记为a_n，计算a_1+a_2，a_2+a_3，a_3+a_4，…，由此推算$a_{399}+a_{400}=$________.

3.（2013 浙江湖州）将连续的正整数按以下规律排列，则位于第 7 行、第七列的数x是________.

	第一列	第二列	第三列	第四列	第五列	第六列	第七列	…
第 1 行	1	3	6	10	15	21	28	
第 2 行	2	5	9	14	20	27	⋮	
第 3 行	4	8	13	19	26	…	⋮	
第 4 行	7	12	18	25	…			
第 5 行	11	17	24	…				
第 6 行	16	23	…					
第 7 行	22	…	…	…	…	…	x	
…								

1.3　图形规律

冲刺突破关键词

图形规律化数字规律、推理、计算、指数

【数学情境】

如图 1-2，$\triangle ABC$的三个顶点和它内部的点P_1，把$\triangle ABC$分成 3 个互不重叠的小三角形；$\triangle ABC$的三个顶点和它内部的点P_1，P_2，把$\triangle ABC$分，成 5 个互不重叠的小三角形；$\triangle ABC$的三个顶点和它内部的点P_1，P_2，P_3，把$\triangle ABC$分成 7 个互不重叠的小三角形；…；$\triangle ABC$的三个顶点和它内部的点P_1，P_2，P_3，…，P_n，….

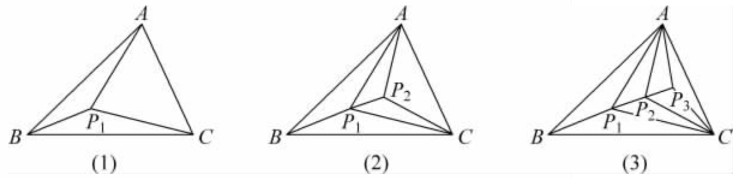


图　1-2

【数学眼光】

1. 问题

当$\triangle ABC$内有n个点时，$\triangle ABC$的三个顶点和它内部的点共可以分成多少个互不重叠的小三角形？

2. 分析

先观察小三角形个数. $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$把$\triangle ABC$分成的互不重叠的小三角形的个数分别是：3，5，7，….

然后分析这一列数字的共同特点，将数列中的每一个数转化为等式. 利用等式规律的探索方法探索等式的共性.

3. 解答

(1) $\triangle ABC$的三个顶点和它内部的点P_1，如图1-2(1)，可把$\triangle ABC$分成的互不重叠的小三角形的个数：$3=3+2\times0$.

(2) $\triangle ABC$的三个顶点和它内部的点P_1, P_2，如图1-2(2)，把$\triangle ABC$分成的互不重叠的小三角形的个数：$5=3+2\times1$.

(3) $\triangle ABC$的三个顶点和它内部的点P_1, P_2, P_3，如图1-2(3)，把$\triangle ABC$分成的互不重叠的小三角形的个数：$7=3+2\times2$.

所以当$\triangle ABC$内有n个点时，$\triangle ABC$的三个顶点和它内部的点共可以分成$3+2(n-1)$个互不重叠的小三角形.

4. 思想与方法

(1) 归纳类比方法：分别数(计算)出每一个图形满足条件的图形个数(数值)，再将这组数字(值)改写为等式，最后按照探索等式规律的方法进行.

(2) 直接推理法：许多与图形有关的规律探索问题可直接进行推理计算.

特别地，与图形有关的规律问题也可能具有“循环”的特点，思考时先分析循环节，然后用求“余数”的方法进行分析.

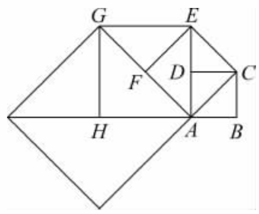
5. 数学情境再思考

(1) 将$\triangle ABC$改为正方形$ABCD$，其他条件不变，你会得到什么结论？

(2) 若$\triangle ABC$的面积是1，过顶点B的直线交BC于D. P_1是BD的中点，P_2是P_1D的中点，P_3是P_2D的中点，P_4是P_3D的中点. 依此类推，试用n的代数式表示$\triangle P_nBC$的面积.

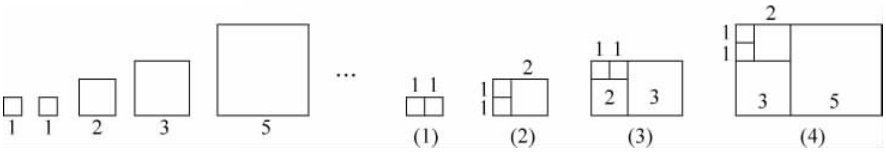
选一题，练一练

1. (2015江苏徐州)如图，正方形 $ABCD$ 的边长为1，以对角线 AC 为边作第二个正方形，再以对角线 AE 为边作第三个正方形 $AEGH$，如此下去，第 n 个正方形的边长为________.



(第1题)

2. 意大利著名数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时，发现有这样一组数：1，1，2，3，5，8，13，…，其中从第三个数起，每一个数都等于它前面两上数的和. 现以这组数中的各个数作为正方形的长度构造如下正方形：



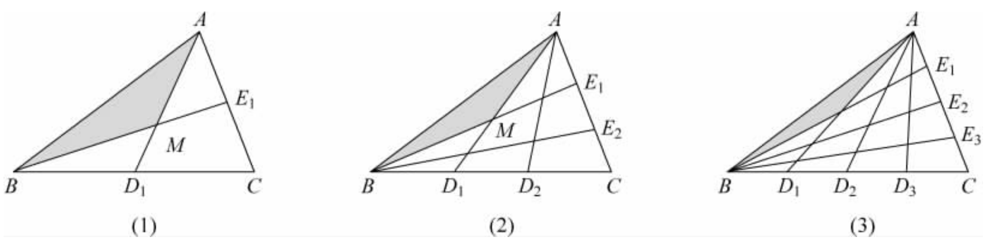
(第2题)

再分别依次从左到右取2个、3个、4个、5个正方形拼成如图中矩形并记为(1)、(2)、(3)、(4). 相应矩形的周长如下表所示：

序号	(1)	(2)	(3)	(4)
周长	6	10	16	26

若按此规律继续作矩形，则序号为(10)的矩形周长是________.

3. (2015江苏盐城)设△ABC 的面积为1，如图(1)，将边 BC，AC 分别2等分，BE_1，AD_1 相交于点 M，△AMB 的面积记为 S_1；如图(2)将边 BC，AC 分别3等分，BE_1，AD_1 相交于点 M，△AMB 的面积记为 S_2；…，依此类推，则 S_n 可表示为________(用含 n 的代数式表示，其中 n 为正整数).



(第3题)

1.4 图像规律

冲刺突破关键词

图像规律化图形规律、推理与计算、数字规律、指数

【数学情境】

如图 1-3,已知 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$是 x 轴上的点,且 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_nA_{n+1}=1$,分别过点 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{n+1}$作 x 轴的垂线交一次函数 $y=0.5x$ 的图像于点 $B_1,B_2,B_3,\cdots,B_{n+1}$,连接 $A_1B_2,B_1A_2,A_2B_3,B_2A_3,\cdots,A_nB_{n+1},B_nA_{n+1}$依次产生交点 $P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n$.

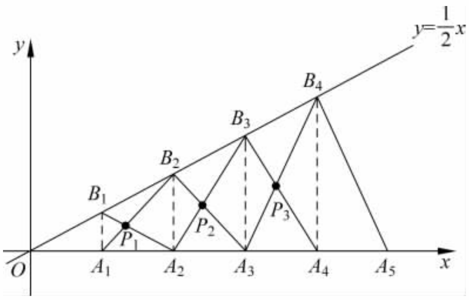


图 1-3

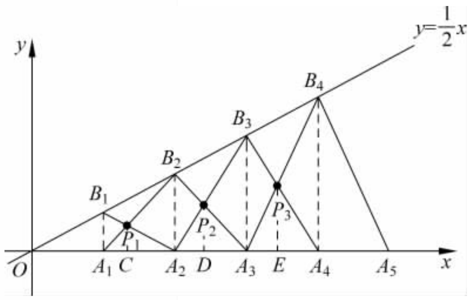


图 1-4

【数学眼光】

1. 问题

请写出求 P_n的横坐标的过程.

2. 分析

过 P_1 作 $P_1C\perp x$ 轴于C,过 P_2 作 $P_2D\perp x$ 轴于D,…,结合 $B_1,B_2,B_3,\cdots$的横坐标以及相似三角形分别求出 $OC,OD,\cdots$,最后利用数字规律或等式规律探求方法寻求答案.

3. 解答

因为 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5的横坐标为 1,2,3,4,5.代入函数 $y=\frac{1}{2}x$ 可得 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5的纵坐标为$\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}$.

如图 1-4,作 $P_1C\perp x$ 轴于点 C,$P_2D\perp x$ 轴于点 D,$P_3E\perp x$ 轴于点 E,于是 $A_1C:A_2C=A_1P_1:P_1B_2=A_1B_1:A_2B_2=\frac{1}{2}:1$,又 $A_1A_2=1$,所以 $A_1C=\frac{1}{3}$.

同理可得 $A_2D=\frac{2}{5}$,$A_3E=\frac{3}{7}$.

于是 $OC=1+\frac{1}{3}$，$OD=2+\frac{2}{5}$，$OE=3+\frac{3}{7}$，…，P_n 的横坐标为：$n+\frac{n}{2n+1}$.

4. 思想与方法

(1) 函数规律一般有两类，即等式规律和图像规律.

(2) 解决与函数图像有关的规律探索问题，一是可以利用解析法直接推理计算；二是可以将图像规律转化为数字规律或等式规律进行探索.

(3) 在探索规律问题中，等式规律探索的方法属于基本方法.思考的顺序一般是：函数图像规律可转化为图形规律；图形规律转化为数字(阵)规律；数字(阵)规律转化为等式规律.

5. 数学情境再思考

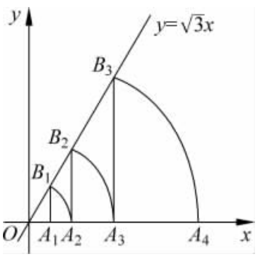
(1) 求 $\triangle P_nA_nB_n$ 的面积；(2)请写出 $\triangle P_{n-1}A_nB_n$ 的面积与 $\triangle P_nA_{n+1}B_{n+1}$ 的面积之比.

选一题，练一练

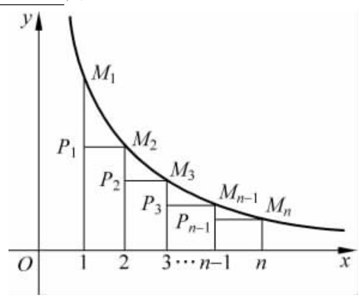
1. (2015 山东济南)在平面直角坐标系中有三个点 $A(1,-1)$，$B(-1,-1)$，$C(0,1)$，点 $P(0,2)$ 关于 A 的对称点为 P_1，P_1 关于 B 的对称点 P_2，P_2 关于 C 的对称点为 P_3，按此规律继续以 A，B，C 为对称中心重复前面的操作，依次得到 P_4，P_5，P_6，…，则点 P_{2015} 的坐标是(　　).

A. $(0,0)$　　B. $(0,2)$　　C. $(2,-4)$　　D. $(-4,2)$

2. 如图，直线 $y=\sqrt{3}x$，点 A_1 坐标为$(1,0)$，过点 A_1 作 x 轴的垂线交直线于点 B_1，以原点 O 为圆心，OB_1 长为半径画弧交 x 轴于点 A_2；再过点 A_2 作 x 轴的垂线交直线于点 B_2，以原点 O 为圆心，OB_2 长为半径画弧交 x 轴于点 A_3，…，按此做法进行下去，点 A_5 的坐标为(________，________).



(第 2 题)



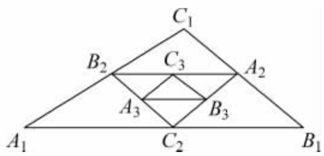
(第 3 题)

3. 如图，已知反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像，当 x 取 1，2，3，…，n 时，对应在反比例图像上的点分别为 M_1，M_2，M_3，…，M_n，则 $S_{\triangle P_1M_1M_2}+S_{\triangle P_2M_2M_3}+\cdots+S_{\triangle P_{n-1}M_{n-1}M_n}=$ ________.

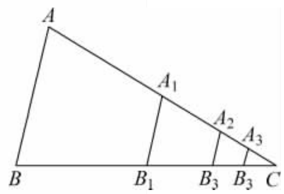
考前选练 1

1.（2013 湖南衡阳）观察下列按顺序排列的等式：$a_1=1-\frac{1}{3}$，$a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$，$a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$，$a_4=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$，…，试猜想第 n 个等式（n 为正整数）$a_n=$________.

2.（2015 广东珠海）如图，在$\triangle A_1B_1C_1$ 中，已知 $A_1B_1=7$，$B_1C_1=4$，$A_1C_1=5$，依次连接$\triangle A_1B_1C_1$ 三边中点，得$\triangle A_2B_2C_2$，再依次连接$\triangle A_2B_2C_2$ 的三边中点得$\triangle A_3B_3C_3$，…，则$\triangle A_5B_5C_5$ 的周长为________.



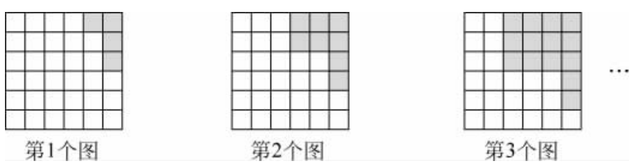
（第 2 题）



（第 3 题）

3．如图，$\triangle ABC$ 的面积为 1，分别取 AC，BC 两边的中点 A_1，B_1，则四边形 A_1ABB_1 的面积为$\frac{3}{4}$，再分别取 A_1C，B_1C 的中点 A_2，B_2，A_2C，B_2C 的中点 A_3，B_3，依次取下去.利用这一图形，能直观地计算出$\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots+\frac{3}{4^n}=$________.

4．下图是在正方形网格中按规律填成的阴影，根据此规律，则第 n 个图中阴影部分小正方形的个数是________.



（第 4 题）

5．阅读下列材料：

$1\times2=\frac{1}{3}\times(1\times2\times3-0\times1\times2)$，

$2\times3=\frac{1}{3}\times(2\times3\times4-1\times2\times3)$，

$3\times4=\frac{1}{3}\times(3\times4\times5-2\times3\times4)$，