第3章 随机变量的数字特征

CHAPTER 3

在第 2 章中，已经介绍了最常见最重要的随机变量、分布概型、随机向量分布以及随机向量函数的分布的求法. 这些分布中都有一些实的参数，知道了这些参数和分布类型，分布也就完全决定了. 可见进一步了解这些参数是重要的. 另一方面，了解和掌握分布函数对全面认识随机现象的概率规律当然是重要的，但在一些应用场合，例如某寻呼台，我们更想知道的是随机要求服务的呼叫，在高峰期和低谷期（闲淡期）的平均数是多少？离开此平均数的波动有多大？知道这些随机现象概率规律中的特征性数量，就可以决定寻呼台的设备配置和在高峰与闲淡期的人员安排. 也就是说，要从概型中"提炼"出一些可以表示特征的实数. 本章就要定义随机变量的这些数字特征，它们与分布中的参数密切相关. 此外，本章还要介绍这些数字特征的性质及它们间的关系.

3.1 数学期望

3.1.1 定义

引例 设某人射击 100 次，成绩如下表. 求他射击的平均成绩.

得分	1	2	3	4
次数	10	20	30	40

解 此人的平均每次射击得分

$$(1\times 10+2\times 20+3\times 30+4\times 40)/100=3. \qquad \square$$

将上式左方改写为

$$1\times(10/100)+2\times(20/100)+3\times(30/100)+4\times(40/100),$$

则括号中的数正好是得相应分的频率.由此可以看到,此人100次射击的平均得分是所有得分的加权和,权系数是相应得分的频率.在没有进行实地射击之前,射手的得分是一个随机变量 X,设它的分布列为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix},$$

由频率与概率的关系及频率的稳定性,则自然认为这个随机变量的平均数是以相应得分的概率为权系数的加权和,即

$$1\times p_1+2\times p_2+3\times p_3+4\times p_4. \tag{3.1.1}$$

此数可视为该射手每次射击得分 X 在数学上的可以期望的数值,它将定义为 X 的数学期望.在给出一般随机变量 X 的数学期望之前,先简单介绍斯蒂尔切斯积分(Stieltjes 积分,简称 S 积分)的概念,这样可使数学期望和矩的定义及讨论有一个统一的形式,而不要求一般读者熟悉 S 积分.例如,X 的数学期望定义为下面的式(3.1.3),读者可以理解它在离散型时是和式(3.1.4),而在连续型时是积分(3.1.5).

在高等数学里学过的定积分,实际上叫做黎曼(Riemann)积分,目的是计算曲线 $y=g(x)$ 所围出的曲边梯形的面积,它定义为一种和的极限.设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$ 是 $(a,b]$ 的一个分割,d 为它的最大步长,$x'_j\in(x_j,x_{j+1}]$,如果和式 $\sum\limits_{j=1}^{n}g(x'_j)\Delta x_j$ 在 $d\to 0$ 时的极限存在,且其值不但与诸 x'_j 在 $(x_j,x_{j+1}]$ 中的选取无关且与分割的选取无关,则定义这个极限值为函数 $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上的黎曼积分,记作 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,即 $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ d\to 0}}\sum\limits_{j=1}^{n}g(x'_j)\Delta x_j=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.如果函数 $g(x)$ 与 $F(x)$ 对上述分割构造的如下另一种和式的极限存在,且极限值与分割及 x'_j 的选取无关,就称这个极限值为 $g(x)$ 对 $F(x)$ 在 $(a,b]$ 上的 S 积分,即

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ d\to 0}}\sum_{j=1}^{n}g(x'_j)\Delta F(x_j)=\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x), \tag{3.1.2}$$

其中 $\Delta F(x_j)=F(x_{j+1})-F(x_j)$.这种 S 积分也可像黎曼积分那样推广到全直线上去.

定义 3.1.1 设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$,如果下列 S 积分绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,\mathrm{d}F_X(x)<+\infty,$$

则称 X 的**数学期望**(expectation)存在,其值(记为 EX)为

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}F_X(x). \tag{3.1.3}$$

右方积分是在式(3.1.2)中取 $g(x)=x$,而取 F 为 X 的分布函数得到的.

注 1 当 X 是离散型随机变量时,式(3.1.3)为

$$EX = \sum_k x_k p_k; \tag{3.1.4}$$

当 X 为连续型随机变量时，式(3.1.3)为

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x. \tag{3.1.5}$$

事实上，当 X 为离散型随机变量时，设其所有能取的值为 $\{y_k\}$，不妨设 $y_1 < y_2 < \cdots$. 对每一 k，记 $p_k = P(X = y_k)$. 由于最大步长 $d \to 0$，故当 n 足够大时在每一段 $(x_j, x_{j+1}]$ 中至多只有 $\{y_k\}$ 中的一个点. 如果没有 $\{y_k\}$ 中的点，式(3.1.2)左方和式中相应项为 0，这是因为 $\Delta F_X(x_j) = P(x_j < X \leqslant x_{j+1}) = 0$；如果有一个点 y_k，由于积分存在，可以把式(3.1.2)左方的 x_j' 取为 y_k，注意

$$\Delta F_X(x_j) = P(x_j < X \leqslant x_{j+1}) = P(y_{k-1} < X \leqslant y_k) = F_X(y_k) - F_X(y_{k-1}) = p_k,$$

则式(3.1.2)左方和式相应项为 $y_k p_k$. 这样式(3.1.2)左方和式只留下全部各含 $\{y_k\}$ 中一点的所有项，因此可知当 X 为离散型随机变量时式(3.1.3)为式(3.1.4). 这与式(3.1.1)是一致的. 它是用概率作权系数的加权平均值.

当 X 为连续型随机变量时，因为 $\Delta F_X(x_j) = f_X(x_j)\Delta x_j + o(\Delta x_j)$，式(3.1.3)可写为式(3.1.5)形式的积分. 这种积分，在力学上可解释单位质量的棒形刚体的重心，这里 $f(x)$ 为在截面坐标 x 处有单位质量的刚体的密度.

注 2 引入数学期望的目的是用来表示随机变量的“平均值”，该平均值在式(3.1.4)中是级数的和，它不应该因级数的并项与重排而改变，即式(3.1.4)中的级数应保证可进行任意的并项与重排，从而要求级数有绝对收敛性. 当 X 为连续型随机变量时，同理. 这就是定义中要求绝对可积的根据. 因此，数学期望有个存在性问题. 此时转而考虑中位数(median) x_{med}，其定义为使 $P(X \geqslant x_{\mathrm{med}}) = P(X \leqslant x_{\mathrm{med}})$ 成立的点. 例如密度函数为 $\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ 的柯西分布，其数学期望不存在，而 $x_{\mathrm{med}} = 0$；如 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$，$x_{\mathrm{med}} = 0$. 当 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$x_{\mathrm{med}}$ 可取 $(-1, 1)$ 之间的所有数，中位数不唯一.

注 3 最后提醒注意，一个随机变量的数学期望不再是随机变量，而是一个确定的实数——随机因素已经加权平均掉了.

如何求一个随机变量 X 的函数 $g(X)$ 的数学期望呢？由引例，如果射手的得分以 10，20，30 及 40 计，即将原来的得分 X 扩大 10 倍，$Y = 10X$(即 $g(X) = 10X$)，显然 Y 的平均值只要将式(3.1.1)改写为

$$\begin{aligned} EY = Eg(X) &= 1 \times 10 \times p_1 + 2 \times 10 \times p_2 + 3 \times 10 \times p_3 + 4 \times 10 \times p_4 \\ &= \sum_{k=1}^{4} 10 x_k p_k = \sum_{k=1}^{4} g(x_k) p_k. \end{aligned} \tag{3.1.1$'$}$$

一般地，如果 X 的分布为 $\{p_k\}$，则

$$Eg(X)=\sum_k g(x_k)p_k. \tag{3.1.6}$$

对于连续型随机变量,注意 $f_X(x)\mathrm{d}x$ 是 X 在 x 点附近的概率,与 p_k 相当,因此

$$Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)\mathrm{d}x. \tag{3.1.7}$$

下面给出更一般的统一的概念.

定义 3.1.2 设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$,$y=g(x)$是博雷尔(Borel)可测函数.如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\mathrm{d}F_X(x)<+\infty,$$

则称 $Y=g(X)$的数学期望存在,其值为

$$Eg(X)\xlongequal{\mathrm{def}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}F_X(x). \tag{3.1.8}$$

但是 Y 既然是随机变量,它的期望在定义 3.1.1 中已经给过,下面说明现在的两个定义不矛盾.事实上,由于式(3.1.6)中 $g(x_k)$也可看作 Y 相应的取值 y_k,注意例 2.5.1,X 与 $Y=g(X)$的分布都是$\{p_k\}$,只是取值分别为 x_k 和 $y_k=g(x_k)$,即 $P(g(X)=y_k)=P(X=x_n)=p_k$.参见式(3.1.1′),因此式(3.1.6)又可写为

$$Eg(X)=\sum_k g(x_k)p_k=\sum_k y_kP(g(X)=y_k)=\sum_k y_kp_k=EY. \tag{3.1.6′}$$

对于连续型的情形,如 $y=g(x)$的反函数记为 $x=h(y)$,则由函数密度公式(2.5.2)及定义 3.1.1,有

$$\text{式(3.1.7)右方}=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_X(h(y))|h'(y)|\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=EY. \tag{3.1.7′}$$

一般地.可建立如下关系:

$$Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}F_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\mathrm{d}F_{g(X)}(y)=EY. \tag{3.1.8′}$$

定义 3.1.3 设随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的各分量 X_k 的期望存在,则定义 $\boldsymbol{X}$ 的数学期望为 $E\boldsymbol{X}=(EX_1,EX_2,\cdots,EX_n)$.又设 $Y=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是随机变量,如果下一 S 积分绝对可积,则称 $Y=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的数学期望存在,其值为

$$Eg(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n). \tag{3.1.9}$$

可写为向量形式,且可建立类似一维时的通用公式(3.1.8′):

$$\begin{aligned}Eg(\boldsymbol{X})&=\int_{\mathbb{R}^n}g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}y\mathrm{d}F_{g(X_1,\cdots,X_n)}(y)=EY,\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

注 类似于一元情形,仿照 2.5 节,可定义 n 元博雷尔集和 n 元博雷尔可测函数.当

$y=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为n元博雷尔可测函数，而$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是随机向量时，则$Y=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一维随机变量.

3.1.2 性质

以下恒设所涉及的数学期望存在，其中 a. e. 为 almost everywhere 的缩写，表示几乎处处，有时也记为 a. s. (almost sure)，意为几乎必定.

定理 3.1.1 (1) $Ec=c$；

(2) 线性：$E(aX+bY)=aEX+bEY$.

(3) 保界性：设 $a\leqslant X\leqslant b$, a. e.，则 $a\leqslant EX\leqslant b$.

(4) 设诸 X_i 独立，则 $E(X_1X_2\cdots X_n)=\prod\limits_1^n EX_j$.

(5) 记 $g(x)=E(X-x)^2$，则 $g(x)$ 在 $x=EX$ 取最小值，即

$$E(X-EX)^2\leqslant E(X-x)^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

证明 既然数学期望是求和或积分，它们都有线性性质，再注意$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}F_X(x)=1$，容易证得性质(1)～(3). 下面仅对 X 为连续型的情形写出(4)的证明. 由式(3.1.9)，诸 X_i 独立及式(3.1.5)，有

$$\begin{aligned}
E(X_1X_2\cdots X_n)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2\cdots x_nf_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2\cdots x_nf_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\
&=\prod_{k=1}^n\int_{-\infty}^{+\infty}x_kf_{X_k}(x_k)\mathrm{d}x_k=\prod_{k=1}^nEX_k.
\end{aligned}$$

为证(5)，由(2)并注意 $g(x)=E(X-x)^2=EX^2-2xEX+x^2$，其中 EX,EX^2 为常数. 故 $g'(x)=-2EX+2x$. 令其为0，及 $g''=2>0$，知(5)成立. □

由性质(5)可知，X 离 EX 的平方距离按概率加权的平均值为最小，这再次表明 EX 是 X 的“中心位置”.

3.1.3 例题

例 3.1.1 设 $X\sim B(n,p)$，求 EX.

解 Ⅰ (直接用定义)由式(3.1.4)，有

$$EX=\sum_{k=0}^nkp_k=\sum_{k=1}^nk\mathrm{C}_n^kp^kq^{n-k}.$$

容易验证组合公式

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}, \tag{3.1.11}$$

由此

$$EX = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np. \qquad \square$$

这一结果的解释是：每次试验成功(例如定点投篮命中)的概率为 p，因此重复独立投篮 n 次，可以期望的平均投中次数为 np. 既然 X 是 n 重试验中成功的次数，这又一次说明 EX 确为 X 的“平均值”的概念.

解Ⅱ (试验分解)定义伯努利计数变量：

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{如第 } j \text{ 次试验成功}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases} \qquad j = 1,2,\cdots,n.$$

诸 X_j 是独立同分布的，$EX_j = P(X_j=1)=p$. 它们是一个计数变量，故 $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$. 由数学期望的线性性质，$EX = \sum_{j=1}^{n} EX_j = np$. $\square$

显然解Ⅱ比较简单. 将一个复杂的随机试验(相应的随机变量)分解成几个简单试验(简单随机变量)的和，再利用数学期望的性质计算或求解，常常可使复杂的问题大为简化，这种方法值得提倡. 当然作为由定义直接计算数学期望的级数求和与积分的基本方法和技巧，还是应该熟练掌握的.

例 3.1.2 设 X 是在 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，$P(A)=p$，令

$$Y = \begin{cases} 0, & X \text{ 为偶数}, \\ 1, & X \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

求 EY.

解 设 $EY=P(Y=1)\overset{\text{def}}{=\!=}a$，$P(Y=0)\overset{\text{def}}{=\!=}b$，则

$$\begin{aligned} b-a &= \sum_{2k\leqslant n} P(X=2k) - \sum_{2k+1\leqslant n} P(X=2k+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i (-p)^i q^{n-i} = (q-p)^n = (1-2p)^n, \end{aligned}$$

故

$$\begin{cases} b+a = 1, \\ b-a = (1-2p)^n, \end{cases}$$

解得 $a=EY=[1-(q-p)^n]/2$. $\square$

例 3.1.3 两名射手各向自己的靶独立射击，直到有一次命中时该射手方停止射击. 如第 i 名射手每次命中概率 $p_i(0<p_i<1)$，$i=1,2$. 求两射手均停止射击时脱靶(未命中)

总数的分布及数学期望.

解 以 X_i 记射手 i 的脱靶数,则 $X_i+1\sim \mathrm{Ge}(p_i)$,$i=1,2$.

现在求几何分布的数学期望.设 $Y\sim \mathrm{Ge}(p)$,求 EX.直接利用定义.注意下面的幂级数在 $|y|<1$ 时一致收敛,因此可逐项求导:

$$EY=\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{+\infty}(y^k)'\Big|_{y=q}=p\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}y^k\Big)'\Big|_{y=q}$$
$$=p(y/(1-y))'\Big|_{y=q}=p\cdot 1/p^2=1/p.$$

故 $E(X_i+1)=\dfrac{1}{p_i}$,$i=1,2$,于是 $EX_i=E(X_i+1)-1=\dfrac{1}{p_i}-1$,两射手脱靶总数 $X=X_1+X_2$ 的期望为

$$EX=EX_1+EX_2=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-2.$$

最后求 X 的分布.注意,由题设知 X_1 与 X_2 独立,于是

$$P(X=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)P(X=n\mid X_1=k)=\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)P(X_2=n-k)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(1-p_1)^k p_1(1-p_2)^{n-k}p_2=p_1p_2(1-p_2)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^k.$$

当 $p_1\neq p_2$ 时,

$$P(X=n)=p_1p_2(1-p_2)^n\left[1-\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^{n+1}\right]\Big/\left(1-\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)$$
$$=\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}\left[(1-p_2)^{n+1}-(1-p_1)^{n+1}\right];$$

当 $p_1=p_2$ 时,

$$P(X=n)=(n+1)p_1^2(1-p_1)^n=(n+1)p_1^2(1-p_1)^n.$$ □

例 3.1.4 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,求 EX.

解Ⅰ (直接用定义)由式(3.1.5)及 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,有

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

令 $(x-\mu)/\sigma=t$,得

$$EX=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t=\mu.$$

解Ⅱ (标准化法)回忆 X 的标准化 $X^*\sim N(0,1)$,其密度关于 y 轴对称,从而下面积分中的被积函数为奇函数,故立即得到

$$EX^*=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x=0.$$

由期望的线性性质 $EX=E(\sigma X^*+\mu)=\mu$. □

注 1 先求标准化随机变量的数学期望，再利用数学期望性质求解，也常可使问题简化. 此法在求其他数字特征时，也常常应用.

注 2 设 $Y\sim N(0,1)$. 由标准正态密度关于 y 轴对称及分部积分法可分别得到下面两个结果：

$$\begin{cases} EY^{2n+1}=0, \\ EY^{2n}=(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots 3\times 1. \end{cases} \tag{3.1.12}$$

例 3.1.5 设某网络服务器首次失效时间服从 $\mathrm{Ex}(\lambda)$，现随机购得 4 台这种网络服务器，求下列事件的概率.

(1) 事件 A：至少有一台其寿命(首次失效时间)等于此类服务器期望寿命.

(2) 事件 B：有且仅有一台寿命小于此类服务器期望寿命.

解 设服务器首次失效时间为 X，由题设 $X\sim \mathrm{Ex}(\lambda)$.

(1) 由题设 $X\sim \mathrm{Ex}(\lambda)$，故为连续型随机变量. 由于连续型随机变量取任何固定值的概率是 0，因此 $P(X=\text{期望寿命})=0$，从而 $P(A)=0$.

(2) 先求指数分布的数学期望.

$$EX=\int_0^{+\infty} x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\lambda x}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda},$$

即服务器的期望寿命为$\frac{1}{\lambda}$.

其次，一台服务器的寿命小于此类服务器期望寿命 EX 的概率为

$$p_0=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-1}\approx 1-0.3679=0.6321.$$

而每台服务器的寿命可能小于 EX，也可能超过 EX，由此得到伯努利分布，从而 4 台服务器中寿命小于 EX 的台数应该服从二项分布，故所求概率为

$$\mathrm{C}_4^1 p_0(1-p_0)^3=4\mathrm{e}^{-3}(1-\mathrm{e}^{-1})=4\times 0.3679^3\times 0.63212\approx 0.1259. \qquad \square$$

例 3.1.6(Laplace 配对) 将 n 只球($1\sim n$ 号)随机地放进 n 只盒子($1\sim n$)中去，一只盒子装一只球. 若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对. 记 X 为总的配对数，求 EX.

解 令计数变量

$$X_i=\begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 个配对}, \\ 0, & \text{反之}, \end{cases}$$

则 $X=\sum\limits_1^n X_i$，且由波利亚(Pólya)模型(例 1.3.3，认为袋中只有第 i 号球为红球，取 $c=-1$，第 i 次取中红球的概率与第 1 次取中红球的概率相同)，诸 X_i 不独立但同分布，分布为

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

由此及数学期望的线性性质知

$$EX = \sum_1^n EX_i = \sum_1^n \frac{1}{n} = 1. \qquad \square$$

分析与总结 (1) 利用全概率公式和归纳法直接可证诸 X_i 同分布,或者利用例 1.2.3 解Ⅱ,得到. 注意,这里的计数变量彼此不是独立的,因此不是伯努利计数变量.

(2) 本题求解时读者当然会首先想到由数学期望定义直接计算 EX. 这是一个拉普拉斯(Laplace)配对问题(参看例 1.5.7),但由于 $P(X=k)$ 为恰有 k 个配对的概率(参看习题 1),则

$$q_k = \frac{\mathrm{C}_n^k}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right].$$

可见,由此虽然可以得到 X 期望的表达式,但形式很复杂,不易进一步化简. 因此采用分解法,将复杂的试验(变量)分解. 由本题再次得到一个经验:分解法确实是个值得推荐的好方法! 是求解这样问题时的首选方法.

例 3.1.7 在伯努利试验中,每次试验成功的概率为 p. 试验进行到成功与失败均出现为止,求试验的平均次数.

解 令 X=至试验停止(即出现所求事件)时共计进行的试验次数,$X=2,3,\cdots$;

Y_1=试验在第一次出现成功时停止(即先出现失败直到出现成功为止)所需的试验次数;

Y_2=试验在第一次出现失败时停止所需的试验次数,$Y_i=2,3,\cdots$;

则在 $n\geqslant 2$ 时,$Y_1\sim \mathrm{Ge}(p)$,$Y_2\sim \mathrm{Ge}(1-p)$,且事件$(X=n)=(Y_1=n)+(Y_2=n)$. 故

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X=n) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(Y_1=n) + \sum_{n=2}^{+\infty} nP(Y_2=n) \\
&= EY_1 - P(Y_1=1) + EY_2 - P(Y_2=1) \\
&= \frac{1}{p} - p + \frac{1}{1-p} - (1-p) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} - 1 = \frac{p^2-p+1}{p(1-p)}.
\end{aligned} \qquad \square$$

例 3.1.8 设风速 V 在$(0,a)$上服从均匀分布,飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数:$W=kV^2$($k>0$,常数),求 W 的数学期望.

解 由 $V\sim U(0,a)$，有

$$f(v)=\frac{1}{a}I \quad (0<v<a).$$

由式(3.1.7)有

$$EW=\int_{-\infty}^{+\infty}kv^2 f(v)\mathrm{d}v=\int_0^a kv^2\ \frac{1}{a}\mathrm{d}v=\frac{1}{3}ka^2.$$ □

例 3.1.9 按季节出售的某种应时商品，每售出 1kg 获利润 b 元. 如到季末尚有剩余商品，则每千克净亏损 c 元. 设某商店在季度内这种商品的销售量 X(单位：kg)是一个随机变量，在区间$[s_1,s_2]$上服从均匀分布. 为使商店所获得利润的数学期望最大，问商店应进多少货？

解 以 s(单位：kg)表示进货数，易知应有 $s_1\leqslant s\leqslant s_2$，进货 s 所得利润记为 $a_s(X)$，则 $a_s(X)$是随机变量，而 s 是参数，且有

$$a_s(X)=\begin{cases} bX-c(s-X), & s_1<X\leqslant s,\\ sb, & s<X\leqslant s_2. \end{cases}$$

X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{s_2-s_1}I \quad (s_1<x\leqslant s_2).$$

于是由式(3.1.7)，有

$$\begin{aligned} E[a_s(X)]&=\int_{s_1}^{s_2}a_x(x)\ \frac{1}{s_2-s_1}\mathrm{d}x\\ &=\int_{s_1}^{s}[bx-c(s-x)]\frac{1}{s_2-s_1}\mathrm{d}x+\int_s^{s_2}sb\ \frac{1}{s_2-s_1}\mathrm{d}x\\ &=\left[-\frac{b+c}{2}s^2+(cs_1+bs_2)s-\frac{b+c}{2}s_1^2\right]\Big/(s_2-s_1). \end{aligned}$$

为求得 $E[a_s(X)]$的极值点，将 $E[a_s(X)]$关于 s 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E[a_s(X)]=[-(b+c)s+cs_1+bs_2]/(s_2-s_1).$$

令$(E[a_s(X)])'=0$，解得 $s=(cs_1+bs_2)/(b+c)\in(s_1,s_2)$. 即当 s 取此值时获得的利润的数学期望最大. □

上例涉及的是带有参数的随机变量函数的数学期望，下面两个例子是求随机向量函数的期望.

例 3.1.10 设水电公司在指定时间内限于设备能力，其发电量 X(单位：万 kW)$\sim U[10,30]$，用户用电量 Y(单位：万 kW)$\sim U[10,20]$. 假设 X 与 Y 独立，水电公司每供应 1kW 电获得 0.32 元的利润，空耗 1kW 电损失 0.12 元. 而当用户用电量超过供电量时，公司需从别处补电，1kW 电反而赔 0.20 元. 求在指定时间内，该公司获利 Z 的数学期望.