

第3章

连续时间信号的频域分析

3.1 引言

第2章对连续时间信号进行了三种分解——直流分量和交流分量、奇分量和偶分量、按脉冲分量进行分解(卷积)。本章将对连续时间信号进行第4种分解——按频率成分进行分解(正交分解)。

1768年生于法国的傅里叶(J. B. J. Fourier, 1768—1830)在研究热的传播和扩散时,提出了“任何周期信号都可以用成谐波关系的正弦函数级数来表示”的论点,结果被拉格朗日否定,拉格朗日坚持认为三角级数无法表示有间断点的函数。直至15年后的1822年,傅里叶才在他的 *Theorie Analytique De La Chaleur* (《热的分析理论》)一书中以另一种方式展示了他的成果,并且提出非周期信号可以用“不全成谐波关系的正弦信号加权积分”表示。其实拉格朗日是对的,正弦曲线确实无法组合成一个带有间断点的信号。但是,我们可以用正弦曲线来非常逼近地表示它,逼近到两种表示方法不存在能量差别,二者对任何实际的物理系统的作用是相同的,基于此,傅里叶也是对的。

其实,至为重要的是,虽然正交函数很多,但傅里叶选择了正弦函数作为正交函数进行分解,就具有了非同寻常的工程意义。因为正弦信号是唯一在函数表达式中既含有时间也含有频率的信号,从正弦波中既可以看到时间的参量,也可以看到频率的影响,这是问题的关键。也可以说,正弦波是对频域的描述,这是频域中最重要的规则。

因此,傅里叶分析实际上揭示了信号的时间特性和频率特性之间的内在联系,是对信号的频率特性的分析,这是傅里叶分析的物理意义所在,也是他对人类最大的贡献。

3.2 知识脉络

1. 周期信号的傅里叶级数

任何周期信号只要满足狄里赫利条件,都可以展开成傅里叶级数。

指数形式:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

三角形式:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

幅度相位形式:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t - \phi_n)$$

2. 周期信号的频谱

周期信号的频谱指的是周期信号的傅里叶级数的系数与频率之间的关系。

指数形式的频谱：

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \quad n \in (-\infty, +\infty)$$

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$$

其中, $|F_n|$ 是其幅度频谱, 简称幅度谱; φ_n 是其相位频谱, 简称相位谱。

三角形式的频谱：

直流成分：

$$a_0 = c_0 = F_0$$

谐波成分：

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|F_n|, \quad n \in [1, +\infty)$$

谐波成分的相角：

$$\tan \phi_n = \frac{b_n}{a_n}$$

3. 周期信号的功率谱

周期信号的功率谱指的是各次谐波的平均功率与频率的关系。

各次谐波的平均功率等于各次谐波的有效值的平方, 则功率谱为

$$p(\omega) = (c_n / \sqrt{2})^2$$

或者

$$p(\omega) = 2|F_n|^2$$

周期信号的平均功率(Parseval 定理)

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f^2(t) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 \\ &= c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n / \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

4. 非周期信号的傅里叶变换

正变换：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

反变换：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶变换表示的是信号的频谱密度:

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

幅度频谱密度(也简称幅度谱): $|F(\omega)| \sim \omega$

相位频谱密度(也简称相位谱): $\varphi(\omega) \sim \omega$

(1) 典型信号的傅里叶变换

典型信号的傅里叶变换见表 3-2。

(2) 傅里叶变换的性质

傅里叶变换的性质见表 3-3。

5. 周期信号的傅里叶变换

(1) 正弦信号的傅里叶变换

正弦信号是单频信号,其傅里叶变换

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_1 t)] = \pi\delta(\omega - \omega_1) + \pi\delta(\omega + \omega_1)$$

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_1 t)] = -j\pi\delta(\omega - \omega_1) + j\pi\delta(\omega + \omega_1)$$

(2) 周期性冲激信号的傅里叶变换

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1)\right] = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

(3) 一般周期信号的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[f_{T_1}(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_1 F_1(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

其中, $F_1(\omega)$ 是主周期信号 $f_1(t)$ 的傅里叶变换。

$$\mathcal{F}[f_{T_1}(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

其中, F_n 是指数形式的傅里叶级数的系数。

6. 非周期信号的能量谱密度

非周期信号的能量谱密度

$$p(\omega) = |F(\omega)|^2$$

非周期信号的能量(Parseval 定理)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

7. 本章知识 MAP

本章知识 MAP 见图 3-1。

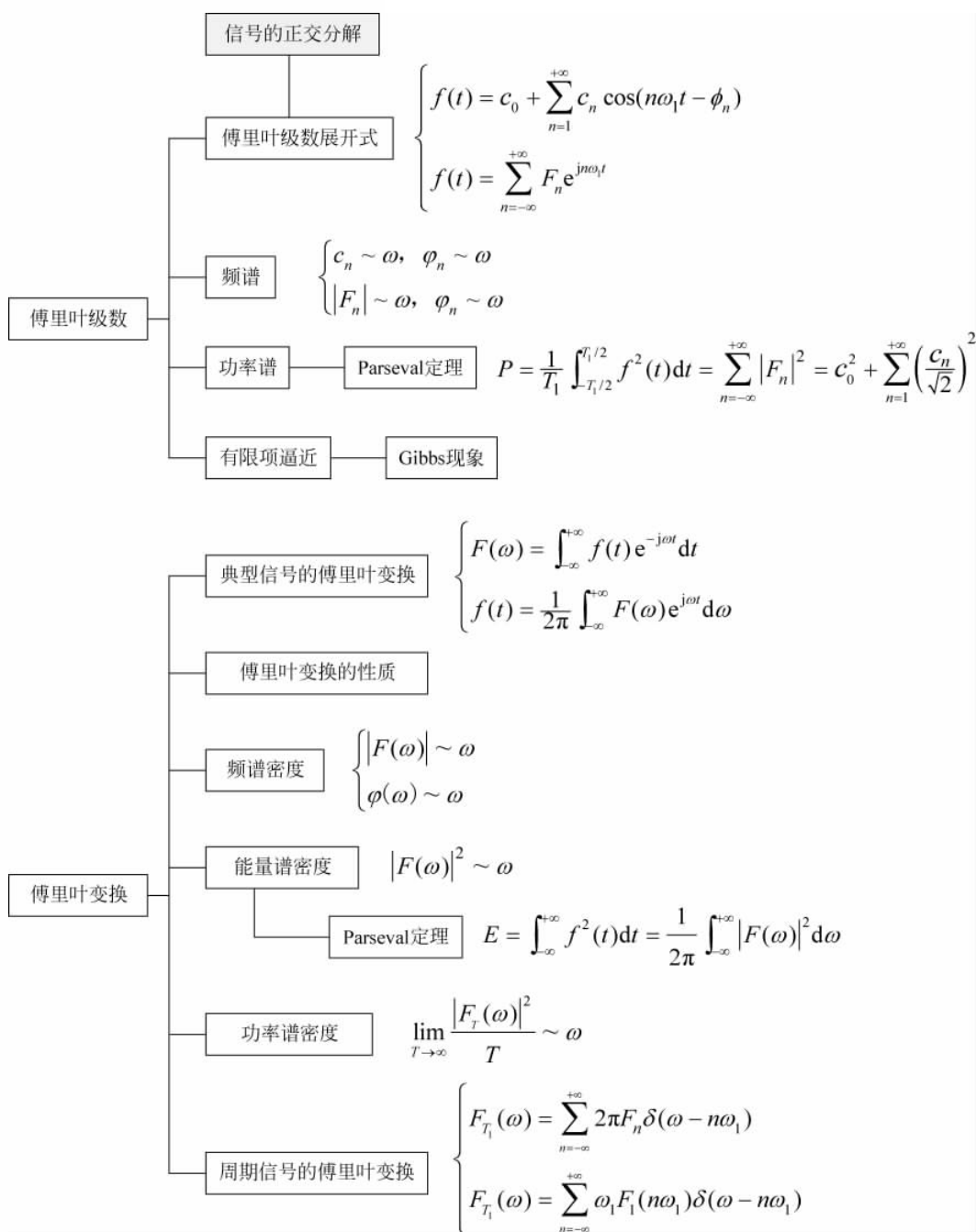


图 3-1 信号的频域分析

3.3 公式

本章常用公式见表 3-1~表 3-4。

表 3-1 周期信号傅里叶级数的性质

性 质	时 间 信 号	傅里叶级数的系数
线性	$K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)$	$K_1 F_{1n} + K_2 F_{2n}$
时域位移	$f(t - \tau)$	$F_n e^{-jn\omega_1 \tau}$
时域翻折	$f(-t)$	F_{-n}
时域微分	$\frac{d}{dt} f(t)$ $\frac{d^k}{dt^k} f(t)$	$j n \omega_1 F_n$ $(j n \omega_1)^k F_n$
时域偶对称	$f(t) = f(-t)$	$a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0, \quad b_n = 0$
时域奇对称	$f(t) = -f(-t)$	$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n \neq 0$
时域奇谐对称	$f(t) = -f(t \pm T_1/2)$	$\begin{cases} a_n = 0, & b_n = 0, & n = 2k \\ a_n \neq 0, & b_n \neq 0, & n = 2k + 1 \end{cases}$
时域偶谐对称	$f(t) = f(t \pm T_1/2)$	$\begin{cases} a_n = 0, & b_n = 0, & n = 2k + 1 \\ a_n \neq 0, & b_n \neq 0, & n = 2k \end{cases}$
平均功率 (Parseval 定理)	$P = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n ^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n/\sqrt{2})^2$	

表 3-2 典型信号的傅里叶变换

序 号	时间信号 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$
1	$e^{-at} u(t), \quad a > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
2	$e^{-a t }, \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
3	$E[u(t + \tau/2) - u(t - \tau/2)]$	$E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
4	$E\tau \text{Sa}(\omega_c t/2)$	$2\pi E[u(\omega + \omega_c/2) - u(\omega - \omega_c/2)]$
5	$E e^{-(t/\tau)^2}$	$\sqrt{\pi} E \tau e^{-(\omega\tau/2)^2}$
6	$\delta(t)$	1
7	$\delta(t - \tau)$	$e^{-j\omega\tau}$
8	$\frac{1}{2}[\delta(t - 1) + \delta(t + 1)]$	$\cos(\omega)$
9	A	$2\pi A \delta(\omega)$
10	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$

续表

序 号	时间信号 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$
11	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
12	$1/t$	$-j\pi\text{sgn}(\omega)$
13	$e^{\pm j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$
14	$tu(t)$	$j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$
15	$ t $	$-\frac{2}{\omega^2}$
16	t	$j2\pi\delta'(\omega)$
17	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
18	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$j\frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
19	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
20	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
21	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1)$	$\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$, 其中 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

表 3-3 傅里叶变换的性质

性 质	时域 $f(t)$	频域 $F(\omega)$
线性	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
对偶性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
对称性	实信号 $f(t)$	$F(\omega) = F^*(-\omega)$
		实部偶对称: $\text{Re}F(\omega) = \text{Re}F(-\omega)$
		虚部奇对称: $\text{Im}F(\omega) = -\text{Im}F(-\omega)$
		模偶对称: $ F(\omega) = \sqrt{[\text{Re}F(\omega)]^2 + [\text{Im}F(\omega)]^2}$
		相位奇对称: $\varphi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}F(\omega)}{\text{Re}F(\omega)}$
	$f(t)$ 是 t 的实偶函数	$F(\omega)$ 是 ω 的实偶函数, 相位为 0 或 $\pm\pi$
	$f(t)$ 是 t 的实奇函数	$F(\omega)$ 是 ω 的虚奇函数, 相位为 $\pm\pi/2$
	偶分量 $f_e(t)$	$\text{Re}F(\omega)$
	奇分量 $f_o(t)$	$j\text{Im}F(\omega)$
展缩性质	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
折叠性质	$f(-t)$	$F(-\omega)$

续表

性 质	时域 $f(t)$	频域 $F(\omega)$
时移特性	$f(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
	$f(at-t_0)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega}{a}t_0}$
频域特性	$f(t)e^{\pm j\omega_0 t}$	$F(\omega \mp \omega_0)$
	$f(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$
	$f(t)\sin(\omega_0 t)$	$\frac{j}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$
时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
频域卷积	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
时域微分【注】	$\frac{d}{dt}f(t)$	$j\omega F(\omega)$
	$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
	$\frac{d}{dt}f(at-t_0)$	$(j\omega) \left[\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega}{a}t_0} \right]$
频域微分	$-jtf(t)$	$\frac{d}{d\omega}F(\omega)$
	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$
	$-jtf(at-t_0)$	$\frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega}{a}t_0} \right]$
因果信号的傅里叶变换	$f(t)=f(t)u(t)$	$\left. \begin{aligned} R(\omega) &= X(\omega) * \frac{1}{\pi\omega} \\ X(\omega) &= R(\omega) * \left(-\frac{1}{\pi\omega}\right) \end{aligned} \right\}$ (希尔伯特变换对)
能量	$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$	$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) ^2 d\omega$
相关定理	$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t-\tau) dt$	$F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega)$
	$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)f_1(t-\tau) dt$	$F_2(\omega)F_1^*(\omega)$
	$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t-\tau) dt$	$ F(\omega) ^2$
	$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ (条件: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$)	
	$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$ (条件: $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(\omega) = 0$)	

【注】 时域微分性质的应用条件: $f(t)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt < \infty$ 。

表 3-4 其他一些数学上的公式

序 号	公 式	序 号	公 式
1	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$	4	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$
2	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$	5	$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(x) ^2 dx = \pi$
3	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$	6	$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(x) dx = \pi$

3.4 问题解析

1. 为什么进行频域分析

在信息技术高速发展的今天,信号无处不在,信息交流无时不有,这已经成为人们日常生活的一部分。

那么,作为各种消息的表现形式的信号,承载着人们对信息的最大需求。举一个最简单的例子,如果将“信号”比喻为“载货的车”,车的大小即“信号带宽”,而“系统”即是各种“路”,路的宽窄即“系统带宽”。车能否顺畅地通过各种路呢?这就要看车与路是否匹配。大车过小路,或者大带宽信号过窄带宽系统,强行通过的话,必然损伤惨重;而小车过大路,势必造成资源的极大浪费,二者最好匹配。这就需要分析各种信号以及各种系统的频率特性。实际上,在通信、信号处理的许多方面,都需要对信号、系统进行频域分析和设计。

图 3-2 是一段鸟鸣的时域图形,从中难以直接看出其频率成分。图 3-3 是其频谱分析图,可以直观地看出其频率成分的分布情况。

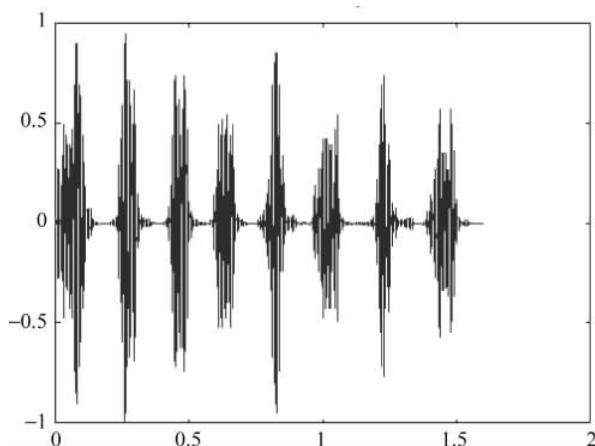


图 3-2 一段鸟鸣的声音片段

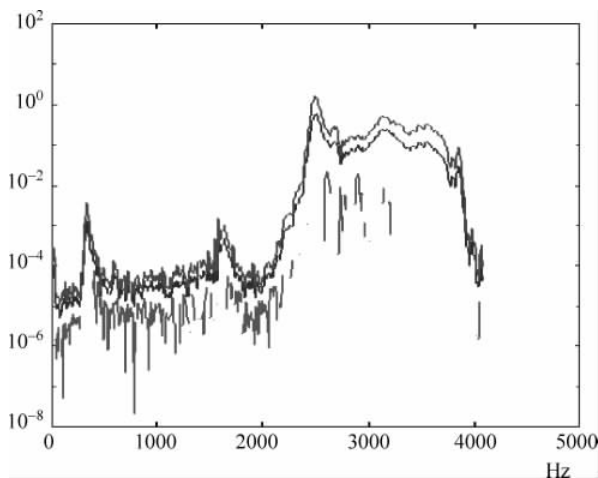


图 3-3 鸟鸣声的频率特性

2. 怎样进行频域分析

在信号与系统中,求解周期信号的傅里叶级数或傅里叶变换,傅里叶级数的系数或傅里叶变换即是周期信号的频率成分(频谱或频谱密度)。

对于非周期信号,主要求傅里叶变换(频谱密度)。

3. 傅里叶级数展开

(1) 正交函数

假设有 n 个函数 $\chi_1(t), \chi_2(t), \dots, \chi_n(t)$ 构成一个函数集,这些函数在区间 $[t_1, t_2]$ 内满足如下的正交特性,即

$$\int_{t_1}^{t_2} \chi_i(t) \chi_m(t) dt = \begin{cases} K_i, & i = m \\ 0, & i \neq m \end{cases}$$

则此函数集称为正交函数集,表示成 $\{\chi_i(t)\}$ 。

如果在正交函数集 $\{\chi_i(t)\}$ 之外,不存在函数 $\zeta(t)$ (其中 $0 < \int_{t_1}^{t_2} |\zeta(t)|^2 dt < \infty$), 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \zeta(t) \chi_i(t) dt = 0$$

即找不到其他函数再与 $\{\chi_i(t)\}$ 中的函数正交,则此函数集为完备的正交函数集。

在数学上,任意函数都可以用完备的正交函数集表示。

$$f(t) \approx c_1 \chi_1(t) + c_2 \chi_2(t) + \dots + c_n \chi_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_i(t)$$

要满足最佳近似,则均方误差

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{i=1}^n c_i \chi_i(t) \right]^2 dt = \min$$

对于 c_m 要满足上式, 则

$$\frac{\partial}{\partial c_m} \overline{\epsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} 2 \left[f(t) - \sum_{i=1}^n c_i \chi_i(t) \right] [-\chi_m(t)] dt = 0$$

所以

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-f(t) \chi_m(t) + \sum_{i=1}^n c_i \chi_i(t) \chi_m(t) \right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \chi_m(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n c_i \chi_i(t) \chi_m(t) dt = \sum_{i=1}^n c_i \int_{t_1}^{t_2} \chi_i(t) \chi_m(t) dt$$

根据正交性, 有

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \chi_m(t) dt = c_m K_m$$

则系数

$$c_m = \frac{1}{K_m} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \chi_m(t) dt$$

(2) 傅里叶级数展开式

傅里叶级数就是满足最小均方误差条件下的正交函数分解。

傅里叶选择了三角函数集 $\{\cos(n\omega_1 t), \sin(n\omega_1 t)\}$ 和复指数函数集 $\{e^{jn\omega_1 t}\}$ 进行正交分解。

$\{\cos(n\omega_1 t), \sin(n\omega_1 t)\}$ 是正交函数集, 因为

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2} \sin(n\omega_1 t) \sin(m\omega_1 t) dt = \begin{cases} T_1/2, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2} \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt = \begin{cases} T_1/2, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2} \cos(i\omega_1 t) \sin(m\omega_1 t) dt = 0$$

而且是完备的。

同样, 指数函数集 $\{e^{jn\omega_1 t}\}$ 是正交函数集, 因为

$$\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{jn\omega_1 t} (e^{jm\omega_1 t})^* dt = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{j(n-m)\omega_1 t} dt$$

$$= T_1 \frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m)\pi} = T_1 \text{Sa}[(n-m)\pi]$$

$$= \begin{cases} T_1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

而且也是完备的。

由于 $\{\cos(\omega_1 t), \sin(\omega_1 t)\}$ 和 $\{e^{jn\omega_1 t}\}$ 都是周期的, 周期为 T_1 ($T_1 = 2\pi/\omega_1$)。因此 $\cos(n\omega_1 t), \sin(n\omega_1 t)$ 和 $e^{jn\omega_1 t}$ 也都是周期信号, 周期为 T_1/n 。根据第 1 章关于连续时间周期信号之和的周期性问题分析, 可知 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$ 必为周期的, 周期

为各周期的最小公倍数 T_1 。因此,由 $\sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$ 和直流相加就可以得到任意满足狄里赫利条件的周期信号 $f(t)$,这就是傅里叶级数展开式,即

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

$f(t)$ 的周期为 T_1 ,也即基本分量 $\{\cos(\omega_1 t), \sin(\omega_1 t)\}$ 的周期。

同样,也可以由 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$ 表示任意(满足狄里赫利条件)的周期信号(周期 $T_1 = 2\pi/\omega_1$)。之所以需要选择 $-n\omega_1$,为的是平衡 $+n\omega_1$,使得相加的结果为实数(实信号)——源于欧拉公式。这样展开的级数即为指数形式的傅里叶级数:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

对于三角形式的傅里叶级数进行整理

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega_1 t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega_1 t) \right] \end{aligned}$$

令 $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos\phi_n$, $\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \sin\phi_n$, 则

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n [\cos\phi_n \cos(n\omega_1 t) + \sin\phi_n \sin(n\omega_1 t)]$$

由此可得幅度相位形式的傅里叶级数:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t - \phi_n)$$

式中, $c_0 = a_0$, 表示直流成分; $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ 表示 n 次谐波的幅度; $\phi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$ 表示 n 次谐波的相位。

系数之间的关系见图 3-4。

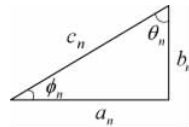


图 3-4 三角级数系数间的关系图

(3) 傅里叶级数的系数之间的关系

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt - j \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \\ &= \frac{1}{2} a_n - j \frac{1}{2} b_n \end{aligned}$$

F_n 一般是复数,可以表示为

$$F_n = \operatorname{Re}[F_n] + j\operatorname{Im}[F_n] \quad \text{或} \quad F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$$

则

$$a_0 = c_0 = F_0$$

$$a_n = 2\operatorname{Re}[F_n], \quad b_n = -2\operatorname{Im}[F_n]$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 |F_n|$$

当 $n > 0$ 时, $\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} = -\phi_n$, 与三角级数的相位相同;

当 $n < 0$ 时, $\varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} = \phi_n$, 在“负频率”处的相位与正频率处的相位呈奇对称。

(4) 狄里赫利条件

最初拉格朗日反对傅里叶的论点就是因为当时没有数学上的证明。1829 年, 德国数学家狄里赫利(Dirichlet)给出了三角级数的收敛条件, 傅里叶级数才有了数学基础。

Dirichlet 条件是信号 $f(t)$ 能进行傅里叶级数展开的充分条件。工程应用中的许多物理信号都能满足 Dirichlet 条件, 因此都可以进行傅里叶级数展开。

提示:

- ① 有些假设的信号不满足 Dirichlet 条件, 但这些信号一般并没有已知的工程应用。
- ② 有些不满足狄里赫利条件的信号也可以展开成傅里叶级数。因为 Dirichlet 条件仅是傅里叶级数展开的充分条件而非必要条件。

4. 傅里叶级数的求解

比较简单的解法是先求指数形式的傅里叶级数的系数, 因为指数积分计算相对简单。得到系数 F_n 后代入级数展开式即可得到傅里叶级数。

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

对于三角形式或幅度相位形式的傅里叶级数, 由系数之间的关系公式可得所需的系数。

$$a_0 = c_0 = F_0$$

$$a_n = 2\operatorname{Re}[F_n], \quad b_n = -2\operatorname{Im}[F_n]$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 |F_n|, \quad \phi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$$

将系数代入级数展开式:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]$$

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t - \phi_n)$$

【例题 3.1】 周期性冲激信号如图 3-5 所示, 求其傅里叶级数。

解: 指数形式的傅里叶级数的系数

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \delta(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1}$$

则指数形式的傅里叶级数展开式为

$$\delta_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_1} e^{jn\omega_1 t}$$

由

$$a_0 = F_0 = \frac{1}{T_1}, \quad a_n = 2\operatorname{Re}F_n = \frac{2}{T_1}, \quad b_n = -2\operatorname{Im}F_n = 0$$

可得三角形式的傅里叶级数展开式

$$\delta_{T_1}(t) = \frac{1}{T_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{T_1} \cos(n\omega_1 t)$$

对于周期性冲激信号,其傅里叶级数的系数为常数,这是极为特殊也是仅有的一种情况,说明它等量地含有全部的频率成分,包括无穷大频率。也就是,信号带宽无限大。

如果将傅里叶级数的每一项进行合成,见图 3-6。图中只示意性地画出了几个频率成分,但不难想象无穷多频率成分叠加的效果。

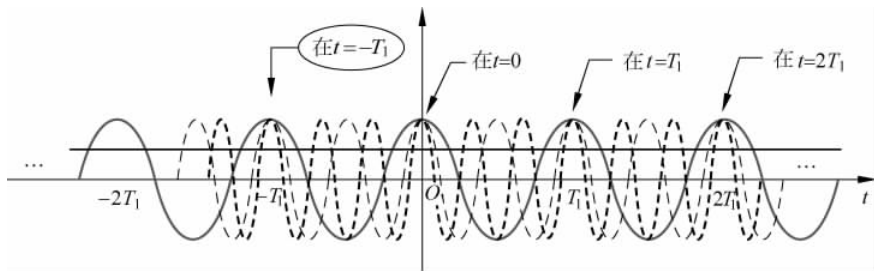


图 3-6 周期性冲激信号的傅里叶级数展开

对于任意整数 n , $\cos(n\omega_1 t)$ 在 $t=0, t=T_1, \dots, t=nT_1$ 时都为 1(顶点),即在 $t=0, T_1, \dots, nT_1$ 点上,各谐波分量的幅度都为 $(1/T_1 + \infty \cdot 2/T_1)$,无穷多项相加的结果为无穷大。而在其他时刻,无穷多项余弦信号叠加(函数内插)的结果为零。这与周期性冲激信号在时域的表现是吻合的。

周期性冲激信号的数学表示为

$$\delta_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1)$$

根据傅里叶级数展开的结果,有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1) = \frac{1}{T_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{T_1} \cos(n\omega_1 t)$$

当然,一般的周期信号的傅里叶级数的系数是 $(n\omega_1)$ 的函数。

在傅里叶级数的求解运算中,如果信号比较复杂,可以考虑利用傅里叶级数的性质,将复杂信号分解成简单信号,或者利用一些对称性来简化运算。

例如,图 3-7(a)所示的周期信号 $f(t)$,可以分解成两个比较典型的信号,如图 3-7(b)和

图 3-7(c)所示。

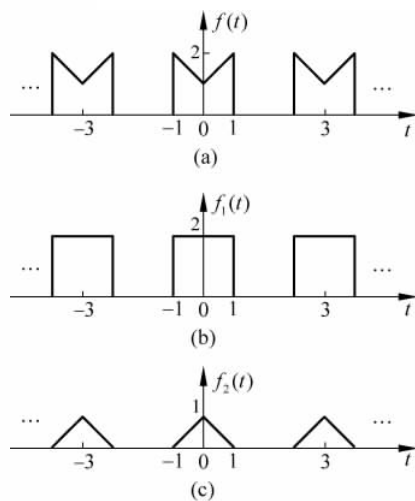


图 3-7 $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$

分别求得 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶级数系数 F_{1n} 和 F_{2n} , 则 $f(t)$ 的傅里叶级数系数

$$F_n = F_{1n} - F_{2n}$$

如果信号具有某种对称性(偶对称、奇对称、奇偶对称等), 根据性质, 可以不用求解傅里叶级数的系数, 直接判断信号所含的频率成分, 这将大大简化分析。

例如, 偶对称信号只含有直流分量和余弦分量, 不含有正弦分量; 奇对称信号不含直流, 也没有余弦分量, 仅仅含有正弦分量; 而奇谐对称信号只含有奇次谐波分量, 等等。

5. 非周期时限信号的傅里叶级数展开

傅里叶级数特别适合于连续时间周期信号, 但并不是说非周期信号不存在傅里叶级数。对于有限长信号(也称为时限信号), “周期”仅仅是有限长信号的扩展。

若信号 $f_1(t)$ 的定义域是 $(t_0, t_0 + T_1)$, 即 $f_1(t)$ 存在于 $t_0 < t < t_0 + T_1$, 基频 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, $f_1(t)$ 在 $t_0 < t < t_0 + T_1$ 内可以表示成复谐波函数的线性组合, 即

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}, \quad t \in (t_0, t_0 + T) \quad (3-1)$$

同样, 利用 $e^{jn\omega_1 t}$ 的正交性, 可以求得

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

因此, 只要上式积分收敛, 则信号 $f_1(t)$ 在时间间隔 $t_0 < t < t_0 + T_1$ 内就可以精确表示为式(3-1)的傅里叶级数展开。式(3-1)就是有限长信号 $f_1(t)$ 的傅里叶级数展开式, 如图 3-8 所示。

若将 $f_1(t)$ 以 T_1 为周期进行延拓, 所得周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数与式(3-1)相同, 只是 $t \in (-\infty, \infty)$ 。

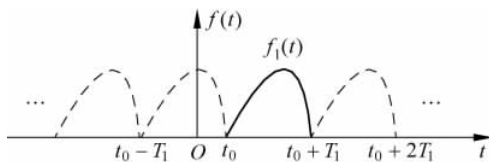


图 3-8 非周期有限长信号进行傅里叶级数展开

6. 信号的谱表示——频谱

前两章在时域对信号与系统进行了描述和分析,本章对信号进行频域分析(或描述)。和时域一样,信号的频域分析也是从两个角度对信号进行描述——频域的函数表达式和频域图形。其中,周期信号傅里叶级数的系数就是信号在频域的函数表达式,而频谱图就是信号在频域的图形描述。

先看一个简单的信号,

$$f(t) = 3\cos(\omega_1 t)$$

这是它在时域的数学表达式,如果在时域画出其图形,需要无穷多个点才能连成余弦曲线,其时域波形见图 3-9(a),图 3-9(a)是该信号在时域的图形描述。

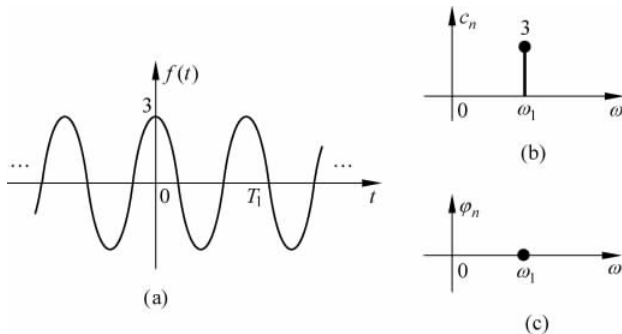


图 3-9 正弦信号的时域波形和频谱图

现在从另一个角度考虑问题,这个数学表达式实际上也是标准的傅里叶级数,只含有一项(基本分量):

$$c_1 = 3, \quad \varphi_1 = 0$$

这就是该信号在频域的函数表达式。

如果以角频率为横坐标,纵坐标分别是 c_n 和 φ_n ,画出信号各频率成分的分布图,即是信号在频域的图形描述,称为信号的频谱。

该正弦信号的频谱图如图 3-9(b)和图 3-9(c)所示。

之所以可以在频域这样表示信号,原因是,正弦信号有三个要素:频率、幅度和相位。只要这三个要素确定,正弦信号就完全确定。因此,只要以横坐标代表频率、纵坐标代表幅度或相位画坐标系,就可以完整地表示正弦信号的三要素,也即完整地描述了正弦信号。

而任何复杂的周期信号基本上都可以展开成傅里叶级数,每一项都是不同频率、不同幅度、不同相位的正弦函数,只要画出不同频率的幅度和相位,即 $c_n \sim \omega$ 和 $\varphi_n \sim \omega$ 的关系

图,就可以从另一个角度(频率的角度)来描述、观察这个信号,这就是信号的谱表示。

需要特别理解的是,图 3-9(a)的时域描述和图 3-9(b)、图 3-9(c)的频域描述,它们都是正弦信号 $3\cos(\omega_1 t)$ 的表示,只是一个在时域(自变量是 t),一个在频域(自变量是 ω),是同一事物的两种表现形式。所谓的“横看成岭侧成峰”,不同的角度,表现的形式不同,但不管观察的角度如何,都是这座山。这是理解信号频域分析的关键所在。

再举一个简单的例子,信号 $f(t)$ 为

$$f(t) = 3\cos(t - \pi/4) + 2\cos(3t + \pi/3)$$

其时域波形见图 3-10,从时域图形中很难直接看出信号所含的频率成分。

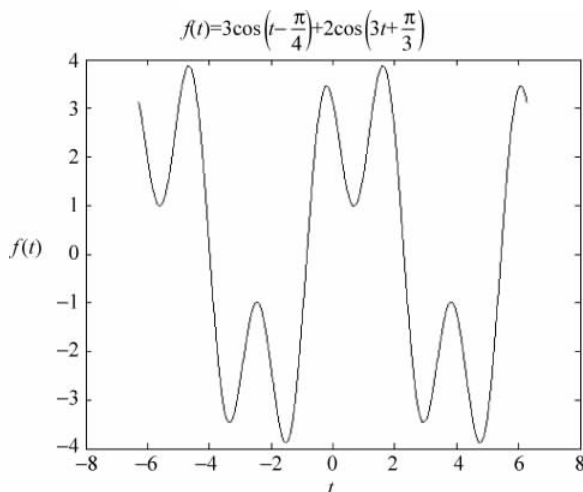


图 3-10 $f(t)$ 的时域表示

在频域分析该信号,信号的基本角频率 $\omega_1 = 1$,只含有基本分量和三次谐波成分:

$$\omega_1: \quad c_1 = 3, \quad \varphi_1 = -\pi/4$$

$$3\omega_1: \quad c_3 = 2, \quad \varphi_3 = \pi/3$$

其他频率成分为零。

画出其频谱,如图 3-11 所示。

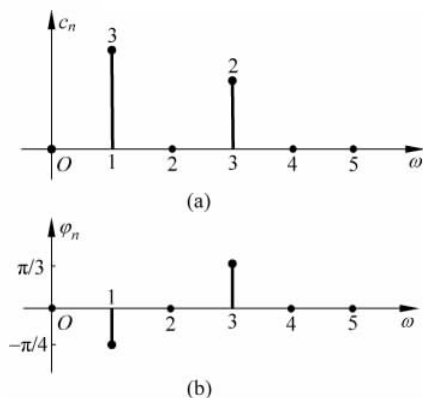


图 3-11 $f(t)$ 的频域描述

在信号的频域描述图形中,信号所含的频率成分一目了然,这是信号频域分析的优势所在。

因此,关于信号的时域描述和频域描述的理解如下:

$$\begin{aligned} \text{信号时域描述} & \begin{cases} \text{数学描述——函数: } f(t) \\ \text{图形描述——波形: } f(t) \sim t \end{cases} \\ \text{信号的频域描述} & \begin{cases} \text{数学描述——傅里叶级数的系数: } F_n, c_n, \varphi_n \\ \text{图形描述——频谱图} \end{cases} \end{aligned}$$

而频谱图分为指数形式的频谱图和三角形式的频谱图。

指数形式的幅度谱 $|F_n| \sim \omega|_{\omega=n\omega_1}$, 相位谱 $\varphi_n \sim \omega|_{\omega=n\omega_1}, n \in (-\infty, +\infty)$

三角形式的幅度谱 $c_n \sim \omega|_{\omega=n\omega_1}$, 相位谱 $\varphi_n \sim \omega|_{\omega=n\omega_1}, n \in [0, +\infty)$

对于周期信号,由于信号是周期的,因此,其频率成分是直流、基本分量和一系列谐波成分。

(1) 周期信号的频谱求解

【例题 3.2】 画出图 3-5 所示的周期性冲激信号的频谱图。

解: 在例题 3.1 中,已经求得周期性冲激信号的指数形式的傅里叶级数的系数

$$F_n = 1/T_1, \quad n \in (-\infty, +\infty)$$

幅度、相位形式的傅里叶级数的系数

$$c_0 = a_0 = 1/T_1$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = a_n = 2/T_1, \quad n \in [1, +\infty)$$

则指数形式和三角形式的频谱图分别如图 3-12(a)和图 3-12(b)所示。

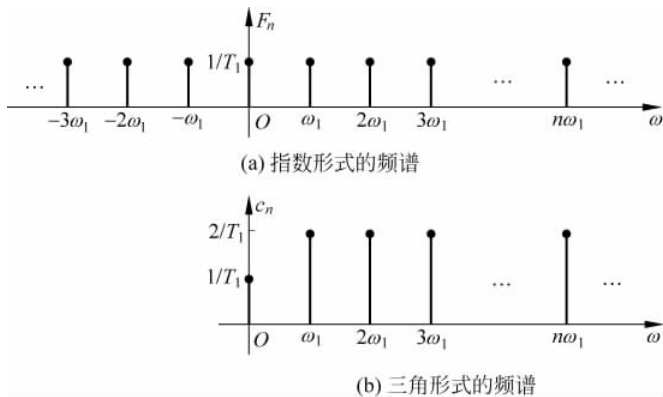


图 3-12 周期性冲激信号的频谱图

事实上,图 3-5 和图 3-12 都是周期性冲激信号的图形描述,只是一个在时域,一个在频域,是同一信号在不同域的不同表现。

【例题 3.3】 画出图 3-13 所示的周期性矩形脉冲信号的频谱图。

解: 该周期信号的基本角频率为

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{4}$$

傅里叶级数的系数

$$F_n = \frac{1}{4} \text{Sa}(n\omega_1)$$

$$a_0 = F_0 = \frac{1}{4}, \quad a_n = \frac{1}{2} \text{Sa}(n\omega_1), \quad b_n = 0, \quad c_n = |a_n| = \frac{1}{2} |\text{Sa}(n\omega_1)|$$

画出频谱图如图 3-14 所示。

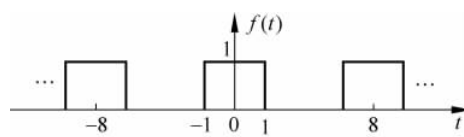


图 3-13 周期矩形信号

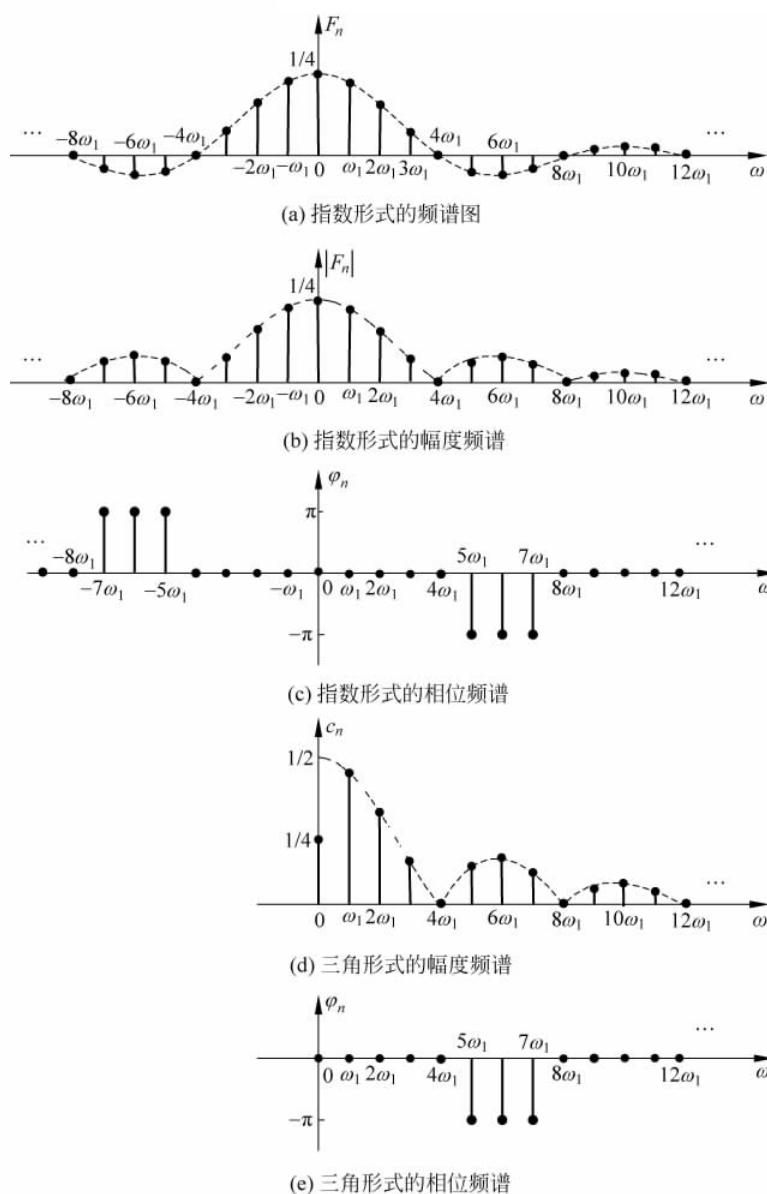


图 3-14 周期矩形信号的频谱图 ($\omega_1 = \pi/4$)

由于周期矩形脉冲信号的周期是脉宽的4倍($T_1=4\tau$),抽样包络趋势线的第一个零点为 $2\pi/\tau=\pi=4\omega_1$,恰恰是4次谐波的频率成分。4次谐波整数倍的傅里叶级数的系数都等于零,即该信号不含有4次谐波、8次谐波、16次谐波等(不含 $4k$ 次谐波成分,这里 k 为整数)。

提示:

① 指数形式的频谱在 $\pm n\omega_1$ (正负频率)都要表示,负频率部分的频谱是数学演算的结果;三角形式的频谱只有直流成分和正频率部分,是信号真实的频率分量。将指数形式“负频率”部分的幅度频谱以纵轴折叠到正频率部分,相应的谐波合起来就是三角形式的幅度频谱,这是欧拉公式的物理意义所在。不论是指数形式还是三角形式的频谱,二者直流成分是一致的。因为不管怎样的表现形式,一个信号的直流成分是一致的。

$$c_0 = |F_0|, \quad c_n = 2|F_n|$$

② 相位频谱一般有三种情况,见图3-15。

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$$

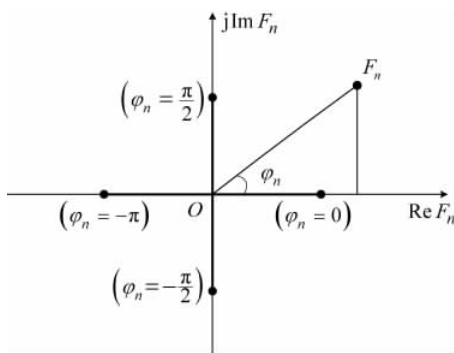


图 3-15 四象限坐标系及信号的相位

当 F_n 是实数时,相当于位于四象限坐标系的实轴上,“正值”的相位为 $\varphi_n=0$,“负值”的相位为 $\varphi_n=\pm\pi$,一般取 $\varphi_n=-\pi$ (负相位对应时间信号的延时)。

当 F_n 是纯虚数时,相当于位于四象限坐标系的虚轴上,“+j”的相位 $\varphi_n=\frac{\pi}{2}$,“-j”的相位 $\varphi_n=-\frac{\pi}{2}$ 。

当 F_n 是复数时,相当于位于四个象限中,相位为 $\varphi_n = \arctan \frac{\text{Im} F_n}{\text{Re} F_n}$ 。

(2) 周期信号频谱的特点

周期信号的频谱是离散的、谐波的。只存在直流(零频)、基本分量 ω_1 、 n 次谐波 $n\omega_1$ 的频率成分,谱线间隔为 ω_1 。 $\omega_1/2$ 或 $3\omega_1/2$ 是没有意义的。

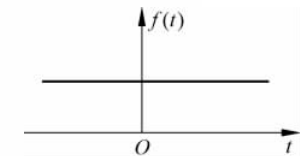
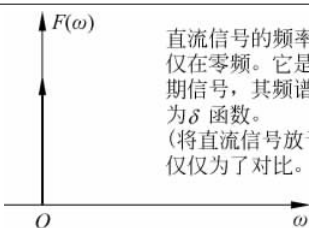
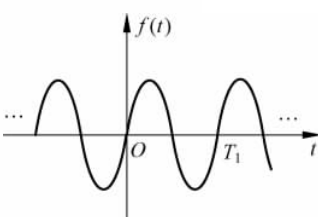
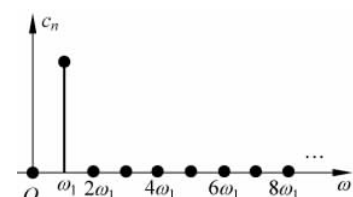
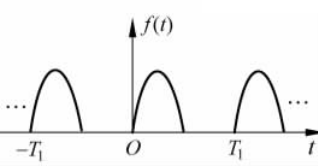
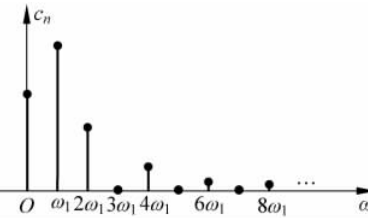
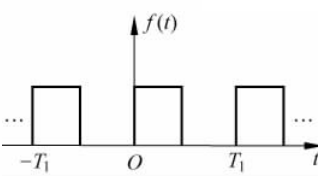
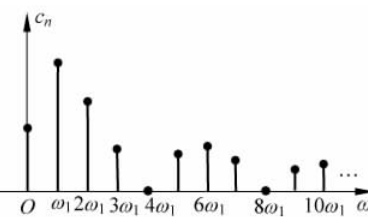
例如,某周期信号的周期是1s,则该信号的频率成分只可能是1Hz、2Hz、3Hz等,不可能存在0.5Hz、1.5Hz的频率成分。

另外,一般周期信号的频谱理论上虽然有无限多次谐波,但高次谐波的幅度总的趋势是逐渐变小,即信号的高频分量是逐渐衰减的。如果对信号 $f(t)$ 进行 k 阶求导直至出现 δ 函数,其傅里叶级数将按 $1/n^k$ 的速度收敛(从整体趋势看)。

这就揭示了信号时域的变化快慢和频域的高低频之间的关系。信号波形越平滑,需要越高阶求导才可能出现 δ 函数,那么,信号的高次谐波收敛速度越快,即高次谐波的幅度越小,说明高频成分少;而越是变化激烈的信号,其高频成分越丰富,在波形跳变点处,往往求导一次即出现 δ 函数,因此具有丰富的高频分量。两个极端的例子是直流信号和冲激信号,一个是最平滑的信号,只含有零频率;另一个是变化最激烈的信号,所含的高频成分异常丰富,在无穷大频点处频谱依然是常数。

表 3-5 给出了一些典型信号的时域和频域的对比图,从中可以看出时域的平滑对应频域的低频分量,而如果时域变化激烈,其频域高频成分将变得丰富。

表 3-5 信号的时域和频域

信 号	时 域 波 形	幅 度 频 谱
直流信号		 直流信号的频率成分仅在零频。它是非周期信号,其频谱密度为 δ 函数。 (将直流信号放于此处仅仅为了对比。)
正弦信号		
半波正弦信号		
周期矩形脉冲		

续表

信 号	时 域 波 形	幅 度 频 谱
周期冲激信号		

7. 频谱和功率谱

(1) 帕斯瓦尔(Parseval)定理

Parseval 定理给出了周期信号的平均功率公式

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n/\sqrt{2})^2$$

Parseval 定理是能量守恒定律。周期信号的平均功率既可以在时域求：

$$P = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f^2(t) dt$$

也可以在频域求：

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n/\sqrt{2})^2 \quad (3-2)$$

根据信号的具体情况，哪个域求解简单，就在那个域求。

【例题 3.4】 电流信号

$$i(t) = 1 + \sqrt{2} \cos(\pi t + \pi/4) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi t + \pi/6)$$

求其平均功率。

解：信号频谱如图 3-16 所示。

根据 Parseval 定理，在频域求其功率：

$$\begin{aligned} P &= c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n/\sqrt{2})^2 \\ &= c_0^2 + (c_1/\sqrt{2})^2 + (c_2/\sqrt{2})^2 \\ &= 1^2 + (\sqrt{2}/\sqrt{2})^2 + ((1/\sqrt{2})/\sqrt{2})^2 \\ &= 2.25 \text{ (W)} \end{aligned}$$

这样求解比在时域进行积分计算要简单得多。



想一想：为什么可以用信号的频谱求功率？

这是因为，一个信号的时域描述和频域描述(频

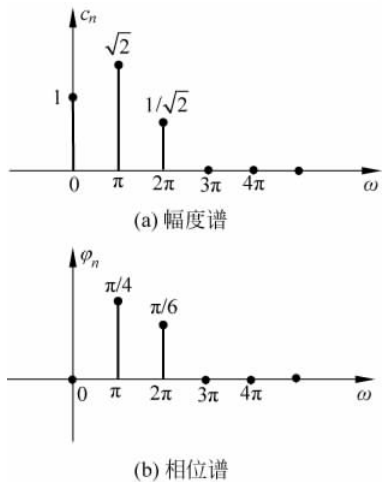


图 3-16 电流信号的频谱图

谱)表示的是同一个信号,是同一信号的不同表现形式,二者所包含的信息是完全相同的,仅仅是从不同的角度表现而已。因此,自然而然就可以既在时域求功率,也可以在频域求功率了。

(2) 功率谱

将各次谐波的平均功率与频率的关系绘成图形,就得到周期信号的功率谱。

【例题 3.5】 画出[例题 3.4]的电流信号的功率谱。

解: 根据信号的频谱图(见图 3-16),可画出其功率谱如图 3-17 所示。

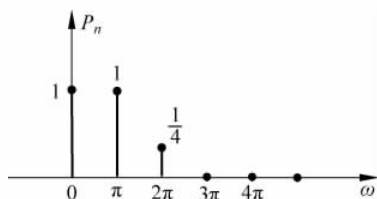


图 3-17 电流信号的功率谱

那么,功率谱和频谱有什么区别呢?

一个连续时间周期信号,既可以分析其频谱,也可以求其功率谱。二者的根本区别在哪里?

信号的频谱只是将这个信号从“时域表示”转换成“频域表示”,是同一个信号的不同表现形式。而功率谱是从能量的观点对信号进行研究。对于功率有

限信号,功率谱指的是信号在每个频率分量上的功率,反映了信号功率在频域的分布状况。从式(3-2)看出,功率谱只保留了频谱的幅度信息,而丢失了相位信息。所以,频谱不同的信号其功率谱有可能是相同的。

频谱是信号的各次谐波与频率的分布关系($|F_n| \sim \omega$ 和 $\varphi_n \sim \omega$),量纲就是信号 $f(t)$ 的单位。假如, $f(t)$ 是一个电压信号,通过傅里叶级数展开成正余弦分量,这些分量自然还是电压信号,振幅或幅度 c_n 的量纲是(V);而功率谱则是周期信号各次谐波的平均功率随频率的分布情况($|F_n|^2 \sim \omega$),量纲是(W)。事实上,频谱和功率谱的关系归根结底还是信号和功率(能量)之间的关系。

一般对随机性信号进行功率谱的分析,确定性信号主要分析频谱。

8. 非周期信号的傅里叶变换

傅里叶变换是信号频域分析的核心内容。实际上,傅里叶级数仅仅是傅里叶变换的一种特殊情况(只含有离散的频率分量)。

(1) 傅里叶变换

傅里叶正反变换公式是信号与系统最重要的公式之一。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶变换表示的是信号的频谱密度,是单位频带内的频谱,即

$$F(\omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} (F_n \cdot T_1) = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{2\pi F_n}{\omega_1} = \lim_{f_1 \rightarrow 0} \frac{F_n}{f_1}$$

$F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的频谱密度函数或谱密度。如果 $f(t)$ 是一个电压信号,单位是 V,那么其傅里叶变换 $F(\omega)$ 的量纲是 V/Hz。

傅里叶变换是信号的频域描述,表示的是信号所含的频率成分。

【例题 3.6】 求单边指数信号和双边指数信号的傅里叶变换。

解：单边指数信号的傅里叶变换：

$$f(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \Leftrightarrow F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

双边指数信号的傅里叶变换：

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0 \Leftrightarrow F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

深入分析：

分别画出各自的时域和频域图(只画幅度谱),如图 3-18 所示。

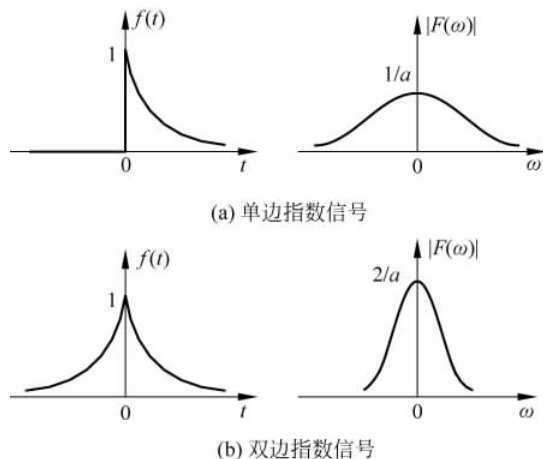


图 3-18 单边指数信号和双边指数信号的时域及频域图

通过对比不难发现信号的时域和频域之间内在的联系。

首先,分析单边指数信号和双边指数信号的直流成分,从它们的时域波形可以看出,双边指数信号的均值是单边指数信号均值的 2 倍,即双边指数信号的直流分量等于单边指数信号的直流分量的 2 倍。这点可以从二者的幅度谱来验证,单边指数信号的零频(直流) $F(0)=1/a$,而双边指数信号的零频(直流) $F(0)=2/a$ 。

其次,观看它们的时间函数波形,单边指数信号变化更为激烈(在 $t=0$ 有断点),而双边指数信号相对平滑一些。相应地,单边指数信号的幅度谱按 $1/\omega$ 衰减,而双边指数信号的幅度谱按 $1/\omega^2$ 衰减,衰减得更快,表明双边指数信号的高频含量相对较少。也印证了“变化激烈的信号所含的高频成分更丰富”,而“变化缓慢(平滑)的信号含有更多的低频分量”的观点。

(2) 傅里叶积分的收敛条件

傅里叶变换的充分条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

$f(t)$ 只有满足绝对可积的条件,才可以进行傅里叶积分运算,此时傅里叶变换存在。对于一些不满足绝对可积的信号,不能直接由傅里叶积分求傅里叶变换,需要进行广义傅

里叶变换,会出现 δ 函数。

(3) 傅里叶变换的性质

傅里叶变换的性质是信号频域分析的重要内容,既可以简化计算,也具物理含义。每个性质都很重要,这里只简单列举几个加以解析。

① 对偶性

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

这个性质之所以存在,源于连续时间信号傅里叶变换和反变换的定义式非常相近,仅仅是 e 的指数符号和积分变量名不同。从数学上看,对偶性相当于对一个函数进行傅里叶积分后再进行一次傅里叶积分,结果等于原函数的转置乘以 2π 。

傅里叶变换的对偶性表明了信号的时域和频域之间的对称关系。借助对偶性,可以简化傅里叶变换求解。

例如,冲激信号的傅里叶变换是常数,而直流的傅里叶变换是冲激函数。即

$$\mathcal{F}[A\delta(t)] = A, \quad \mathcal{F}[A] = 2\pi A\delta(-\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$$

【例题 3.7】 求矩形脉冲信号和抽样信号的傅里叶变换。

解: 矩形脉冲信号的傅里叶变换是抽样函数,而抽样函数的傅里叶变换是矩形函数形式,如图 3-19 所示。

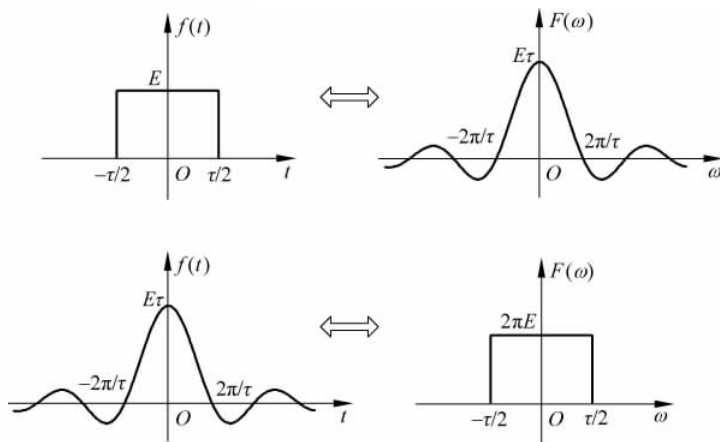


图 3-19 矩形脉冲和抽样函数的傅里叶变换对



诀窍:

关于矩形信号和抽样信号之间的傅里叶变换对的计算问题,有一些规律性的技巧,无须进行繁琐的积分计算或者记忆公式。

首先确定两个公式。对傅里叶正变换公式令 $\omega=0$, 有

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

$F(0)$ 是信号 $f(t)$ 的直流成分——零频。

对傅里叶反变换公式,令 $t=0$,有

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$$

$f(0)$ 是时间信号在零时刻的值。

根据矩形脉冲和抽样函数之间的对偶性,结合这两个公式来确定关键点的坐标,即可得到傅里叶变换。

下面以 $f_1(t) = E[u(t+\tau/2) - u(t-\tau/2)]$ 和 $f_2(t) = \text{Sa}(t)$ 为例,说明各自傅里叶变换计算的简单技巧。

$f_1(t)$ 是矩形脉冲,画出其图形,如图 3-20(a) 所示。

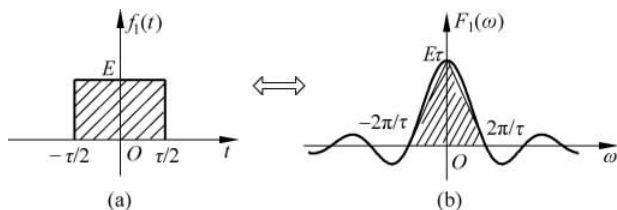


图 3-20 矩形信号及其傅里叶变换

矩形脉冲信号的傅里叶变换是抽样函数,先画出一个抽样函数,再标定关键点的坐标值。 $F(0)$ 是矩形的面积($E\tau$),而抽样函数顶点和左右第一个零值点构成的三角形的面积除以 2π 等于零时刻的值 $f(0)$,据此可确定抽样函数的第一个零值点为 $\frac{2\pi}{\tau}$,如图 3-20(b) 所示。根据图形,写出傅里叶变换的表达式为

$$F_1(\omega) = E\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$$

对于 $f_2(t) = \text{Sa}(t)$,抽样函数的傅里叶变换是矩形函数。同样的方法可以确定矩形的坐标值,如图 3-21 所示。

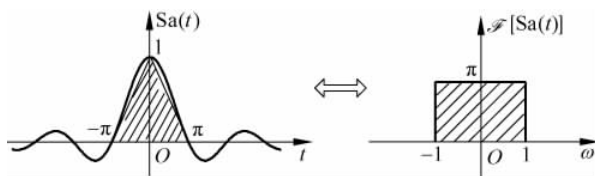


图 3-21 抽样函数的傅里叶变换求解

由图直接写出 $\text{Sa}(t)$ 的傅里叶变换的表达式

$$\mathcal{F}[\text{Sa}(t)] = \pi[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$$

【例题 3.8】 已知 $F(\omega) = u(\omega)$, 求 $f(t)$ 。

解:

$$u(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

则由对偶性,有

$$\pi\delta(t) + \frac{1}{jt} \leftrightarrow 2\pi u(-\omega)$$

根据折叠性质,有

$$\pi\delta(-t) - \frac{1}{jt} \leftrightarrow 2\pi u(\omega)$$

故

$$f(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{j2\pi t}$$

【例题 3.9】 求 $f(t)=1/t$ 的傅里叶变换,并画出幅度谱和相位谱。

解:

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}$$

根据对偶性,有

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{jt}\right] = 2\pi\operatorname{sgn}(-\omega) = -2\pi\operatorname{sgn}(\omega)$$

故

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right] = -j\pi\operatorname{sgn}(\omega) = \pi e^{-j\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega)}$$

其幅度谱和相位谱如图 3-22 所示。

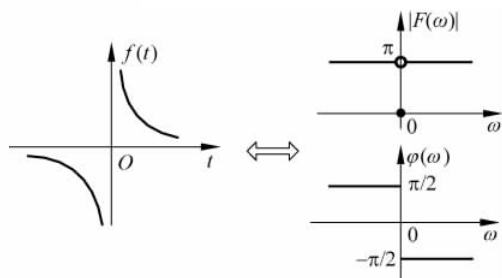


图 3-22 例题 3.9

一般来讲,时限信号的频谱是无限宽度的($-\infty < \omega < +\infty$),由傅里叶变换的对偶性,频带有限的信号其时域一定是无限持续时间($-\infty < t < +\infty$)。

② 因果信号的傅里叶变换

因果信号即单边信号,因此有

$$f(t) = f(t)u(t)$$

其傅里叶变换 $F(\omega)$ 的实部和虚部是希尔伯特变换对,设

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

则有

$$\begin{cases} R(\omega) = X(\omega) * \frac{1}{\pi\omega} \\ X(\omega) = R(\omega) * \left(-\frac{1}{\pi\omega}\right) \end{cases}$$

因果信号的傅里叶变换的实部由其虚部确定,虚部由其实部确定,彼此之间互不独立。说明因果信号频谱的实部包含了其虚部的全部信息,反之亦然。即因果信号的频谱有冗余。

③ Parseval 定理

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (3-3)$$

Parseval 定理是能量定理。信号的能量既可以在时域求解,也可以在频域求解。可根据信号的具体情况,选择计算简单的“域”。

【例题 3.10】 求图 3-23 所示信号的能量。

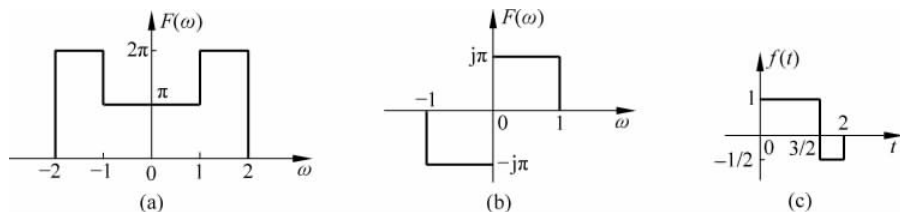


图 3-23 例题 3.10

解:

(a) 根据 Parseval 定理,信号的能量

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} [(2\pi)^2 \times 1 + \pi^2 \times 2 + (2\pi)^2 \times 1] = 5\pi \text{ (J)} \end{aligned}$$

(b) 根据 Parseval 定理,信号的能量

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-1}^0 |-j\pi|^2 d\omega + \int_0^1 |j\pi|^2 d\omega \right) = \pi \text{ (J)} \end{aligned}$$

(c) 信号是时限信号,可直接在时域求其能量

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \\ &= 1^2 \times \left(\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{8} \text{ (J)} \end{aligned}$$

本题(a)、(b)信号属于有限带宽信号,因而在频域计算能量简单;而(c)信号属于时限信号,在时域计算能量简单。

Parseval 定理是能量守恒定理。时域中的能量等于频域中的能量,说明信号在进行傅里叶变换前后,其能量是守恒的。这也从另一个角度说明,信号的时域表示与它的频域表示所含的信息是相同的,只是同一个信号在两个不同域的表现形式而已。另外,式(3-3)也说明,信号的能量只与信号的幅度频谱密度 $|F(\omega)|$ 有关,与相位频谱密度无关。

9. 周期信号的傅里叶变换

周期信号不仅可以求傅里叶级数,也可以求傅里叶变换。不过,周期信号不满足整个时间域内绝对可积的条件,因此,不能直接进行傅里叶积分,其傅里叶变换借助了冲激函数。

单频周期信号——正弦信号的傅里叶变换是冲激函数,一般周期信号的傅里叶变换是一串儿的冲激函数,表示的是周期信号频谱密度的概念。而周期信号的傅里叶级数的系数表示的是频谱,是有限值。



关于频谱和频谱密度的理解:

正弦信号是单频信号,其傅里叶级数

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t})$$

其频谱为

$$F_n = \begin{cases} 1/2, & n = \pm 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

正弦信号的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_1 t)] = \pi\delta(\omega - \omega_1) + \pi\delta(\omega + \omega_1)$$

其傅里叶变换之所以是 δ 函数,原因在于傅里叶变换(频谱密度)和傅里叶级数的系数(频谱)的关系为

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_1 t)] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2\pi F_n}{\omega}$$

图 3-24(a)、图 3-24(b)画出了其频谱和频谱密度。

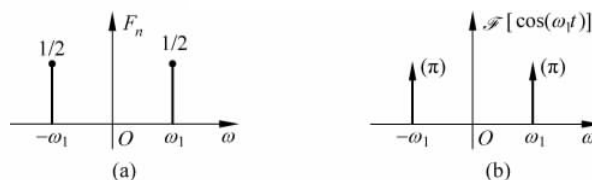


图 3-24 $\cos(\omega_1 t)$ 的频谱和频谱密度

二者共同的特点是“时域周期,频域离散”。

10. 吉布斯现象

不论是周期信号,还是非周期信号,如果只用有限的频率成分来表示具有无限频率分量的信号,则在时间信号的第一类间断点处产生吉布斯(Gibbs)现象,第一个峰起值的跳变量为 8.95%,如图 3-25 所示。峰起值与逼近项数无关,无论怎样逼近,过冲都不会消失。

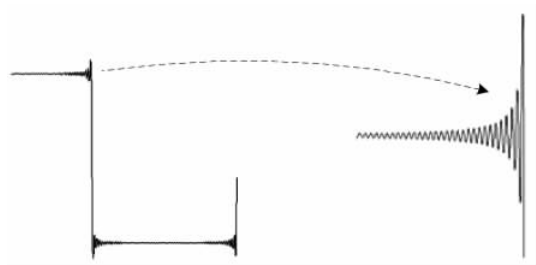


图 3-25 吉布斯现象

11. 相关函数及其傅里叶变换

一般情况下,“相关”是针对随机信号的一个运算。对于确定性信号而言,可以简单地将“相关”理解为信号相似性的描述。

(1) 互相关函数

互相关函数描述的是一个信号在一个时刻的取值与另一个信号在另一个时刻取值之间的依赖关系。

设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是实信号,对于能量信号, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的互相关函数为

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) f_1(t - \tau) dt$$

对于功率信号, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的互相关函数为

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t - \tau) dt$$

$$R_{21}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_2(t) f_1(t - \tau) dt$$

$R_{12}(\tau)$ 、 $R_{21}(\tau)$ 不是同一个函数,但存在下列关系:

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau)$$

互相关函数的特点:

- ① 互相关函数不是偶函数,是不对称的。
- ② 频率相同的两个周期信号的互相关函数依然是周期的,其周期与原信号相同。

【例题 3.11】 求 $f_1(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_1)$ 和 $f_2(t) = B \cos(\omega_0 t + \theta_2)$ 的互相关函数。

解:

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega_0 t + \theta_1) B \cos(\omega_0(t - \tau) + \theta_2) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{AB}{2} \cos(2\omega_0 t - \omega_0 \tau + \theta_1 + \theta_2) dt \\ &\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{AB}{2} \cos(\omega_0 \tau + \theta_1 - \theta_2) dt \\ &= \frac{AB}{2} \cos(\omega_0 \tau + \theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

(2) 自相关函数

自相关函数描述的是一个信号在一个时刻的取值与另一个时刻取值之间的依赖关系,或者理解为信号在时移过程中的相关性。

对于能量信号

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t-\tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau) f(t) dt \end{aligned}$$

对于功率信号

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) f(t-\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t+\tau) f(t) dt \end{aligned}$$

【例题 3.12】 求信号 $f(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$ 的自相关函数。

解: 对于余弦波信号 $f(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$, 其自相关函数为

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A \cos(\omega_0 t + \theta) \cdot A \cos(\omega_0 (t - \tau) + \theta) dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \end{aligned}$$

对于正弦波信号

$$f(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta) = A \cos\left(\omega_0 t + \theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

自相关函数也为

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

如果信号由两个不同频率和初相角的信号组成

$$f(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

则其自相关函数为

$$R(\tau) = \frac{A_1^2}{2} \cos(\omega_1 \tau) + \frac{A_2^2}{2} \cos(\omega_2 \tau)$$

由此可见,正弦(余弦)信号的自相关函数相同,为一个余弦函数,它保留了原信号的频率成分,而丢失了相角的信息。

自相关函数的特点:

① 自相关函数是偶函数,即

$$R(\tau) = R(-\tau)$$

其图形对称于纵轴。不论时间差 τ 的正负(左移还是右移),函数值不变。

② 周期信号的自相关函数仍为同频率的周期信号。

③ 当 $\tau=0$ 时,自相关函数具有最大值,等于信号的均方值。

$$R(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t) dt$$

对于正余弦函数,

$$R(0) = \frac{A^2}{2}$$

(3) 相关与卷积的关系

$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的互相关公式

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt$$

将变量 t 和 τ 互换, 得

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(\tau - t) d\tau$$

$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积公式

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

故

$$R_{12}(t) = f_1(t) * f_2(-t)$$

从图解法容易理解二者的相同和差别之处。相同点是, 这两种运算都包含位移、相乘、积分三个过程; 不同在于卷积运算需要对 $f_2(t)$ 进行翻折而相关运算无须翻折。如果 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 都是实偶函数, 则卷积和相关完全相同。

(4) 相关定理

若 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$, $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$, 则

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega)$$

$$\mathcal{F}[R_{21}(\tau)] = F_2(\omega) F_1^*(\omega)$$

若 $f_2(t) = f_1(t)$, 则

$$\mathcal{F}[R(\tau)] = |F(\omega)|^2$$

两信号互相关函数的傅里叶变换等于其中一个信号的傅里叶变换乘上另一信号傅里叶变换的共轭, 这就是相关定理。如果 $f_2(t)$ 是实偶函数, 则相关定理和卷积定理具有相同的形式。

而信号的自相关函数的傅里叶变换等于信号幅度谱的平方。即信号的自相关函数与其能量谱是一对傅里叶变换。

12. 信号的能量谱密度和功率谱密度

能量有限的信号称为能量信号, 功率有限的信号称为功率信号。

信号的能量谱密度定义为单位频带内信号的能量; 信号的功率谱密度定义为单位频带内信号的功率。

对于非周期信号来讲, 信号的能量谱密度和功率谱密度描述的是信号的能量密度和功率密度在频域随频率变化的情况。它们研究的是信号的能量或功率在频域的分布情况, 直接影响信号所占的频带宽度。

对于随机信号, 不能用确定的时间函数来描述它, 自然也无法用频谱来表示, 这种情

况下,往往用功率谱来描述它的频域特性。

根据 Parseval 定理,能量信号 $f(t)$ 的能量

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

则 $|F(\omega)|^2 \sim \omega$ 即信号 $f(t)$ 的能量谱密度。

由相关定理可知,自相关函数的傅里叶变换即信号能量谱密度。且

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

即原点处的自相关函数值等于信号的能量。

周期或非周期信号的功率谱密度定义为

$$p(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

其中, $F_T(\omega)$ 表示时间段 T 范围内信号的傅里叶变换,则信号的平均功率为

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega) d\omega$$

同样根据相关函数定义,有

$$p(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} = \mathcal{F}[R(\tau)]$$

即功率有限信号的功率谱密度与自相关函数是一对傅里叶变换。

【例题 3.13】 求 $f(t) = A\cos(\omega_1 t + \theta)$ 的功率谱密度。

解: [例题 3.12] 中已求得余弦波信号 $f(t) = A\cos(\omega_1 t + \theta)$ 的自相关函数

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_1 \tau)$$

则其功率谱密度为

$$\begin{aligned} p(\omega) &= \mathcal{F}[R(\tau)] = \mathcal{F}\left[\frac{A^2}{2} \cos(\omega_1 \tau)\right] \\ &= \frac{A^2}{2} \pi [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)] \end{aligned}$$

一般周期信号、随机信号属于功率信号,功率谱密度也多应用于随机信号的分析与研究中。

能量谱密度和功率谱密度都是正的实函数,工程中,通常将能量谱密度和功率谱密度简称为能量谱和功率谱。

13. 本章结语

本章分析了信号的四个频率特性——频谱、频谱密度、能量谱密度和功率谱密度。确定性信号主要分析频谱或频谱密度,随机性信号主要分析功率谱密度。

时域是真实世界,是唯一客观存在的域。频域是一个数学架构,虽然它不是真实的,但是频域中的频率却是一个物理量,因此,频域是有物理意义的。正弦信号 $\cos(\omega t)$ 和复

指数信号 $e^{j\omega t}$ 是函数表达式中唯一既含有时间又含有频率的信号,由它们可以建立时域和频域之间的联系,这就是傅里叶分析。

(1) 如果知道时间信号,要分析它所含有的频谱成分,可以通过傅里叶积分求出其频谱或频谱密度,这个过程就是傅里叶级数的谱系数或傅里叶正变换。

对于周期信号,其频谱(傅里叶级数的系数)为

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

频谱密度(傅里叶变换)为

$$F_{T_1}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

对于非周期信号,其频谱密度(傅里叶变换)为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶级数系数显示的是离散谐波,而傅里叶变换显示的是连续频率。二者都属于傅里叶分析,都将原来的时域信号变成另外一种形式——频域中的形式,但所包含的信息不变。频域中不可能产生新的信息,同一波形的时域或频域描述所含的信息完全相同。例如,信号幅度增加一倍,那么各个频率成分的幅度也增加一倍。

(2) 如果知道频谱,要想观察它的时域波形,只需将每个频率分量变换成它的时域正弦波,再将其全部叠加即可,这个过程就是傅里叶级数展开或傅里叶反变换。也称为信号的正交分解。

对于周期信号,将信号分解成直流成分和一系列频率为基波频率整数倍的无限多项谐波函数之和,这就是傅里叶级数展开式。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

对于非周期信号,当频率覆盖整个频率区间(连续频率)时,加和的极限变成了积分,即信号分解成无穷多正弦信号的加权积分,这就是傅里叶反变换。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

(3) 傅里叶级数和傅里叶变换的性质,进一步揭示了时域和频域之间的内在联系,可以简化运算,便于分析实际中的应用。

(4) 信号的频率特性除了频谱和频谱密度外,还有能量谱密度和功率谱密度,表示的是信号在频域中的能量或功率的概念。而 Parseval 定理是能量守恒定理,揭示了信号在时域中的能量或功率与其频域中的能量或功率是相等的。

总之,傅里叶分析建立了时域和频域之间的桥梁,可以分析在时域中难以解读的信号频域特征,揭示了信号的时间特性和频率特性之间的内在联系。

3.5 习题分析及解答

3.5.1 周期信号的傅里叶级数

【习题 3.1】 利用复指数函数的正交性,推导指数形式的傅里叶级数的系数公式。

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

解: 指数形式的傅里叶级数展开式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

两端乘以 $e^{-jm\omega_1 t}$, 则

$$f(t) e^{-jm\omega_1 t} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \right) e^{-jm\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (F_n e^{jn\omega_1 t} e^{-jm\omega_1 t}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j(n-m)\omega_1 t}$$

对上式在时间间隔 $t_0 < t < t_0 + T_1$ (即在一个周期内) 求积分, 得

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jm\omega_1 t} dt &= \int_{t_0}^{t_0+T_1} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j(n-m)\omega_1 t} \right) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \int_{t_0}^{t_0+T_1} e^{j(n-m)\omega_1 t} dt \end{aligned}$$

其中, $\{e^{jn\omega_1 t}\}$ 是正交的, 即

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} e^{j(n-m)\omega_1 t} dt = \begin{cases} T_1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

故

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \int_{t_0}^{t_0+T_1} e^{j(n-m)\omega_1 t} dt = F_m T_1$$

即

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jm\omega_1 t} dt = F_m T_1$$

因此有

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

【习题 3.2】 求下列周期信号的直流分量。

(1) $f(t) = \sin(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)$

(2) $f(t) = \sin^2(\omega_0 t)$

(3) $f(t) = |\sin(\omega_0 t)|$

(4) $f(t) = K[1 + \cos(\omega_0 t)]$

分析:

直流分量实际上就是信号的均值:

$$f_D = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \right]$$

对于周期信号,求一个周期内的均值即可。

$$f_D = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) dt$$

解:

(1) 正弦信号均值为 0, 即直流分量为 0, 故 $f_D = 0$ 。

(2) 整理得

$$f(t) = \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2}$$

故

$$f_D = \frac{1}{2}$$

(3) 计算均值

$$\begin{aligned} f_D &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |\sin(\omega_0 t)| dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} \sin(\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T_0} \frac{1}{\omega_0} [-\cos(\omega_0 t)] \Big|_0^{T_0/2} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

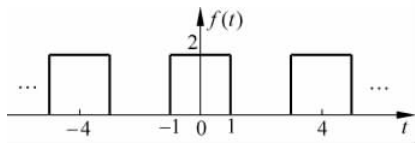
(4) $f(t) = K + K \cos(\omega_0 t)$, 故 $f_D = K$ 。

【习题 3.3】 求题图 3-3 所示周期信号的傅里叶级数, 并画出其幅度频谱和相位频谱。

分析:

这是一道典型的求解周期信号傅里叶级数展开式的题。既可求指数形式的傅里叶级数, 也可求三角形式的傅里叶级数。

关键是系数的求解。可以先求指数形式的系数 F_n , 再应用系数间的关系求得三角形式的系数, 代入傅里叶级数展开式即可。



题图 3-3

解: 信号周期 $T_1=4$, 则 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{2}$ 。

指数形式的傅里叶级数的系数

$$F_n = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 2e^{-jn\omega_1 t} dt = \text{Sa}(n\omega_1)$$

则指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(n\pi/2) e^{jn\pi t/2}$$

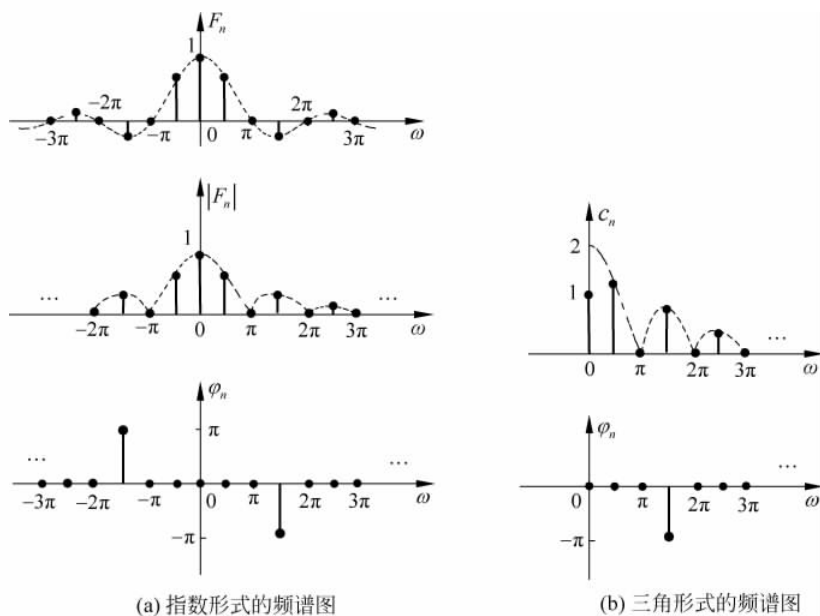
也可求三角形式的傅里叶级数。

$$a_0 = F_0 = 1, \quad a_n = 2\text{Re}F_n = 2\text{Sa}(n\omega_1), \quad b_n = -2\text{Im}F_n = 0$$

则三角形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\text{Sa}(n\omega_1) \cos(n\omega_1 t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\text{Sa}(n\pi/2) \cos(n\pi t/2)$$

幅度频谱和相位频谱如图 3-3(1)所示。



题图 3-3(1)

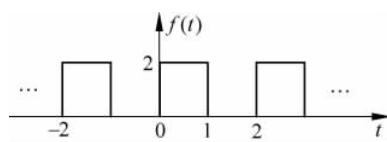
题后解析：

需要注意的是,指数形式的傅里叶级数及其系数的 $n \in (-\infty, +\infty)$, 因此,指数形式的频谱是双边的,三角形式的频谱只有直流成分和正频率部分。因此,除去直流成分一致外,三角形式的幅度频谱是指数形式幅度频谱的 2 倍。即 $c_n = 2|F_n|$ 。

【习题 3.4】 求题图 3-4 所示周期信号的指数形式的傅里叶级数展开式,并画出其幅度频谱和相位频谱。

解：先求系数

$$F_n = \frac{1}{2} \int_0^1 2e^{-jn\omega_1 t} dt = \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1}{2}\right) e^{-j\frac{n\omega_1}{2}}$$



题图 3-4

则傅里叶级数

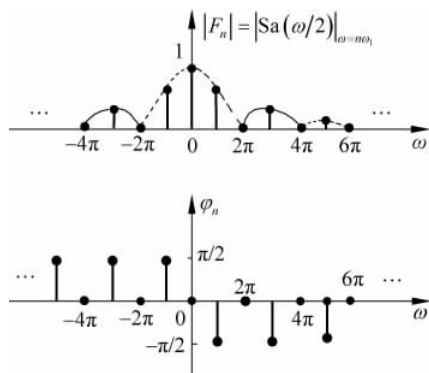
$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1}{2}\right) e^{-j\frac{n\omega_1}{2}} e^{jn\omega_1 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1}{2}\right) e^{jn\omega_1(t-1/2)} \end{aligned}$$

其中, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \pi$ 。

频谱图如图 3-4(1)所示。

题后解析：

本题与[习题 3.3]相比,时域有位移,因此,多了一个 $(-n\pi/2)$ 的相移。



题图 3-4(1)

另外,指数形式的幅度频谱偶对称,相位频谱奇对称。

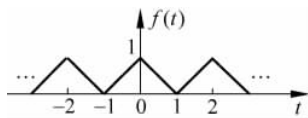
【习题 3.5】 求题图 3-5 所示周期信号的三角形式的傅里叶级数展开式,并求直流分量以及 $n=1\sim 5$ 次谐波的有效值。

分析:

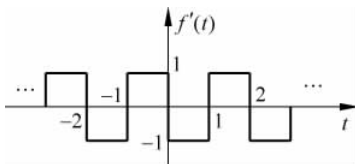
直流分量: $c_0 = F_0$

n 次谐波的有效值: $c_n/\sqrt{2}$ 或者 $\sqrt{2}|F_n|$

解: 为了简化计算,先对 $f(t)$ 求导一次,得到 $f'(t)$,如题图 3-5(1)所示。



题图 3-5



题图 3-5(1)

则 $f'(t)$ 的傅里叶级数的系数为

$$\begin{aligned} F_{1n} &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 e^{-jn\omega_1 t} dt - \int_0^1 e^{-jn\omega_1 t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-jn\omega_1} e^{-jn\omega_1 t} \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{jn\omega_1} e^{-jn\omega_1 t} \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{1}{jn\omega_1} \left[-2 \sin^2 \left(\frac{n\omega_1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

根据微分性质,可知 $f(t)$ 的傅里叶级数的系数为

$$F_n = \frac{1}{jn\omega_1} F_{1n} = \frac{2}{(n\omega_1)^2} \sin^2 \left(\frac{n\omega_1}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{Sa}^2 \left(\frac{n\omega_1}{2} \right)$$

则

$$a_0 = F_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 2 \text{Re} F_n = \text{Sa}^2 \left(\frac{n\omega_1}{2} \right), \quad b_n = -2 \text{Im} F_n = 0$$

所以

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Sa}^2\left(\frac{n\omega_1}{2}\right) \cos(n\omega_1 t)$$

这里, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \pi$ 。

因此, 直流分量为 $c_0 = 1/2$, 谐波分量的有效值为

$$\frac{1}{\sqrt{2}} c_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sa}^2\left(\frac{n\omega_1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

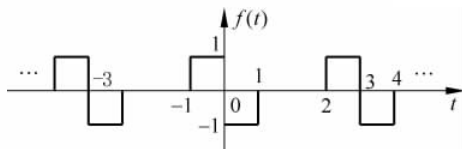
故, 1~5 次谐波的有效值分别为 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}$ 、0、 $\frac{2\sqrt{2}}{9\pi^2}$ 、0、 $\frac{2\sqrt{2}}{25\pi^2}$ 。

【习题 3.6】 求题图 3-6 所示周期信号的傅里叶级数。

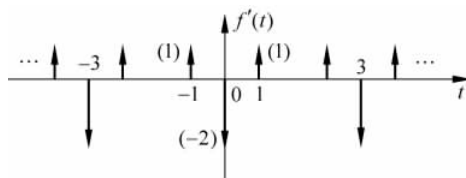
分析:

求解傅里叶级数的系数, 既可以直接积分, 也可应用傅里叶级数的性质简化计算。

解: 对 $f(t)$ 求导 1 次, 得到 $f'(t)$, 如题图 3-6(1) 所示。



题图 3-6



题图 3-6(1)

$f'(t)$ 的主周期

$$f'_1(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$$

则 $f'(t)$ 的傅里叶级数的系数为

$$\frac{1}{T_1} e^{jn\omega_1} - \frac{2}{T_1} + \frac{1}{T_1} e^{-jn\omega_1} = \frac{2}{3} [\cos(n\omega_1) - 1]$$

由微分性质, 得

$$(jn\omega_1) F_n = \frac{2}{T_1} [\cos(n\omega_1) - 1]$$

则 $f(t)$ 的傅里叶级数的系数为

$$F_n = \frac{2[\cos(n\omega_1) - 1]}{(jn\omega_1) T_1}$$

代入 $T_1 = 3, \omega_1 = \frac{2\pi}{3}$, 得

$$F_n = \frac{1}{jn\pi} \left[\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 1 \right]$$

$f(t)$ 的傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{jn\pi} \left[\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 1 \right] e^{jn \cdot \frac{2\pi}{3} t}$$

【习题 3.7】 求题图 3-7 所示周期信号的傅里叶级数展开式, 并画出其幅度频谱和相位频谱。

解：这是一个周期性的冲激信号，主周期为

$$f_1(t) = \delta(t-1)$$

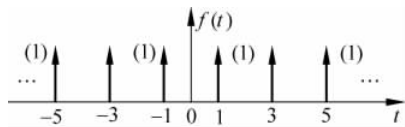
周期 $T_1=2$ ，角频率 $\omega_1=\pi$ ，则

$$F_n = \frac{1}{2} \int_0^2 \delta(t-1) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{2} e^{-jn\pi} = \frac{1}{2} \cos(n\pi)$$

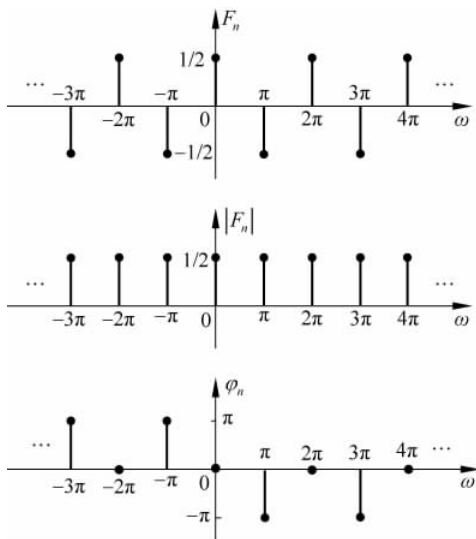
故傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \cos(n\pi) e^{jn\pi t}$$

其频谱图或者幅度频谱和相位频谱如题图 3-7(1)所示。



题图 3-7



题图 3-7(1)

题后解析：

本题是[习题 3.1]位移后的冲激串，理论上其指数形式的傅里叶级数的系数有一相移，应为复数。但本题的冲激串依然是偶对称的，因此，其指数形式的傅里叶级数的系数必为实数。

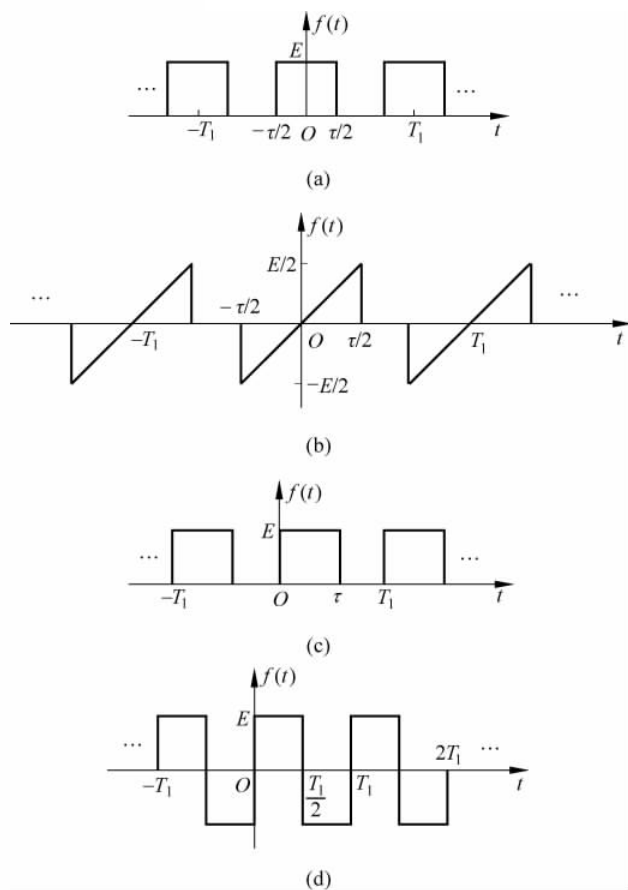
【习题 3.8】 利用傅里叶级数的对称性质，分析题图 3-8 所示信号的指数形式傅里叶级数的系数是否是实系数、虚系数、复系数，判断信号所含的频率成分。

分析：

不具体求解，而是根据傅里叶级数的对称性质，直接判断信号所含的频率成分，以及系数的虚实性。

解：

(a) $f(t)$ 偶对称， $b_n=0$ ， $a_0 \neq 0$ ， $a_n \neq 0$ 。因此傅里叶级数的系数是实系数，信号含有直流分量、余弦分量。



题图 3-8

(b) $f(t)$ 奇对称, $a_0 = a_n = 0, b_n \neq 0$ 。其傅里叶级数的系数是纯虚数, 信号只含有正弦分量。

(c) $f(t)$ 没有对称性, 其傅里叶级数的系数是复系数, 含有全部分量(直流分量、正弦分量、余弦分量)。

(d) $f(t)$ 既满足奇对称, 也满足奇谐对称, 因此其傅里叶级数的系数是纯虚数(而且是奇次的), 信号只含有奇次谐波的正弦分量。

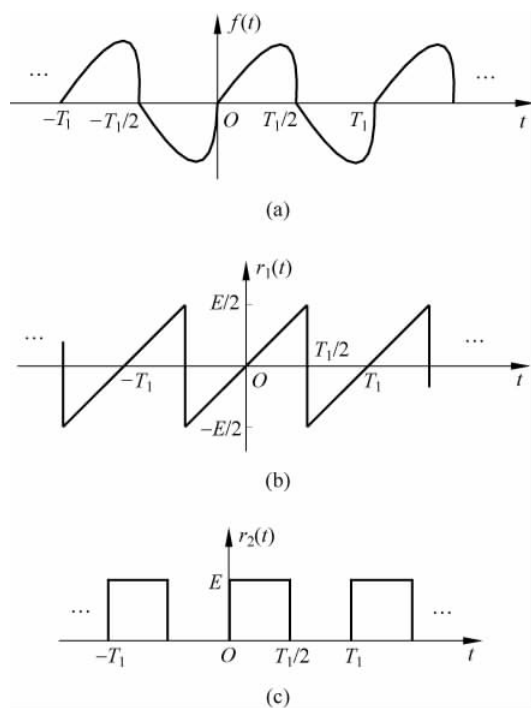
【习题 3.9】 如果将题图 3-9(a) 所示的 $f(t)$ 作为输入信号通过一 LTI 系统, 分析能否产生题图 3-9(b) 所示的 $r_1(t)$ 或者题图 3-9(c) 所示的 $r_2(t)$ 。

分析:

本题属于概念分析题。题中有一个关键的要点是 LTI 系统。信号通过 LTI 系统, 不会产生新的频率成分。因此, 可以从输入信号和输出信号所含的频率成分着手, 分析输入信号通过 LTI 系统能否产生题中所描述的输出信号。

分析信号所含的频率成分, 可根据信号的对称性以及频谱的特点。

解: $f(t)$ 满足奇谐对称, 因此, 只含有奇次谐波分量。



题图 3-9

$r_1(t)$ 奇对称, 只含有正弦分量, 但含有奇次谐波和偶次谐波。相对于输入信号, 产生了新的频率分量(偶次谐波), 而 LTI 系统不可能产生新的频率成分, 因此, 不可能得到 $r_1(t)$ 这样的输出波形。

同理, $r_2(t)$ 含有所有的频率成分(直流、奇次谐波和偶次谐波的正弦分量、余弦分量), 因此, 不可能是 $f(t)$ 通过 LTI 系统得到的。

题后解析:

频域分析是信号与系统最重要的分析方式之一。相对于时域, 信号与系统在频域中可以表现出更多的物理特性。在电气、电子信息、通信、控制等领域中的很多现象, 都可以利用正弦波得到满意的解决, 如 RLC 电路, 互连线的电气效应、通信的带宽、信息码率等。这也是工程师们喜欢在频域寻求解决问题方案的原因。

【习题 3.10】 周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数系数为 F_n , 求下列信号的傅里叶级数的系数。

- (1) $f(t-t_0) + f(t+t_0)$ (2) $f_e(t)$ (3) $f_o(t)$ (4) $f(2t)$ (5) $f(t/2)$

分析:

利用傅里叶级数的性质求解, 参看表 3-1。

解:

- (1) 由于 $f(t-\tau) \rightarrow F_n e^{-jn\omega_1 \tau}$, 则 $f(t-t_0) + f(t+t_0)$ 的傅里叶级数的系数为

$$F_n e^{-jn\omega_1 t_0} + F_n e^{jn\omega_1 t_0} = F_n (e^{-jn\omega_1 t_0} + e^{jn\omega_1 t_0}) = 2\cos(n\omega_1 t_0) F_n$$

(2) $f(-t)$ 的傅里叶级数的系数为

$$\begin{aligned}\frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(-t) e^{-jn\omega_1 t} dt & \stackrel{\tau=-t}{=} -\frac{1}{T_1} \int_{-t_0-T_1}^{-t_0} f(\tau) e^{jn\omega_1 \tau} d\tau \\ & = \frac{1}{T_1} \int_{-t_0}^{-t_0-T_1} f(\tau) e^{jn\omega_1 \tau} d\tau = F_{-n}\end{aligned}$$

又 $f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$, 所以, $f_e(t)$ 的傅里叶级数的系数为 $\frac{1}{2}[F_n + F_{-n}]$ 。

(3) $f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$, 则 $f_o(t)$ 的傅里叶级数的系数为 $\frac{1}{2}[F_n - F_{-n}]$ 。

(4) 当 $a > 0$ 时, $f(at)$ 的周期变为 T_1/a , 基本角频率变为 $a \frac{2\pi}{T_1} = a\omega_1$ 。因此, $a > 0$ 时, $f(at)$ 的傅里叶级数的系数为

$$\frac{1}{T_1/a} \int_{t_0/a}^{(t_0+T_1)/a} f(at) e^{-jm \frac{2\pi}{T_1/a} t} dt \stackrel{\tau=at}{=} \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(\tau) e^{-jm\omega_1 \tau} d\tau = F_m$$

即 $f(at)$ 的傅里叶级数的系数值 F_m 与原周期信号的傅里叶级数的系数值 F_n 相等。

因此, $f(2t)$ 的傅里叶级数的系数为 F_n 。

(5) $f(t/2)$ 的傅里叶级数的系数为 F_n 。

题后解析:

(4) 和 (5) 表明周期信号压缩或扩展后, 其傅里叶级数的系数值与原周期信号的傅里叶级数的系数值相同。

但是, 经过压缩或扩展后, 周期改变, 因此, 基本角频率将改变, 频率间隔改变, 即谐波频率点并不相同。

假设 $f(t)$ 基本角频率为 ω_1 , 则 $f(t)$ 的谐波频率点位于 $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$ 。而 $f(2t)$ 的谐波频率点位于 $2\omega_1, 4\omega_1, 6\omega_1, \dots$; $f(t/2)$ 的谐波频率点位于 $\omega_1/2, \omega_1, 3\omega_1/2, 2\omega_1, \dots$ 。

当 $a < 0$ 时, $f(at)$ 的傅里叶级数的系数为 F_{-m} 。

【习题 3.11】 信号 $f(t) = 1 + \cos(18\pi t) + 0.5\cos(30\pi t)$, 求信号 $f(t)$ 的周期以及所含的谐波成分。

分析:

本题的 $f(t)$ 是以谐波成分的形式呈现。

周期 $T_1 = 2\pi/\omega_1$, 因此, 需要知道信号的基本角频率, 而周期信号的基本角频率等于各谐波分量的最大公约数。

解: 18π 和 30π 的最大公约数为 6π , 即 $\omega_1 = 6\pi$, 则

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{3}$$

而 18π 和 30π 分别是 3 次谐波和 5 次谐波, 即信号 $f(t)$ 含有直流、3 次谐波和 5 次谐波。

【习题 3.12】 画出下列信号的频谱图, 并应用 Parseval 定理求信号的平均功率。

(1) $f(t) = 2[1 + \cos(\omega_1 t)]$

$$(2) f(t) = \cos^2(\omega_1 t)$$

$$(3) f(t) = \cos(\omega_0 t - \pi/3) + 0.5 \cos(2\omega_0 t - \pi/2)$$

$$(4) f(t) = 1 + \cos(\pi t/6) - \cos(\pi t/3)$$

$$(5) f(t) = 2 - \cos(\pi t/4) + \cos(\pi t/3)$$

$$(6) f(t) = \sin(t/3) + \cos(t/2)$$

分析:

对于有限频率成分的周期信号,画出每一个频率成分处的频谱即可。而且这种信号的平均功率应用 Parseval 定理在频域求更简单。

$$P = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n / \sqrt{2})^2$$

解:

$$(1) c_0 = 2, c_1 = 2$$

信号的频谱如题图 3-12(1)所示。

$$P = 2^2 + (2/\sqrt{2})^2 = 6$$

$$(2) f(t) = \cos^2(\omega_1 t) = \frac{1 + \cos(2\omega_1 t)}{2}, \text{ 则}$$

$$c_0 = 1/2, \quad c_2 = 1/2$$

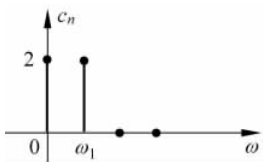
频谱如题图 3-12(2)所示。

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ((1/2)/\sqrt{2})^2 = \frac{3}{8}$$

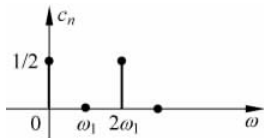
$$(3) c_1 = 1, c_2 = 1/2$$

频谱如题图 3-12(3)所示。

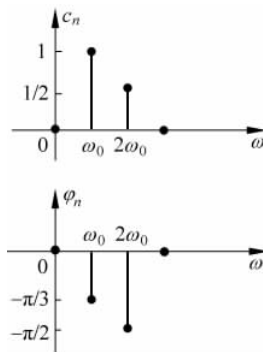
$$P = (1/\sqrt{2})^2 + ((1/2)/\sqrt{2})^2 = \frac{5}{8}$$



题图 3-12(1)



题图 3-12(2)



题图 3-12(3)

$$(4) f(t) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \pi\right), \text{ 则}$$

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1$$

频谱如题图 3-12(4)所示。

$$P = 1^2 + (1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 2$$

$$(5) f(t) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = 2 + \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

基本角频率是 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{3}$ 的最大公约数, 即 $\omega_1 = \frac{\pi}{12}$, 则

$$c_0 = 2, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 1$$

频谱如题图 3-12(5)所示。

$$P = 2^2 + (1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 5$$

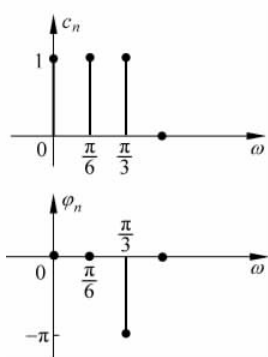
$$(6) f(t) = \sin\left(\frac{1}{3}t\right) + \cos\left(\frac{1}{2}t\right) = \cos\left(\frac{1}{3}t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{1}{2}t\right)$$

基本角频率是 $1/3$ 和 $1/2$ 的最大公约数, 即 $\omega_1 = 1/6$, 则

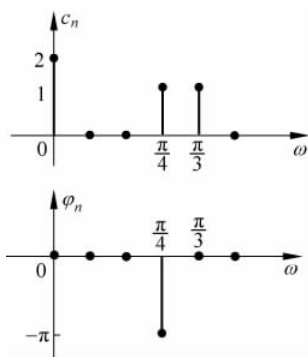
$$c_2 = 1, \quad c_3 = 1$$

频谱如题图 3-12(6)所示。

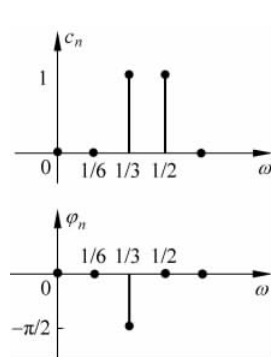
$$P = (1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 1$$



题图 3-12(4)



题图 3-12(5)



题图 3-12(6)

【习题 3.13】 一电压信号 $f(t)$ 只含有三个频率成分的余弦分量: 1Hz、3Hz、5Hz, 幅度分别为 3V、2V、1V, 写出 $f(t)$ 的表达式。

分析:

已知信号的谐波成分, 写信号的表达式。相当于已知傅里叶级数的系数, 写出傅里叶级数的表达式。

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \end{aligned}$$

解: 由题意可知, $c_1=3, c_3=2, c_5=1$ 。 $f_1=1, \omega_1=2\pi$ 。故

$$f(t) = 3\cos(2\pi t) + 2\cos(6\pi t) + \cos(10\pi t) \text{ (V)}$$

【习题 3.14】 某信号的频谱如题图 3-14 所示, 写出该信号的表达式。

解: 由频谱图可知, 幅度 $c_0=1, c_1=3, c_2=0, c_3=2, c_4=0, c_5=1$; 相角 $\varphi_0=0, \varphi_1=-\pi/4, \varphi_2=0, \varphi_3=-\pi, \varphi_4=0, \varphi_5=-\pi/2$ 。故

$$f(t) = 1 + 3\cos(\omega_1 t - \pi/4) + 2\cos(3\omega_1 t - \pi) + \cos(5\omega_1 t - \pi/2)$$

【习题 3.15】 一个奇谐对称的周期信号, 周期为 0.1s, 分析该信号所含的频率成分中是否包含直流、10Hz、15Hz、20Hz、30Hz 的正弦信号?

分析:

给定周期信号, 分析信号中所含的频率成分, 这属于傅里叶级数的问题。

奇谐对称信号, 只含有奇次谐波分量(即基本频率分量的奇数倍), 包括正弦分量和余弦分量。

解: 周期 $T_1=0.1\text{s}$, 则 $f_1=10\text{Hz}$ 。奇谐对称信号不含有直流, 只含有奇次谐波分量, 即题中的频率中只含有 10Hz 和 30Hz。

【习题 3.16】 证明偶谐信号只含有偶次谐波成分。

分析:

偶谐信号满足

$$f(t) = f(t \pm T_1/2)$$

证明: 可以将偶谐信号表示为

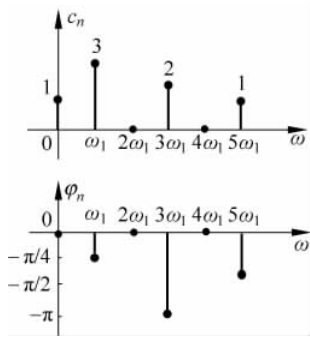
$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & -T_1/2 \leq t < 0 \\ f_1(t - T_1/2), & 0 \leq t < T_1/2 \end{cases}$$

则

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt + \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1/2} f_1(t - T_1/2) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

令 $\tau = t - T_1/2$, 则

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt + \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(\tau) e^{-jn\omega_1 (\tau + T_1/2)} d\tau \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt + \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(\tau) e^{-jn\omega_1 \tau} e^{-jn\omega_1 T_1/2} d\tau \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt + \frac{1}{T_1} (-1)^n \int_{-T_1/2}^0 f_1(\tau) e^{-jn\omega_1 \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T_1} [1 + (-1)^n] \int_{-T_1/2}^0 f_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{aligned}$$



题图 3-14

当 n 为奇数时, $F_n = 0$;

当 n 为偶数时, $F_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^0 f_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$ 。

因此, $f(t)$ 为偶谐函数, $f(t)$ 的傅里叶级数只含有偶次谐波分量, 不含奇次谐波分量。

题后解析:

实际上, 偶谐函数相当于周期为 $T_1/2$ 的周期信号, 因此基本分量为 $2\omega_1$, 谐波分量为 $2n\omega_1$, 自然都是偶次谐波。

【习题 3.17】 一周期信号 $f(t)$ 只含有基波分量和 3 次谐波分量, 且已知 $|F_1| = 2$, $|F_3| = 1/2$, $\varphi_1 = -\pi/2$, $\varphi_3 = \pi/2$ 。

(1) 画出该信号的指数形式的幅度频谱和相位频谱。

(2) 写出三角形式的傅里叶级数。

(3) 判断信号的对称性。

(4) 求信号的平均功率。

分析:

已知频率分量, 即可画出频谱图。

将周期信号的各频率成分合成, 即可写出信号的表达式。

一般信号, 其傅里叶级数的系数 F_n 是复数, 相位特性为 $\arctan(\text{Im}F_n/\text{Re}F_n)$ 。如果信号具有某种时域对称性, 那么其傅里叶级数的系数将表现出某些特殊性。信号的时域对称性与其傅里叶级数的系数之间的关系:

如果信号偶对称, 则信号只含有直流分量和余弦分量, 不含有正弦分量。其 F_n 是实数, 相位为 0 或 $\pm\pi$;

如果信号奇对称, 则信号将不含直流分量, 也没有余弦分量, 只含有正弦分量。其 F_n 是纯虚数, 相位为 $\pm\pi/2$;

如果信号奇谐对称, 则只含有奇次谐波分量。如果信号偶谐对称, 则只含有偶次谐波分量。如果信号既奇对称又奇谐对称, 则只含有奇次谐波的正弦分量; 如果信号既偶对称又奇谐对称, 则只含有奇次谐波的余弦分量, 等等。

解:

(1) 信号指数形式的频谱如题图 3-17 所示。

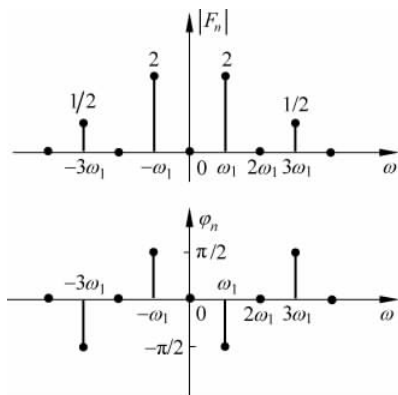
(2) $c_1 = 2|F_1| = 4$, $c_3 = 2|F_3| = 1$, 则三角形式的傅里叶级数为

$$f(t) = 4\cos(\omega_1 t - \pi/2) + \cos(3\omega_1 t + \pi/2)$$

(3) 由(2)可知, 相位为 $\pm\pi/2$, 只有正弦项, 因此, 信号是奇对称的, 同时奇谐对称。

(4) 由于信号只有 2 个频率分量, 根据 Parseval 定理, 由幅度谱求信号的平均功率很简单。

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2 = 2 \times 2^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8.5 \text{ (W)}$$



题图 3-17

【习题 3.18】 求信号 $f(t) = e^{-t}$ 在区间 $-1 < t < 2$ 上的傅里叶级数展开。

分析：

这是一个非周期信号的傅里叶级数展开的问题。

解： $T_1 = 3, \omega_1 = 2\pi/T_1 = 2\pi/3$

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 e^{-t} e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{3 + j2\pi n} (e^{1+j\langle 2\pi n/3 \rangle} - e^{-2-j\langle 4\pi n/3 \rangle}) \end{aligned}$$

可以求得直流分量 $F_0 = 0.861$ ，以及各次谐波 F_n 。其傅里叶级数展开式为

$$e^{-t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j\langle 2\pi n/3 \rangle t}, \quad t \in (-1, 2)$$

3.5.2 非周期信号的傅里叶变换

【习题 3.19】 求下列信号的傅里叶变换，并画出其频谱密度图。

(1) $f(t) = u(t+1) - u(t-1)$

(2) $f(t) = u(t) - u(t-1)$

(3) $f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$

(4) $f(t) = \frac{\sin \pi(t-1)}{t-1}$

分析：

矩形信号的傅里叶变换是抽样函数，抽样信号的傅里叶变换是矩形。根据下列各式确定关键点坐标。

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

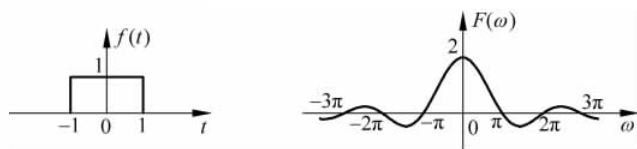
$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$$

对于抽样函数，其积分等于顶点和左右第一个零值点构成的三角形的面积。

解:

$$(1) f(t) = u(t+1) - u(t-1)$$

$f(t)$ 的图形及其傅里叶变换如题图 3-19(1) 所示。



题图 3-19(1)

可知, $F(\omega) = 2\text{Sa}(\omega)$ 。

$$(2) f(t) = f_1(t - 1/2)$$

$f_1(t)$ 的图形及其傅里叶变换如题图 3-19(2) 所示。

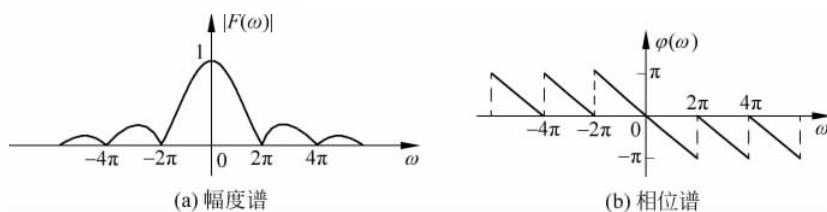


题图 3-19(2)

则 $F_1(\omega) = \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, 故

$$F(\omega) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

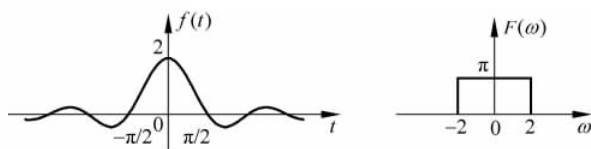
$f(t)$ 的频谱密度如题图 3-19(3) 所示。



题图 3-19(3) $f(t)$ 的频谱密度

$$(3) f(t) = 2\text{Sa}(2t)$$

$f(t)$ 的图形及其傅里叶变换如题图 3-19(4) 所示。



题图 3-19(4)

则

$$F(\omega) = \pi[u(\omega + 2) - u(\omega - 2)]$$

$$(4) f(t) = \pi \text{Sa}(\pi(t-1))$$

由

$$\mathcal{F}[\pi \text{Sa}(\pi t)] = \pi[u(\omega + \pi) - u(\omega - \pi)]$$

则

$$\mathcal{F}[\pi \text{Sa}(\pi(t-1))] = \pi[u(\omega + \pi) - u(\omega - \pi)]e^{-j\omega}$$

频谱密度如题图 3-19(5)所示。

【习题 3.20】 求下列信号的傅里叶变换,并画出其频谱密度图。

$$(1) f(t) = e^{-|t|} \quad (2) f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$(3) f(t) = \frac{1}{2t} \quad (4) f(t) = e^{-t^2}$$

分析:

傅里叶变换的对偶性质:若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则 $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$ 。

解:

(1) 单边指数信号的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] = \frac{1}{j\omega + a}$$

双边指数信号

$$f(t) = e^{-|t|} = e^{-t}u(t) + e^t u(-t)$$

故

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \mathcal{F}[e^{-t}u(t) + e^t u(-t)]$$

其中, $\mathcal{F}[e^{-t}u(t)] = \frac{1}{j\omega + 1}$ 。

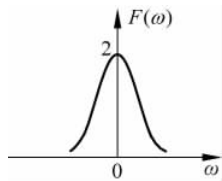
再由 $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$, 可知

$$\mathcal{F}[e^t u(-t)] = \frac{1}{-j\omega + 1}$$

故

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \mathcal{F}[e^{-t}u(t) + e^t u(-t)] = \frac{1}{j\omega + 1} + \frac{1}{-j\omega + 1} = \frac{2}{\omega^2 + 1}$$

频谱密度如题图 3-20(1)所示。



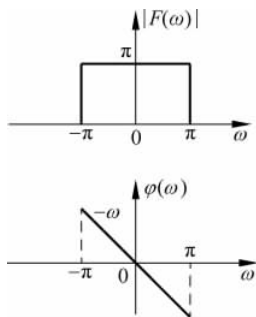
题图 3-20(1)

(2) 由(1)可知

$$e^{-|t|} \Leftrightarrow \frac{2}{\omega^2 + 1}$$

根据对偶性,有

$$\frac{2}{t^2 + 1} \Leftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|}$$



题图 3-19(5)

故

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+1}\right] = \pi e^{-|\omega|}$$

频谱密度如题图 3-20(2)所示。

(3) 利用符号函数的傅里叶变换以及对偶性质

$$\operatorname{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$\frac{2}{jt} \longleftrightarrow 2\pi \operatorname{sgn}(-\omega) = -2\pi \operatorname{sgn}(\omega)$$

故

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2t}\right] = \frac{j}{4} \cdot [-2\pi \operatorname{sgn}(\omega)] = -j \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega)$$

频谱密度如题图 3-20(3)所示。

(4) $f(t)$ 是钟形脉冲函数

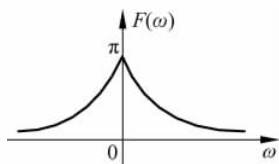
由

$$\mathcal{F}[Ee^{-(t/\tau)^2}] = \sqrt{\pi} E\tau e^{-(\omega\tau/2)^2}$$

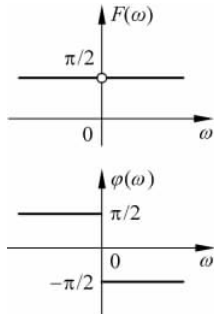
可知

$$\mathcal{F}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} e^{-(\frac{\omega}{2})^2}$$

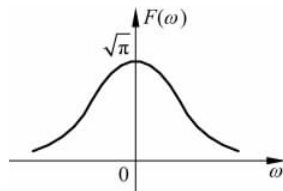
频谱密度如题图 3-20(4)所示。



题图 3-20(2)



题图 3-20(3)



题图 3-20(4)

【习题 3.21】 已知 $f(t) = \operatorname{sgn}(t^2 - 1)$, 求 $f(t)$ 的傅里叶变换。

解:

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t^2 - 1) = \begin{cases} +1, & |t| > 1 \\ -1, & |t| < 1 \end{cases}$$

即 $f(t) = 1 - 2G_2(t)$, 其中 $G_2(t) = u(t+1) - u(t-1)$ 。

由于

$$\mathcal{F}[u(t+1) - u(t-1)] = 2\operatorname{Sa}(\omega)$$

故

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi\delta(\omega) - 4\operatorname{Sa}(\omega)$$

【习题 3.22】 用傅里叶变换的性质求三角脉冲的傅里叶变换。

$$f(t) = E \left(1 - \frac{2|t|}{\tau} \right) \left[u \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - u \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]$$

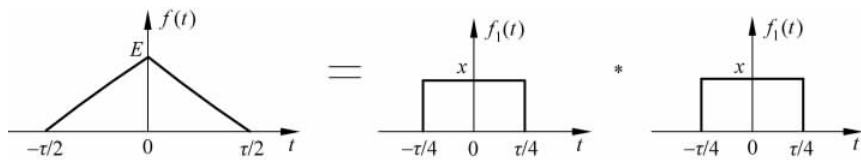
分析:

三角脉冲可以看作两个等宽的矩形脉冲的卷积。根据“时域卷积,频域相乘”,三角脉冲的傅里叶变换等于两个矩形脉冲傅里叶变换相乘。

另外,如果 $f(t)$ 求导出现 δ 函数,可以利用 δ 函数的傅里叶变换以及傅里叶变换的微分性质进行求解。

解一:

将 $f(t)$ 分解成两个同宽矩形的卷积,如题图 3-22(a) 所示。



题图 3-22(a)

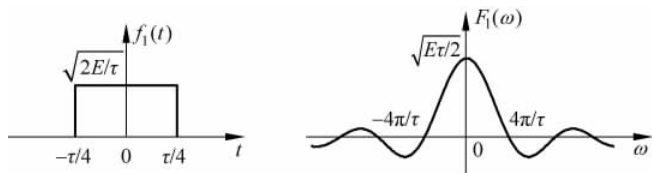
其中, x 的确定方法:

$$\int_{-\tau/4}^{\tau/4} x^2 dt = E$$

即

$$x = \sqrt{\frac{2E}{\tau}}$$

矩形脉冲 $f_1(t)$ 及其傅里叶变换如题图 3-22(b) 所示。



题图 3-22(b)

即

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = \sqrt{\frac{E\tau}{2}} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

则三角脉冲的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(t)] = \sqrt{\frac{E\tau}{2}} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \cdot \sqrt{\frac{E\tau}{2}} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

解二:

$f(t)$ 两次求导,得

$$f''(t) = \frac{2E}{\tau} \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{4E}{\tau} \delta(t) + \frac{2E}{\tau} \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

则

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f''(t)] &= \frac{2E}{\tau} e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - \frac{4E}{\tau} + \frac{2E}{\tau} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \\ &= \frac{4E}{\tau} \left[\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - 1 \right] = -\frac{8E}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\end{aligned}$$

由微分性质

$$\mathcal{F}[f''(t)] = (j\omega)^2 \mathcal{F}[f(t)]$$

则

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)] &= \frac{1}{-\omega^2} \mathcal{F}[f''(t)] = \frac{8E}{\tau} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\omega^2} \\ &= \frac{E\tau}{2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)^2} = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\end{aligned}$$

【习题 3.23】 若已知 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 利用傅里叶变换的性质求下列信号的傅里叶变换。

- | | |
|--------------------------|---|
| (1) $f(2t-3)$ | (2) $f(1-t)$ |
| (3) $(t-2)f(t)$ | (4) $tf(2t)$ |
| (5) $(t-2)f(-2t)$ | (6) $(1-t)f(1-t)$ |
| (7) $t \frac{df(t)}{dt}$ | (8) $f(t)e^{-j2t}$ |
| (9) $f^2(t)$ | (10) $\int_{-\infty}^t \text{Sa}(\tau) d\tau$ |

解:

(1) 利用公式

$$\mathcal{F}[f(at+b)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{j\frac{b}{a}\omega}$$

则

$$\mathcal{F}[f(2t-3)] = \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{3}{2}\omega}$$

(2) 同样

$$\mathcal{F}[f(1-t)] = F(-\omega) e^{-j\omega}$$

(3) 由公式

$$\mathcal{F}[-jtf(t)] = \frac{d}{d\omega} F(\omega)$$

有

$$\mathcal{F}[tf(t)] = j \frac{d}{d\omega} F(\omega)$$

故

$$\mathcal{F}[(t-2)f(t)] = \mathcal{F}[tf(t) - 2f(t)] = j \frac{d}{d\omega} F(\omega) - 2F(\omega)$$

(4) 利用公式

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

有

$$\mathcal{F}[f(2t)] = \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

再利用公式

$$\mathcal{F}[-jtf(t)] = \frac{d}{d\omega} F(\omega)$$

有

$$\mathcal{F}[-jtf(2t)] = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]$$

故

$$\mathcal{F}[tf(2t)] = j \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$(5) \text{ 由 } \mathcal{F}[f(2t)] = \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right), \text{ 知 } \mathcal{F}[f(-2t)] = \frac{1}{2} F\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

则

$$\mathcal{F}[-jtf(-2t)] = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{2} F\left(-\frac{\omega}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} F\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

即

$$\mathcal{F}[tf(-2t)] = j \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} F\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

故

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(t-2)f(-2t)] &= \mathcal{F}[tf(-2t)] - 2\mathcal{F}[f(-2t)] \\ &= j \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} F\left(-\frac{\omega}{2}\right) - F\left(-\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

$$(6) (1-t)f(1-t) = f(1-t) - tf(1-t)$$

由第(2)题求得

$$\mathcal{F}[f(1-t)] = F(-\omega)e^{-j\omega}$$

$$\mathcal{F}[-jtf(1-t)] = \frac{d}{d\omega} [F(-\omega)e^{-j\omega}] = \left[-\frac{d}{d\omega} F(-\omega) \right] e^{-j\omega} + F(-\omega)(-je^{-j\omega})$$

故

$$\mathcal{F}[tf(1-t)] = -j \left[\frac{d}{d\omega} F(-\omega) \right] e^{-j\omega} + F(-\omega)e^{-j\omega}$$

则

$$\mathcal{F}[(1-t)f(1-t)] = -j \left[\frac{d}{d\omega} F(-\omega) \right] e^{-j\omega}$$

(7) 利用公式

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = j\omega F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[-jtf(t)] = \frac{d}{d\omega}F(\omega)$$

则

$$\mathcal{F}\left[-j\omega \frac{d}{d\omega}f(t)\right] = \frac{d}{d\omega}[j\omega F(\omega)] = jF(\omega) + j\omega \frac{d}{d\omega}F(\omega)$$

即

$$\mathcal{F}\left[t \frac{d}{dt}f(t)\right] = -F(\omega) - \omega \frac{d}{d\omega}F(\omega)$$

(8) 利用公式

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

则

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-j2t}] = F(\omega + 2)$$

(9) 根据频域卷积定理

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

则

$$\mathcal{F}[f^2(t)] = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * F(\omega)$$

(10) 设 $f(t) = \text{Sa}(t)$, 则

$$F(\omega) = \pi[u(\omega + 1) - u(\omega - 1)]$$

由积分性质

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

得

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t \text{Sa}(\tau) d\tau\right] = \frac{\pi}{j\omega}[u(\omega + 1) - u(\omega - 1)] + \pi^2\delta(\omega)$$

【习题 3.24】 已知 $f_1(t) = e^{-at}u(t)$, 且 $f_1(t) * f_2(t) = e^{-at}u(t) + e^{-bt}u(t)$, $a > 0$, $b > 0$, 利用傅里叶变换的性质求 $f_2(t)$ 。

分析:

如果在时域求解, 需要利用反卷积, 演算复杂。

在频域求解, 利用傅里叶变换的时域卷积定理, 二者在频域变成相乘的关系, 计算就变得简单了。

解: $f_1(t)$ 的傅里叶变换

$$F_1(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

又

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{b + j\omega}$$

即

$$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{b + j\omega}$$

则

$$F_2(\omega) = 1 + \frac{a + j\omega}{b + j\omega} = 1 + \frac{a}{b + j\omega} + \frac{j\omega}{b + j\omega}$$

因此

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \delta(t) + ae^{-bt}u(t) + \frac{d}{dt}[e^{-bt}u(t)] \\ &= 2\delta(t) + (a - b)e^{-bt}u(t) \end{aligned}$$

【习题 3.25】 计算下列积分值。

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(2t) dt \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}^2(2t) dt \quad (3) \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{Sa}(t)\text{Sa}(2t)] dt$$

分析:

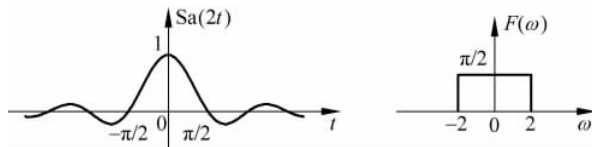
利用公式

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

$F(0)$ 是 $f(t)$ 的傅里叶变换在 $\omega=0$ 的值, 即直流成分。

解:

(1) 画出 $f(t) = \text{Sa}(2t)$ 及其傅里叶变换的图形, 见题图 3-25(1)。



题图 3-25(1)

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(2t) dt = F(0) = \frac{\pi}{2}$$

(2)

$$\mathcal{F}[\text{Sa}^2(2t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F(\omega)$$

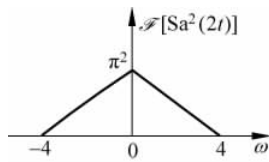
$F(\omega) * F(\omega)$ 如题图 3-25(2) 所示。

则

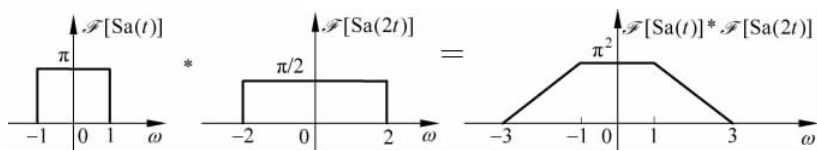
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}^2(2t) dt = \frac{1}{2\pi} \times \pi^2 = \frac{\pi}{2}$$

(3)

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$



题图 3-25(2)



题图 3-25(3)

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\text{Sa}(t) \text{Sa}(2t)] dt = \frac{1}{2\pi} \times \pi^2 = \frac{\pi}{2}$$

题后解析：

在信号与系统的分析中,结合图形求解会有意想不到的效果。

【习题 3.26】 求下列 $F(\omega)$ 的傅里叶反变换。

(1) $F(\omega) = \cos(2\omega)$

(2) $F(\omega) = \sin^2(\omega)$

(3) $F(\omega) = u(\omega + \pi) - u(\omega - \pi)$

(4) $F(\omega) = [u(\omega + \pi) - u(\omega - \pi)] \cos(\omega)$

(5) $F(\omega) = \delta(\omega - 1)$

(6) $F(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} e^{-j\omega}$

(7) $F(\omega) = \text{Sa}(2\omega)$

(8) $F(\omega) = \frac{j\omega}{4 + \omega^2}$

(9) $F(\omega) = \omega$

(10) $F(\omega) = 1/\omega$

分析：

求解傅里叶反变换,可以利用反变换公式直接求解,或者根据典型信号的傅里叶变换及其性质求解。

解：

(1) $F(\omega) = \cos(2\omega) = \frac{1}{2} [e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}]$

根据公式

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

可得

$$\mathcal{F}^{-1}[\cos(2\omega)] = \frac{1}{2} [\delta(t + 2) + \delta(t - 2)]$$

(2) $F(\omega) = \sin^2(\omega) = \frac{1 - \cos(2\omega)}{2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\sin^2(\omega)] &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\omega)\right] \\ &= \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{4}[\delta(t + 2) + \delta(t - 2)] \end{aligned}$$

(3) 由“频域矩形,时域抽样函数”,图形求解如题图 3-26(1)所示。



题图 3-26(1)

可知

$$f(t) = \text{Sa}(\pi t)$$

(4) 由“频域相乘,时域卷积”,故

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{Sa}(\pi t) * \frac{1}{2}[\delta(t+1) + \delta(t-1)] \\ &= \frac{1}{2}[\text{Sa}(\pi(t+1)) + \text{Sa}(\pi(t-1))] \end{aligned}$$

(5) 应用公式

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[1] &= 2\pi\delta(\omega) \\ \mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] &= F(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

故

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - 1)] = \frac{1}{2\pi}e^{jt}$$

(6) 傅里叶变换对

$$\begin{aligned} e^{-at}u(t) &\Leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} \\ f(t - t_0) &\Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega) \end{aligned}$$

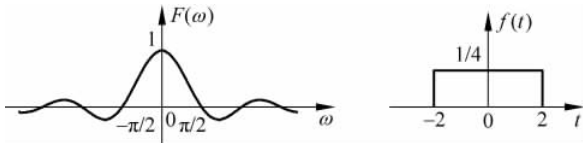
所以

$$\frac{1}{j\omega + 2} \Leftrightarrow e^{-2t}u(t)$$

则

$$f(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$$

(7) “抽样函数”和“矩形”是傅里叶变换对,由诀窍求得结果见题图 3-26(2)。



题图 3-26(2)

则

$$f(t) = \frac{1}{4}[u(t+2) - u(t-2)]$$

(8) 由

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = j\omega F(\omega)$$

则

$$\frac{4}{4 + \omega^2} \Leftrightarrow e^{-2|t|} = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$$

$$\frac{j\omega}{4 + \omega^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \frac{d}{dt}[e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)]$$

故

$$f(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{2t}u(-t)$$

(9) 由 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, $\mathcal{F}[\delta'(t)] = j\omega$, 得

$$f(t) = -j\delta'(t)$$

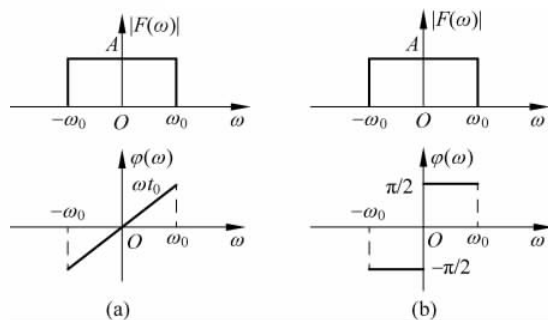
(10) 由

$$\frac{2}{j\omega} \Leftrightarrow \text{sgn}(t)$$

故

$$\frac{1}{\omega} \Leftrightarrow \frac{j}{2} \text{sgn}(t)$$

【习题 3.27】 求题图 3-27 所示 $F(\omega)$ 的傅里叶反变换 $f(t)$ 。



题图 3-27

解:

$$(a) |F(\omega)| = A[u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)]$$

$$\varphi(\omega) = \omega t_0, \quad \omega \in [-\omega_0, \omega_0]$$

则

$$F(\omega) = A[u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)]e^{j\omega t_0}$$

由

$$A[u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)] \Leftrightarrow \frac{A\omega_0}{\pi} \text{Sa}(\omega_0 t)$$

则

$$f(t) = \frac{A\omega_0}{\pi} \text{Sa}(\omega_0(t + t_0))$$

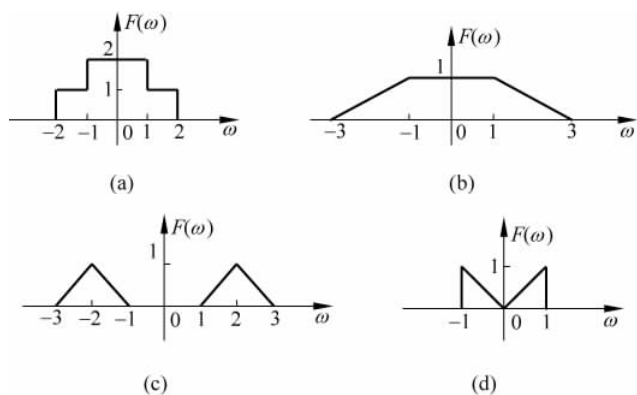
$$(b) |F(\omega)| = A[u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)]$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \pi/2, & \omega \in [0, \omega_0] \\ -\pi/2, & \omega \in [-\omega_0, 0] \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_0} A e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^0 A e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{A}{\pi t} \cos(\omega_0 t - 1) = -\frac{2A}{\pi t} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \end{aligned}$$

【习题 3.28】 $f(t)$ 的傅里叶变换如题图 3-28 所示, 求信号 $f(t)$ 。



题图 3-28

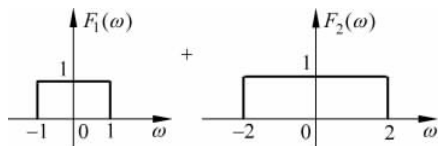
解:

(a) 将 $F(\omega)$ 分解成两部分, $F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega)$, 见题图 3-28(1)。

则

$$F_1(\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \text{Sa}(t)$$

$$F_2(\omega) \Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \text{Sa}(2t)$$



题图 3-28(1)

故

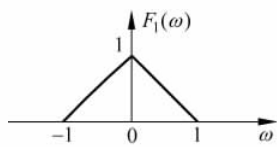
$$f(t) = \frac{1}{\pi} \text{Sa}(t) + \frac{2}{\pi} \text{Sa}(2t)$$

(b)

$$F(\omega) = \frac{1}{2} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

则

$$f(t) = \pi \left[\frac{1}{\pi} \text{Sa}(t) \cdot \frac{2}{\pi} \text{Sa}(2t) \right] = \frac{2}{\pi} \text{Sa}(t) \cdot \text{Sa}(2t)$$



题图 3-28(2)

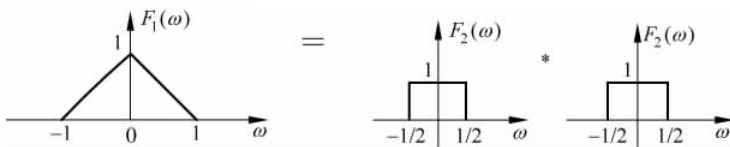
(c) 设 $F_1(\omega)$ 如题图 3-28(2) 所示。

则

$$F(\omega) = F_1(\omega) * [\delta(\omega + 2) + \delta(\omega - 2)]$$

只要求出 $F_1(\omega)$ 的傅里叶反变换, 再应用“频域卷积, 时域相乘”, 即可得到 $f(t)$ 。

$F_1(\omega)$ 可以看成两个矩形的卷积, 见题图 3-28(3)。



题图 3-28(3)

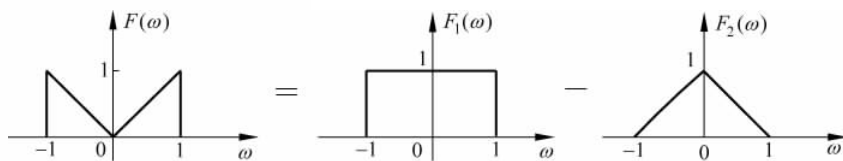
而 $f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{t}{2}\right)$, 则

$$f_1(t) = 2\pi \left[\frac{1}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{t}{2}\right) \right] = \frac{1}{2\pi} \text{Sa}^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

故

$$f(t) = 2\pi f_1(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} e^{-j2t} + \frac{1}{2\pi} e^{j2t} \right] = \frac{1}{\pi} \text{Sa}^2\left(\frac{t}{2}\right) \cos(2t)$$

(d) 将 $F(\omega)$ 分解成题图 3-28(4) 所示的两个傅里叶变换。



题图 3-28(4)

则

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \text{Sa}(t) - \frac{1}{2\pi} \text{Sa}^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

题后解析:

将信号的傅里叶变换分解成一些典型的傅里叶变换形式(或易于求解傅里叶反变换的形式), 结合傅里叶变换的性质, 间接得到傅里叶变换所对应的时间信号, 这是求解傅里叶反变换的一种套路。

借助于图形求解, 直观又简洁。

【习题 3.29】 已知 $f(t) = f(t)u(t)$, 且 $\text{Re}[F(\omega)] = \frac{a}{a^2 + \omega^2}$, $a > 0$, 求 $f(t)$ 。

解: $f(t)$ 是因果信号, 其傅里叶变换的实部和虚部满足希尔伯特变换。

$$\operatorname{Im}[F(\omega)] = -\operatorname{Re}[F(\omega)] * \frac{1}{\pi\omega} = -\frac{a}{a^2 + \omega^2} * \frac{1}{\pi\omega}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[-\frac{a}{a^2 + \omega^2}\right] = -\frac{1}{2}e^{-a|t|}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\pi\omega}\right] = \frac{j}{2\pi}\operatorname{sgn}(t)$$

则

$$\mathcal{F}^{-1}[\operatorname{Im}[F(\omega)]] = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-a|t|} \cdot \frac{j}{2\pi}\operatorname{sgn}(t)\right] = \begin{cases} -\frac{j}{2}e^{-at}, & t > 0 \\ \frac{j}{2}e^{at}, & t < 0 \end{cases}$$

故

$$\operatorname{Im}[F(\omega)] = \frac{-j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

则

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \operatorname{Re}[F(\omega)] + j\operatorname{Im}[F(\omega)] \\ &= \frac{a}{a^2 + \omega^2} - \frac{j\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{a + j\omega} \end{aligned}$$

故

$$f(t) = e^{-at}u(t)$$

【习题 3.30】 信号 $f(t)$ 如题图 3-30 所示, 已知其傅里叶变换式

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

利用傅里叶变换的性质求:

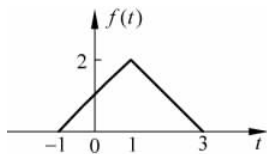
$$(1) \varphi(\omega) \quad (2) F(0) \quad (3) \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$$

(4) 画出 $\mathcal{F}^{-1}\{\operatorname{Re}[F(\omega)]\}$ 的图形。

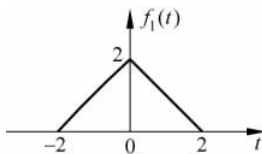
解:

(1) 设 $f(t) = f_1(t-1)$

其中 $f_1(t)$ 是对称三角形, 如题图 3-30(1) 所示。



题图 3-30



题图 3-30(1)

则有

$$F(\omega) = F_1(\omega)e^{-j\omega}$$

故, $f(t)$ 的相位特性为

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \omega$$

因此,只要求出 $f_1(t)$ 的相位特性 $\varphi_1(\omega)$ 即可得解。

$f_1(t)$ 可以看成两个门限信号的卷积,门限信号的傅里叶变换为抽样函数,因此 $f_1(t)$ 的傅里叶变换为 $\text{Sa}^2(x)$ 的函数形式,则 $f_1(t)$ 的相位特性 $\varphi_1(\omega) = 0$ 。故 $f(t)$ 的相位特性

$$\varphi(\omega) = -\omega$$

(2) $F(0)$ 是 $f(t)$ 的直流成分:

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

$F(0)$ 等于 $f(t)$ 三角形的面积,故 $F(0) = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ 。

(3)

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega = 2\pi f(0) = 2\pi$$

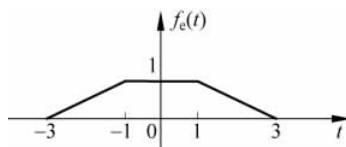
(4) 由

$$\begin{cases} \mathcal{F}[f_e(t)] = \text{Re}F(\omega) \\ \mathcal{F}[f_o(t)] = j\text{Im}F(\omega) \end{cases}$$

则

$$\mathcal{F}^{-1}\{\text{Re}[F(\omega)]\} = f_e(t)$$

而 $f_e(t)$ 是 $f(t)$ 的偶分量。因此, $\mathcal{F}^{-1}\{\text{Re}[F(\omega)]\}$ 的图形即为 $f(t)$ 的偶分量图形,如题图 3-30(2)所示。



题图 3-30(2)

【习题 3.31】 求下列三种信号的傅里叶变换,并画出频谱图。

(1) 矩形脉冲 $f(t) = E[u(t + \tau/2) - u(t - \tau/2)]$ 。

(2) 升余弦脉冲 $f(t) = \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right) \right], |t| \leq \tau$ 。

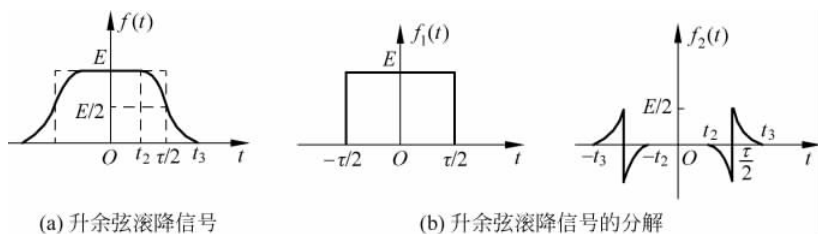
(3) 升余弦滚降信号的波形如题图 3-31(a)所示,它在 $t_2 \sim t_3$ 的时间范围内以升余弦的函数规律滚降变化。设 $t_3 - \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{2} - t_2 = t_0$,升余弦滚降脉冲信号的表示式为

$$f(t) = \begin{cases} E, & (|t| < \frac{\tau}{2} - t_0) \\ \frac{E}{2} \left[1 - \sin \frac{\pi \left(t - \frac{\tau}{2} \right)}{k\tau} \right], & \left(\frac{\tau}{2} - t_0 \leq |t| \leq \frac{\tau}{2} + t_0 \right) \end{cases}$$

其中,滚降系数 $k = \frac{t_0}{\tau/2}$ 。

求得傅里叶变换后,分析 $k=0$ 和 $k=1$ 两种特殊情况的结果。

提示：将 $f(t)$ 分解为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 之和，见题图 3-31(b)，分别求傅里叶变换再相加。



题图 3-31

分析：

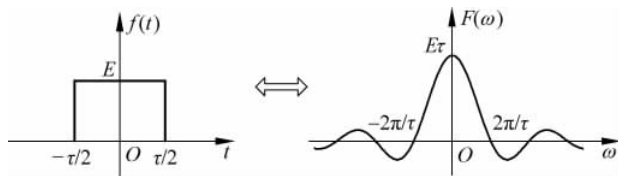
矩形脉冲信号、升余弦信号、升余弦滚降信号，这三个信号在实际工程应用中都非常重要，它们在时域依次变得平滑，根据信号的时域-频域特性，它们的傅里叶变换（即频谱）将依次变得更加集中。

解：

(1) 矩形脉冲信号，傅里叶变换是抽样函数。

$$F(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

频谱图如题图 3-31(1)所示。



题图 3-31(1)

$$\begin{aligned} (2) \quad f(t) &= \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right) \right] [u(t+\tau) - u(t-\tau)] \\ &= \frac{E}{2} [u(t+\tau) - u(t-\tau)] + \frac{E}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right) [u(t+\tau) - u(t-\tau)] \end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{F}\left[\frac{E}{2}(u(t+\tau) - u(t-\tau))\right] = E\tau \text{Sa}(\omega\tau)$$

则

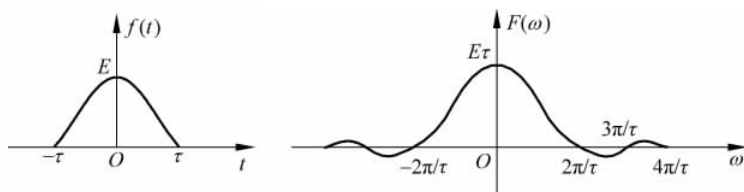
$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\left[\frac{E}{2}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)[u(t+\tau) - u(t-\tau)]\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left[\frac{E}{2}[u(t+\tau) - u(t-\tau)]\right] * \mathcal{F}\left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} E\tau \text{Sa}(\omega\tau) * \pi \left[\delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{E\tau}{2} [\text{Sa}(\omega\tau + \pi) + \text{Sa}(\omega\tau - \pi)]$$

故

$$F(\omega) = E\tau \text{Sa}(\omega\tau) + \frac{E\tau}{2} [\text{Sa}(\omega\tau + \pi) + \text{Sa}(\omega\tau - \pi)] = \frac{E\tau \text{Sa}(\omega\tau)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2}$$

升余弦信号及其频谱如题图 3-31(2)所示。



题图 3-31(2)

(3) 设 $f_3(t)$ 如题图 3-31(3)所示, 先求 $f_3(t)$ 的傅里叶变换。

$$f_3(t) = \begin{cases} \frac{E}{2} \left[1 - \sin\left(\frac{\pi t}{k\tau}\right) \right], & 0 < t < t_0 \\ -\frac{E}{2} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi t}{k\tau}\right) \right], & -t_0 < t < 0 \end{cases}$$

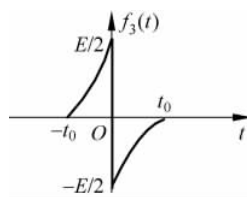
$f_3(t)$ 奇对称, 故

$$\begin{aligned} F_3(\omega) &= -2j \int_0^{+\infty} \frac{E}{2} \left[1 - \sin\left(\frac{\pi t}{k\tau}\right) \right] \sin(\omega t) dt \\ &= -jE \left[\int_0^{t_0} \sin(\omega t) dt - \int_0^{t_0} \sin\left(\frac{\pi t}{k\tau}\right) \sin(\omega t) dt \right] \end{aligned}$$

由于 $k = \frac{t_0}{\tau/2}$, 即 $t_0 = \frac{k\tau}{2}$, 则上述积分变为

$$\begin{aligned} F_3(\omega) &= -jE \left\{ -\frac{1}{\omega} \left[\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right) - 1 \right] + \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \cos\left(\frac{\pi t}{k\tau} + \omega t\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{k\tau} - \omega t\right) dt \right\} \\ &= -jE \left\{ -\frac{1}{\omega} \left[\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right) - 1 \right] + \frac{1}{2} \frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{k\tau} + \omega\right) \cdot \frac{k\tau}{2}\right]}{\frac{\pi}{k\tau} + \omega} - \frac{1}{2} \frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{k\tau} - \omega\right) \cdot \frac{k\tau}{2}\right]}{\frac{\pi}{k\tau} - \omega} \right\} \\ &= -jE \left\{ -\frac{1}{\omega} \left[\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right) - 1 \right] + \frac{1}{2} \frac{\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\pi}{k\tau} + \omega} - \frac{1}{2} \frac{\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\pi}{k\tau} - \omega} \right\} \\ &= -jE \left\{ -\frac{1}{\omega} \left[\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right) - 1 \right] - \frac{\omega \cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{k\tau}\right)^2 - \omega^2} \right\} \end{aligned}$$

由于



题图 3-31(3)

$$f_2(t) = f_3\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - f_3\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

则

$$\begin{aligned} F_2(\omega) &= F_3(\omega)e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - F_3(\omega)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} = F_3(\omega) \cdot 2j\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ &= -j\omega\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)F_3(\omega) \end{aligned}$$

由于

$$F_1(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

所以,升余弦滚降信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F_1(\omega) + F_2(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - j\omega\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)F_3(\omega) \\ &= E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \left[1 - \frac{j\omega}{E}F_3(\omega)\right] \\ &= E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \left\{1 - \omega \left[-\frac{1}{\omega} \left[\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right) - 1 \right] - \frac{\omega \cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{k\tau}\right)^2 - \omega^2} \right] \right\} \\ &= E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{k\omega\tau}{\pi}\right)^2} \end{aligned}$$

当 $k=0$ 时,升余弦滚降信号变成了矩形脉冲信号(第(1)小题),其傅里叶变换为

$$F(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

当 $k=1$ 时, $f(t) = \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right]$,升余弦滚降信号变成了升余弦信号(第(2)小题),其傅里叶变换为

$$F(\omega) = \frac{E\tau \text{Sa}(\omega\tau)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2}$$

题后解析:

矩形信号的频谱是抽样函数,频谱旁瓣很大,会对其他频带内信号产生干扰。

升余弦信号频谱的“拖尾”衰减较快,减少对其他信号的干扰,在实际中广泛应用。

升余弦滚降信号的滚降因子决定频谱“拖尾”的衰减快慢,当 k 越大,频谱“拖尾”衰减越快;反之,当 k 越小,频谱“拖尾”衰减越慢,极限情况是 $k=0$,此时,升余弦滚降信号变成矩形方波,“拖尾”最大。 $k=1$,即升余弦信号。

【习题 3.32】 信号 $f(t)$ 如题图 3-32 所示,不求 $f(t)$ 的傅里叶变换,应用性质求 $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{j\omega/2} d\omega$ 的值。

分析:

频域相乘, 时域卷积。且

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

解: 设 $X(\omega) = \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{j\omega/2}$, 则

$$x(t) = u(t+1) - u(t)$$

$$\mathcal{F}[f(t) * x(t)] = F(\omega) X(\omega) = F(\omega) \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{j\omega/2}$$

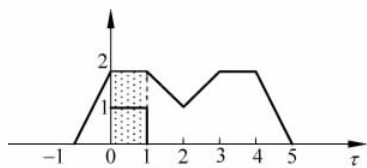
即

$$f(t) * x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega) \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{j\omega/2}] e^{j\omega t} d\omega$$

上式中令 $t=0$, 有

$$f(t) * x(t) \big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{j\omega/2} d\omega$$

即



题图 3-32(1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{j\omega/2} d\omega = 2\pi [f(t) * x(t)] \big|_{t=0}$$

而 $[f(t) * x(t)] \big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) x(-\tau) d\tau$, 如题图 3-32(1) 所示。

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{j\omega/2} d\omega = 2\pi \times 2 = 4\pi$$

【习题 3.33】 计算

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega$$

解:

(1)

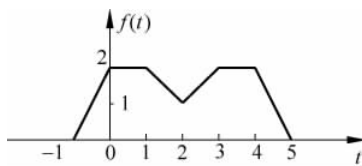
$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

则

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2a} e^{-a|t|}\right] = \frac{1}{a^2 + \omega^2}$$

又 $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega = 2\pi f(0)$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{2a} = \frac{\pi}{a}$$



题图 3-32

(2) 由 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4a^2} e^{-2a|t|} dt = \frac{\pi}{2a^3}$$

【习题 3.34】 用频域卷积定理推导 Parseval 能量定理。

分析:

频域卷积定理

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

实信号 $f(t)$ 的能量

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$$

解: 由频域卷积定理, 有

$$\mathcal{F}[f^2(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F(\omega)$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) F(\omega - \xi) d\xi$$

当 $\omega=0$ 时, 上式成为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) F(-\xi) d\xi$$

对于实信号 $f(t)$, 其傅里叶变换满足共轭对称性, 即

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) F^*(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\xi)|^2 d\xi$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

上式左端即信号的能量, 故

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

【习题 3.35】 由相关定理推导 Parseval 定理。

分析:

自相关函数

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t - \tau) dt$$

相关定理

$$\mathcal{F}[R(\tau)] = |F(\omega)|^2$$

解：自相关函数

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t - \tau) dt$$

则

$$R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

由相关定理,可知

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$

则

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

【习题 3.36】应用 Parseval 定理求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega}{(\omega/2)^2} d\omega$ 。

分析：

Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

解：

$$\frac{\sin^2 \omega}{(\omega/2)^2} = 4 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} = 4 \text{Sa}^2(\omega)$$

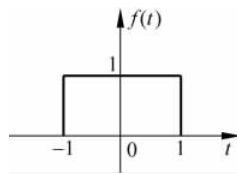
设 $F(\omega) = 2\text{Sa}(\omega)$, 则 $f(t) = u(t+1) - u(t-1)$, 见图 3-36, $f(t)$ 是一个矩形脉冲。

根据 Parseval 定理,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega}{(\omega/2)^2} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = 2\pi \times 1^2 \times 2 = 4\pi$$



题图 3-36

题后解析：

本题如果从数学角度直接计算积分有一定的难度,但如果应用 Parseval 定理,在时域求解变得异常简单。

信号的傅里叶分析是“换域”分析,在一个“域”难以分析的问题,换到“另一个域”兴许变得简单易解。

【习题 3.37】应用 Parseval 定理求 $f(t) = \text{Sa}(2t)$ 的能量。

分析：

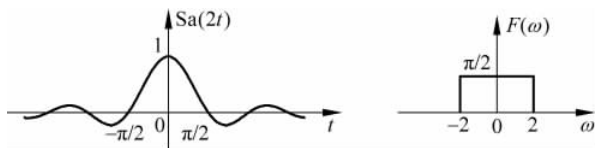
Parseval 定理是信号的能量守恒定理,信号的能量既可以在时域求,也可以转换到频域求解,这取决于在哪个域求解简单。

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

解: $f(t) = \text{Sa}(2t)$, 则

$$F(\omega) = \frac{\pi}{2}[u(\omega + 2) - u(\omega - 2)]$$

如题图 3-37 所示。



题图 3-37

故

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times 4 = \frac{\pi}{2}$$

题后解析:

和信号的傅里叶分析一样,Parseval 定理也是建立信号在时域和频域的关系。傅里叶分析描述信号在时域和频域的不同表现,是同一信号的两个不同的表现方面,二者所含的信息是完全一致的。

Parseval 定理描述了信号的能量(或功率),既然信号在时域和频域都可以描述,那么自然而然,信号的能量(或功率)就既可以在时域求解,也可以在频域求解。由于信号的能量(或功率)只与幅度有关,因此,在频域求解能量(或功率)只与信号的幅度谱有关,与相位谱无关。

【习题 3.38】 求下列信号的频谱密度和能量谱密度,并画出频谱密度图和能量谱密度图。

(1) $f(t) = \text{Sa}(t)$

(2) $f(t) = \text{Sa}(t-2)$

(3) $f(t) = e^{-t}u(t)$

(4) $f(t) = \delta(t-1)$

分析：

频谱密度指的是信号的傅里叶变换,即

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

信号的能量

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

能量谱密度指的是能量信号的幅度频谱的模的平方,即 $|F(\omega)|^2$ 。

画出 $F(\omega)$ 与 ω 的关系即得频谱密度图, 画出 $|F(\omega)|^2$ 与 ω 的关系即得能量谱密度图。

解:

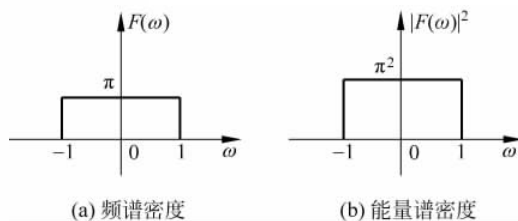
(1) 频谱密度为

$$F(\omega) = \pi[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$$

能量谱密度为

$$|F(\omega)|^2 = \pi^2[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$$

频谱密度和能量谱密度如题图 3-38(1)所示。



题图 3-38(1)

(2) $\text{Sa}(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \pi[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$$

则 $f(t) = \text{Sa}(t-2)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \pi[u(\omega+1) - u(\omega-1)]e^{-j2\omega}$$

幅度频谱密度为

$$|F(\omega)| = \pi[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$$

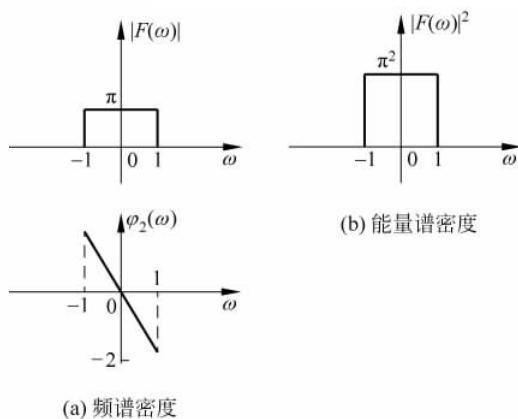
相位频谱密度为

$$\varphi(\omega) = -2\omega$$

$f(t) = \text{Sa}(t-2)$ 的能量谱密度为

$$|F(\omega)|^2 = \pi^2[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$$

频谱密度和能量谱密度如题图 3-38(2)所示。



题图 3-38(2)

(3) $f(t) = e^{-t}u(t)$ 的傅里叶变换

$$F(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} e^{-j\arctan(\omega)}$$

幅度频谱密度为

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

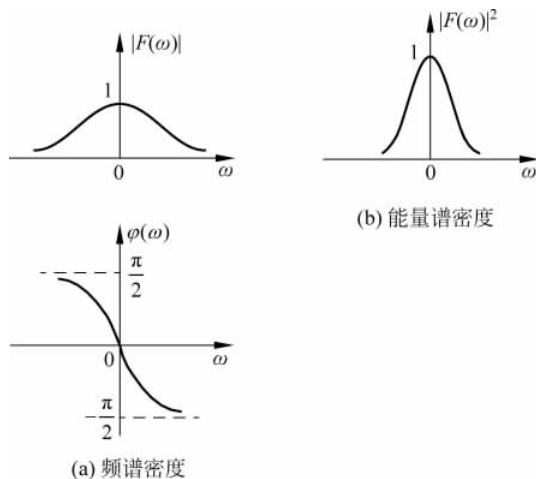
相位频谱密度为

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega)$$

其能量谱密度为

$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

频谱密度和能量谱密度如题图 3-38(3) 所示。



题图 3-38(3)

(4) $f(t) = \delta(t-1)$ 的傅里叶变换

$$F(\omega) = e^{-j\omega}$$

幅度频谱密度为

$$|F(\omega)| = 1$$

相位频谱密度为

$$\varphi(\omega) = -\omega$$

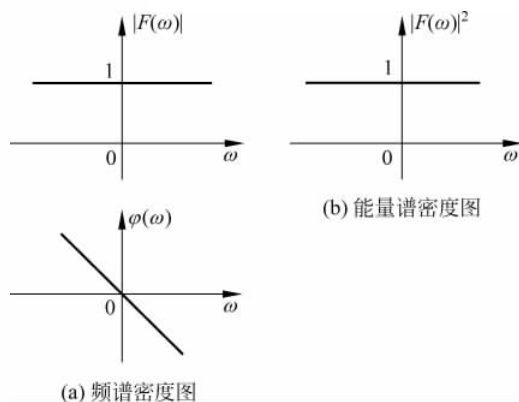
信号 $f(t) = \delta(t-1)$ 的能量谱密度为

$$|F(\omega)|^2 = 1$$

频谱密度和能量谱密度如题图 3-38(4) 所示。

题后解析：

一个连续时间信号,既可以分析其频谱密度,也可以求其功率谱密度。那么,二者的根本区别在哪里呢?



题图 3-38(4)

信号的频谱密度(傅里叶变换)只是将这个信号从“时域表示”转换成“频域表示”,是同一个信号的不同表现形式。频谱密度图描述信号的幅度频谱 $|F(\omega)|$ 与 ω 的关系以及相位频谱 $\varphi(\omega)$ 与 ω 的关系,幅度谱的量纲就是信号 $f(t)$ 的单位,假如 $f(t)$ 是电压信号,通过傅里叶变换得到信号的频率成分,这些频率成分自然还是电压信号,幅度 $|F(\omega)|$ 的量纲是[V]。

而能量谱密度是从能量的观点对信号进行研究,对于能量有限信号,能量谱密度指的是信号在每个频率分量上的能量,反映了信号能量密度在频域的分布状况。能量谱密度则是能量信号各频率成分的能量随频率的分布情况($|F(\omega)|^2 \sim \omega$),量纲是[W]。

信号的能量只与幅度谱有关,相位谱影响不了信号的能量。也就是说,能量谱密度只保留了频谱密度的幅度信息,而丢失了相位信息。所以,频谱密度不同的信号其能量谱密度有可能是相同的(第(1)、(2)小题)。

信号的频谱密度和能量谱密度的关系归根结底还是信号和能量之间的关系。

3.5.3 周期信号的傅里叶变换

【习题 3.39】 信号 $f_1(t) = u(t+1/2) - u(t-1/2)$, 求 $f_1(t)$ 的傅里叶变换, 画出其频谱密度图。如果将 $f_1(t)$ 以 $T_1=2$ 为周期进行周期延拓, 形成周期信号 $f(t)$, 求周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数和傅里叶变换, 并画出 $f(t)$ 的频谱图和频谱密度图。

分析:

这是一道典型的求解非周期信号的傅里叶变换以及求解周期信号的傅里叶级数、傅里叶变换的题。

求得单周期傅里叶变换后, 可以应用下面公式求周期信号的傅里叶级数的系数:

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_1(\omega) \big|_{\omega=n\omega_1}$$

周期信号的傅里叶变换公式

$$F_{T_1}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

信号的频谱密度图指的是傅里叶变换与频域的关系,而频谱图指的是傅里叶级数的系数与频率的关系。

解: $f_1(t)$ 的傅里叶变换

$$F_1(\omega) = \text{Sa}(\omega/2)$$

$f_1(t)$ 以 $T_1=2$ 为周期进行周期延拓形成周期信号 $f(t)$, $f(t)$ 的基本角频率为 $\omega_1=\pi$ 。

$f(t)$ 的傅里叶级数的系数为

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_1(\omega) \big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

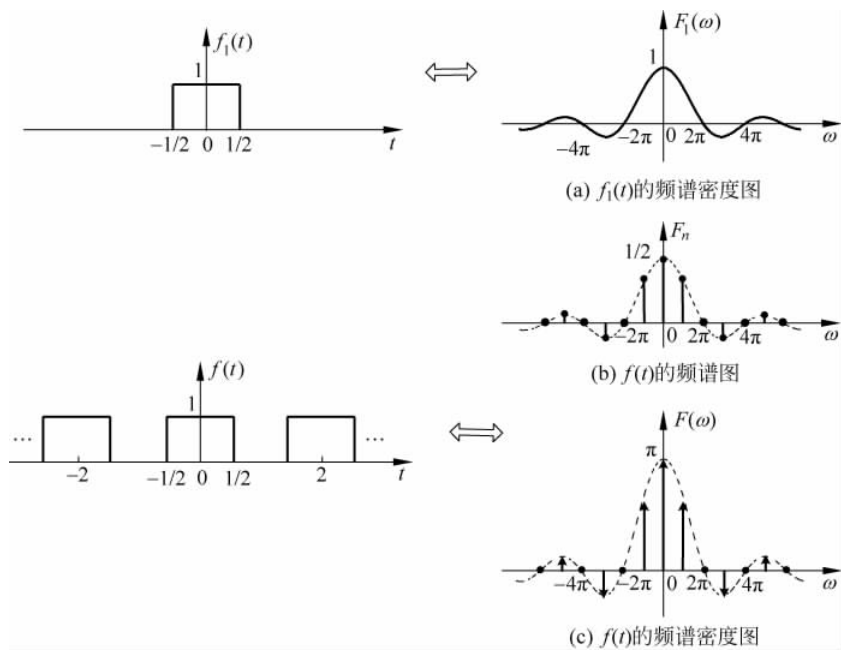
则 $f(t)$ 的指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{jn\pi t}$$

$f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta(\omega - n\pi)$$

$f_1(t)$ 的频谱密度图以及 $f(t)$ 的频谱图和频谱密度图如题图 3-39 所示 ($\omega_1=\pi$)。



题图 3-39

【习题 3.40】 信号 $f_1(t) = u(t) - u(t-2)$, 求下列各项:

- (1) 求 $f_1(t)$ 的傅里叶变换 $F_1(\omega)$ 。
- (2) 画出 $F_1(\omega)$ 的幅度频谱和相位频谱图。

(3) 若 $f_1(t)$ 以 4 为周期, 进行周期延拓, 形成一个周期信号, $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_1(t+4k)$, 求此周期信号的傅里叶级数展开式, 画出频谱图。

(4) 求 $f(t)$ 的傅里叶变换, 画出频谱密度图。

分析:

本题和[题 3.39]是一类题, 只是信号不再是门限信号, 而是非对称的矩形脉冲。因此, 相位特性将会发生变化。

解:

$$(1) \mathcal{F}[u(t+1)-u(t-1)] = 2\text{Sa}(\omega)$$

则 $f_1(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_1(\omega) = 2\text{Sa}(\omega)e^{-j\omega}$$

(2) $f_1(t)$ 的幅度频谱密度和相位频谱密度如题图 3-40(1) 所示。

(3) $T_1=4$, $f(t)$ 的基本角频率为 $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ 。

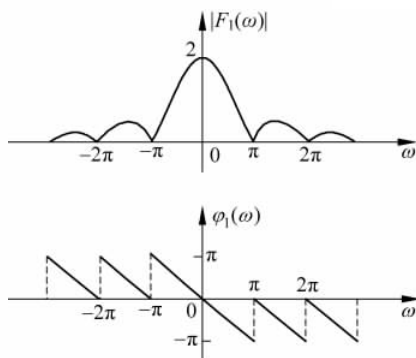
则 $f(t)$ 的傅里叶级数的系数为

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_1(\omega) \big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{1}{4} \cdot 2\text{Sa}(\omega)e^{-j\omega} \big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)e^{-j\frac{n\pi}{2}}$$

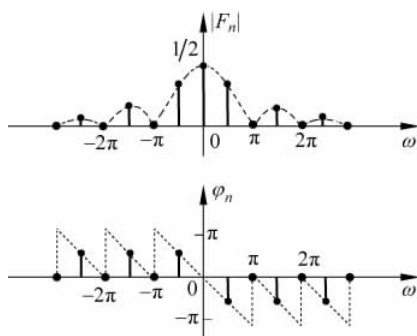
故 $f(t)$ 的指数形式的傅里叶级数为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{-j\frac{n\pi}{2}} e^{j\frac{n\pi}{2}t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{j\frac{n\pi}{2}(t-1)} \end{aligned}$$

$f(t)$ 的频谱图如题图 3-40(2) 所示。



题图 3-40(1)

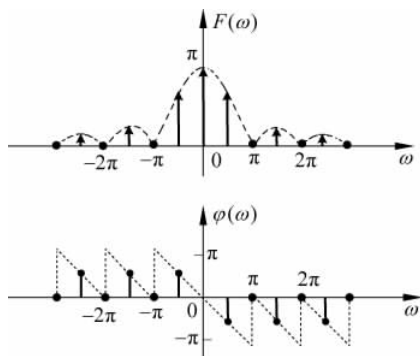


题图 3-40(2)

(4) $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{-j\frac{n\pi}{2}} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{2}\right)$$

$f(t)$ 的频谱密度图如题图 3-40(3) 所示。



题图 3-40(3)

【习题 3.41】 分析求解下列问题。

(1) $F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - n\pi)$, 画出其频谱图, 并求时间信号 $f(t)$ 。

(2) $F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta(\omega - n\pi)$, 画出其频谱图, 并求时间信号 $f(t)$ 。

(3) $F(\omega) = \delta(\omega + \pi) + \delta(\omega + 1) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 1)$, 求 $f(t)$ 。

分析:

对于周期信号, 其傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1)\right] = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$\mathcal{F}[f_{T_1}(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_1 F_1(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

解:

(1) 由傅里叶变换表达式, 可知这是一个周期性冲激信号, $\omega_1 = \pi$, 则

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2$$

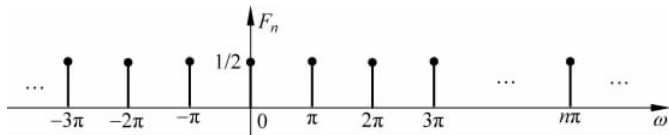
故

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2n)$$

又

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_1(\omega) \big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2}$$

其频谱图如题图 3-41(1)所示。



题图 3-41(1)

(2) 由傅里叶变换表达式, 可知这是一个周期信号, 且 $\omega_1 = \pi$ 。

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta(\omega - n\pi)$$

由 $2\pi F_n = \pi \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, 则

$$F_n = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) \Big|_{\omega=n\omega_1}$$

频谱如题图 3-41(2) 所示。

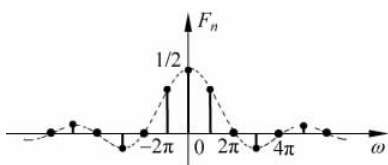
另由 $\omega_1 F_1(n\omega_1) = \pi \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, 可知主周期信号的傅里叶变换为

$$F_1(\omega) = \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

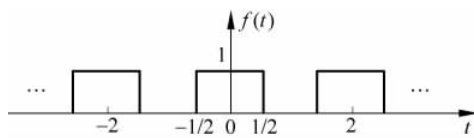
则主周期信号为矩形脉冲

$$f_1(t) = [u(t + 1/2) - u(t - 1/2)]$$

故 $f(t)$ 是一个主周期为 $f_1(t)$ 且周期为 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2$ 的周期矩形脉冲信号, 如题图 3-41(3) 所示。



题图 3-41(2)



题图 3-41(3)

(3) 因为 $F(\omega)$ 的频率成分不呈谐波关系, 因此 $f(t)$ 是非周期信号。

$$F(\omega) = [\delta(\omega + \pi) + \delta(\omega - \pi)] + [\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)]$$

则

$$f(t) = \frac{1}{\pi} [\cos \pi t + \cos t]$$

【习题 3.42】 求下列信号的傅里叶变换。

(1) $f_1(t) = \cos(\omega_0 t)$

(2) $f_2(t) = \cos(\omega_0 t) u(t)$

(3) $f_3(t) = e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t)$

解:

(1) $f_1(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} [2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) F_2(\omega) &= \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t) \cdot u(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] * \mathcal{F}[u(t)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] * \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} \delta(\omega + \omega_0) + \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{j\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) F_3(\omega) &= \mathcal{F}[e^{-at} u(t) \cdot \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[e^{-at} u(t)] * \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{a + j\omega} * [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a + j(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{a + j(\omega - \omega_0)} \right] \\
 &= \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2} \\
 &= \frac{a + j\omega}{(a^2 + \omega_0^2 - \omega^2) + j2a\omega}
 \end{aligned}$$

题后解析：

三个信号分别是余弦信号、单边余弦信号、单边衰减余弦信号。

单频余弦信号 $\cos(\omega_0 t)$ 只含有其基本角频率的频率成分，位于 ω_0 处， $-\omega_0$ 处的频率成分是由于欧拉公式数学演算的结果。

单边余弦信号因为在 $t=0$ 有跳变，因此，信号除了含有其基本角频率 $\pm\omega_0$ 的频率成分外，还有其他频率成分 $-\frac{j\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$ 。

单边衰减余弦信号，在 $t=0$ 也有跳变，随着 t 的增大振荡衰减，满足傅里叶积分收敛条件，傅里叶变换中没有出现 δ 函数。

3.5.4 杂题

【习题 3.43】 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$ 。

分析：

δ 函数是奇异函数。以普通函数对其进行数学描述的式子很多。

可以考虑用傅里叶反变换公式进行证明，当然，也可以通过某些函数取极限加以证明。

证明一：

由傅里叶反变换公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

令 $F(\omega)=1$, 则 $f(t)=\delta(t)$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[1] = 2\pi\delta(t)$$

证明二:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^{+x} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sin(xt)}{t} = 2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\pi} \text{Sa}(xt) = 2\pi\delta(t)\end{aligned}$$

得证。

【习题 3.44】 证明: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega n} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$ 。

证明:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega n} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \delta(t-n) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n) \right] dt = \mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n) \right]\end{aligned}$$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)$ 是一个周期为 $T_1 = 1$ 的冲激串, 其傅里叶变换为

$$\mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n) \right] = \omega_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_1)$$

ω_1 是周期信号 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)$ 的基本角频率, $\omega_1 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi(\text{rad/s})$, 故

$$\mathcal{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n) \right] = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega n} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

得证。

【习题 3.45】 用傅里叶变换证明 $\frac{1}{\pi t} * \left(-\frac{1}{\pi t}\right) = \delta(t)$ 。

证明:

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}$$

由对偶性, 有

$$\mathcal{F} \left[\frac{2}{jt} \right] = 2\pi \text{sgn}(-\omega) = -2\pi \text{sgn}(\omega)$$

即

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{\pi t} \right] = -j \text{sgn}(\omega)$$

则

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi t} * \left(-\frac{1}{\pi t}\right)\right] = [-j\operatorname{sgn}(\omega)] \cdot [j\operatorname{sgn}(\omega)] = [\operatorname{sgn}(\omega)]^2 = 1$$

故

$$\frac{1}{\pi t} * \left(-\frac{1}{\pi t}\right) = \delta(t)$$

得证。

题后解析：

本题的衍生题：求 $f(t) = \frac{1}{t} * \frac{1}{t}$ 。

解： $\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right] = -j\pi\operatorname{sgn}(\omega)$ ，则

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right] \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right] = [-j\pi\operatorname{sgn}(\omega)] \cdot [-j\pi\operatorname{sgn}(\omega)] = -\pi^2$$

故

$$f(t) = \frac{1}{t} * \frac{1}{t} = -\pi^2 \delta(t)$$

【习题 3.46】 用傅里叶变换证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$ 。

证明：

设 $f(t) = \frac{\sin t}{t} = \operatorname{Sa}(t)$ ，则

$$F(\omega) = \pi[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$$

又

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = F(0)$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

得证。

【习题 3.47】 证明：一个信号不可能既时限又带限。

证明：若 $f(t)$ 时限，设 $f(t) = f(t)[u(t+\tau) - u(t-\tau)]$ ，则

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * 2\tau \operatorname{Sa}(\omega\tau)$$

$F(\omega)$ 必然非带限。

若 $f(t)$ 带限，设 $F(\omega) = F(\omega)[u(\omega+\omega_c) - u(\omega-\omega_c)]$ ，则

$$f(t) = f(t) * \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{Sa}(\omega_c t)$$

$f(t)$ 必然非时限。

题后解析：

一般情况下，一个时限信号的频谱在频域都是无限带宽的，同样，一个频带有限的信号在时域是无限持续时间的。

实际上,一个信号的时宽带宽积尺度具有不变性。例如, $f(t)$ 与 $f(at)$ 的时宽带宽积是相等的。

【习题 3.48】 求信号 $f(t) = e^{-t}u(t)$ 的等效脉宽和等效带宽。

分析:

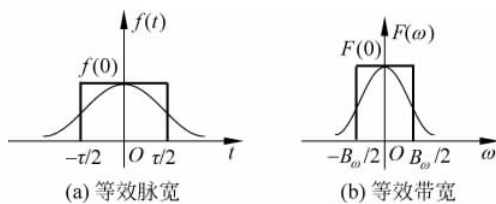
等效脉宽 τ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = f(0) \cdot \tau$$

等效带宽 B_ω 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega = F(0) \cdot B_\omega$$

等效脉宽和等效带宽见图 3-48。



题图 3-48 信号的等效脉宽和等效带宽

解: 等效脉宽

$$\tau = \frac{1}{f(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} u(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 \text{ (s)}$$

根据傅里叶正反变换公式,令 $\omega=0$,有

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

即

$$F(0) = f(0) \cdot \tau$$

由傅里叶反变换公式,令 $t=0$,有

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$$

即

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} F(0) \cdot B_\omega$$

故

$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi \text{ (rad/s)}$$

题后解析:

信号的等效带宽和等效脉宽成反比。这是信号的时域与频域具有相反关系的又一个体现。

【习题 3.49】 信号 $f(t) = e^{-t}u(t)$, 求 $f(t)$ 的 3dB 带宽。

分析:

信号的 3dB 带宽指的是幅度频谱密度等于最大值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时对应的频带宽度。

解: $f(t) = e^{-t}u(t)$, 则

$$F(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}, \quad |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

可得 $|F(0)| = 1$ 。则

$$\frac{|F(\omega)|_{\omega=\alpha}}{|F(\omega)|_{\omega=0}} = |F(\omega)|_{\omega=\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

故 $\omega = \alpha = 1$, 即 $f(t)$ 的 3dB 带宽为 1rad/s。

题后解析:

通信中的 3dB 带宽指的是幅度下降 3dB, 功率减半。即

$$20\lg \frac{|F(\omega)|_{\omega=\alpha}}{|F(\omega)|_{\omega=0}} = 20\lg \frac{1}{\sqrt{2}} = 10\lg \frac{1}{2} = -3\text{dB}$$

【习题 3.50】 白噪声的功率谱密度 $p_N(\omega) = N$, 求自相关函数。

解: 由相关定理, 得

$$R_N(\tau) = N\delta(\tau)$$

白噪声的自相关函数为冲激函数, 表明白噪声在各时刻的取值杂乱无章, 没有任何相关性。

【习题 3.51】 周期信号的傅里叶变换是冲激函数, 那么傅里叶变换是冲激的一定是周期函数吗?

答: 不一定。比如直流信号的傅里叶变换是冲激函数, 但直流信号不是周期信号。又如, 频率成分呈非谐波关系的信号也不是周期信号, 如

$$F(\omega) = \delta(\omega + \pi) + \delta(\omega + 1) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 1)$$

其时间信号为

$$f(t) = \frac{1}{\pi}(\cos\pi t + \cos t)$$

这是一个非周期信号。

【习题 3.52】 周期性频谱其对应的时域信号具有什么特征?

答: 时域周期, 频域离散(等间隔); 那么, 频域周期, 时域必离散。因此, 周期性频谱其对应的时域信号必为等间隔的离散时间信号。

例如, 周期为 T_1 的时间信号的频谱是间隔为 $\omega_1 = 2\pi/T_1$ 的离散频谱, 根据对偶性, 周期性频谱(设周期为 ω_0)所对应的时域信号必定是等间隔的离散信号(其时间间隔为 $T_0 = 2\pi/\omega_0$)。