第3章 线性系统的运动分析

系统数学模型的建立为分析系统的行为和特性提供了可能。对系统的分析，就是要揭示系统状态的运动规律和基本特性。通常对系统的分析分为定性分析和定量分析两种。在定性分析中，重点介绍对决定系统行为和特性具有重要意义的几个基本性质，包括对能控性、能观性和稳定性等的研究，这将放在第4章和第5章进行介绍。定量分析则需对系统的运动规律进行精确的研究，即要定量地确定系统由外部激励作用引起的响应。本章将讨论系统的定量分析问题，即状态方程的求解问题。

本章3.1节介绍线性定常系统状态方程的齐次解（自由解）；3.2节介绍状态转移矩阵的基本性质和求法；3.3节讨论线性定常系统在控制作用下的强制运动；3.4节介绍线性时变系统的运动分析；3.5节介绍线性系统的脉冲响应矩阵；3.6节线性连续系统离散化的实质和模型；3.7节介绍线性离散系统运动分析中的递推法和 z 变换法；3.8节讨论用MATLAB进行控制运动的分析。

3.1 线性定常系统状态方程的齐次解（自由解）

当输入向量 $\boldsymbol{u}(t)=0$ 时，称系统为自由运动。此时齐次状态方程的解（自由解）也称为系统的零输入响应。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{3.1}$$

式(3.1)中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量，$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 维系数矩阵。

若初始时刻 t_0 时的状态给定为 $\boldsymbol{x}(t)|_{t=t_0}=\boldsymbol{x}(t_0)$，则式(3.1)有唯一确定解

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0), \quad t \geqslant t_0 \tag{3.2}$$

设初始时刻 $t_0=0$，则系统的初始状态 $\boldsymbol{x}(t)|_{t=0}=\boldsymbol{x}(0)$，式(3.1)的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0), \quad t \geqslant 0 \tag{3.3}$$

式(3.1)是矩阵微分方程，它与标量微分方程一样，可以按幂级数法和拉氏变换法进行求解，下面分别加以介绍。

3.1.1 幂级数法

设方程(3.1)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 t 的向量幂级数形式，即

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t + \boldsymbol{b}_2 t^2 + \cdots + \boldsymbol{b}_k t^k + \cdots \tag{3.4}$$

其中 $\boldsymbol{b}_i(i=0,1,2,\cdots)$ 为 n 维向量。

将式(3.4)代入方程(3.1)得

$$\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 t + 3\boldsymbol{b}_3 t^2 + \cdots + k\boldsymbol{b}_k t^{k-1} + \cdots = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t + \boldsymbol{b}_2 t^2 + \cdots + \boldsymbol{b}_k t^k + \cdots) \tag{3.5}$$

既然式(3.4)是方程(3.1)的解,则式(3.5)对任意时刻 t 都成立。因此,式(3.5)两边 t 的同幂次系数应相等,有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_0 \\
\boldsymbol{b}_2 &= \frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}_0 \\
\boldsymbol{b}_3 &= \frac{1}{3}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}_0 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{b}_k &= \frac{1}{k}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_{k-1} = \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b}_0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

当 $t=0$ 时,由式(3.4)可得

$$\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{x}(0) \tag{3.7}$$

将式(3.6)和式(3.7)代入式(3.4),得齐次状态方程的解

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k t^k + \cdots\right)\boldsymbol{x}(0) \tag{3.8}$$

式(3.8)中右括号内的级数是 $n\times n$ 维矩阵指数函数,记为 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$,即

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k t^k + \cdots \tag{3.9}$$

则齐次状态方程的解可写为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) \tag{3.10}$$

若初始条件为

$$\boldsymbol{x}(t)\big|_{t=t_0} = \boldsymbol{x}(t_0)$$

可以令

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1(t-t_0) + \boldsymbol{b}_2(t-t_0)^2 + \cdots + \boldsymbol{b}_k(t-t_0)^k + \cdots$$

则可得齐次状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) \tag{3.11}$$

3.1.2 拉氏变换法

关于线性定常齐次状态方程的求解,也可以应用拉氏变换。

对式(3.1)两边取拉氏变换,有

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)$$

即

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{x}(0)$$

亦即

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)$$

从而得

$$\boldsymbol{x}(t) = L^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)$$

考虑到

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{s}\left(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{A}}{s}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{s^2}+\cdots\right)=\frac{\boldsymbol{I}}{s}+\frac{\boldsymbol{A}}{s^2}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{s^3}+\cdots$$

则

$$L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2!}+\cdots=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$$

所以

$$\boldsymbol{x}(t)=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$$

且有

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}] \tag{3.12}$$

当初始条件为

$$\boldsymbol{x}(t)\mid_{t=t_0}=\boldsymbol{x}(t_0)$$

则

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)$$

例 3.1　设系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

试求状态方程的解。

解　由已知有

$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s & 1\\ -4 & s\end{bmatrix}$$

则

$$[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}=\frac{1}{s^2+4}\begin{bmatrix}s & -1\\ 4 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{s^2+4} & -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{s^2+4}\\ 2\cdot\dfrac{2}{s^2+4} & \dfrac{s}{s^2+4}\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=L^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{s}{s^2+4} & -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{s^2+4}\\ 2\cdot\dfrac{2}{s^2+4} & \dfrac{s}{s^2+4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2t & -\dfrac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}$$

则系统状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}\cos 2t & -\dfrac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2t\\ 2\sin 2t\end{bmatrix}$$

3.2　状态转移矩阵

3.2.1　状态转移矩阵的含义

线性定常系统齐次状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$$

或
$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)$$

由解的表达式可知,系统的初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 或 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 与 $t>t_0$ 的状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 之间是一种向量变换关系,其变换矩阵就是 $n\times n$ 维矩阵指数函数 $e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$。矩阵指数函数的元素一般是时间 t 的函数,即 $e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$ 是一个 $n\times n$ 维的时变函数矩阵。随着时间的推移,不断地把初始状态变换为一系列状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$,相当于在状态空间中形成一条轨迹,起到状态转移的作用,所以又把它称为状态转移矩阵,记为 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 或 $\boldsymbol{\phi}(t-t_0)$,即

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}, \quad \text{表示 } \boldsymbol{x}(0) \text{ 到 } \boldsymbol{x}(t) \text{ 的转移矩阵}$$

或
$$\boldsymbol{\phi}(t-t_0) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}, \quad \text{表示 } \boldsymbol{x}(t_0) \text{ 到 } \boldsymbol{x}(t) \text{ 的转移矩阵}$$

从而,线性定常系统齐次状态方程的解又可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{x}(0)$$

或
$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

可见,状态方程的解实质上可归结为计算状态转移矩阵。

如图 3.1 所示,以一个二维状态向量为例,说明状态转移矩阵的几何意义。

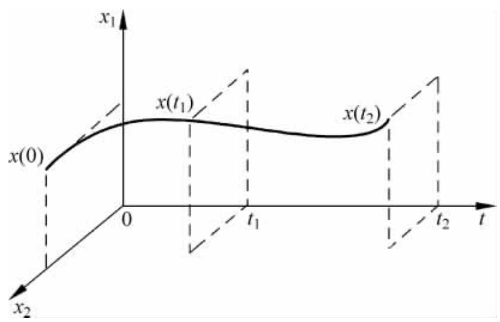

图 3.1 二维状态转移轨迹

由图 3.1 可知,在 $t=0$ 时,$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{10}\\ \boldsymbol{x}_{20}\end{bmatrix}$,以此为初始条件,且已知 $\boldsymbol{\phi}(t_1)$,则在 $t=t_1$ 时的状态将为

$$\boldsymbol{x}(t_1) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{11}\\ \boldsymbol{x}_{21}\end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}(t_1)\boldsymbol{x}(0) \tag{3.13}$$

若已知 $\boldsymbol{\phi}(t_2)$,则在 $t=t_2$ 时的状态将为

$$\boldsymbol{x}(t_2) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{12}\\ \boldsymbol{x}_{22}\end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}(t_2)\boldsymbol{x}(0) \tag{3.14}$$

即状态从 $\boldsymbol{x}(0)$ 开始,随着时间的推移,它将按 $\boldsymbol{\phi}(t_1)$ 或 $\boldsymbol{\phi}(t_2)$ 而转移到新的状态 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 或 $\boldsymbol{x}(t_2)$,从而在状态空间描绘出一条运动轨迹。

若以 t_1 作为初始时刻,则状态 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 是初始状态,从它转移到 t_2 的状态将为

$$\boldsymbol{x}(t_2) = \boldsymbol{\phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{x}(t_1)$$

用式(3.13)的 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 代入式(3.14),则得

$$\boldsymbol{x}(t_2) = \boldsymbol{\phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{\phi}(t_1)\boldsymbol{x}(0) \tag{3.15}$$

式(3.15)表示从 $\boldsymbol{x}(0)$转移到 $\boldsymbol{x}(t_1)$,再从 $\boldsymbol{x}(t_1)$转移到 $\boldsymbol{x}(t_2)$的运动轨迹。

比较式(3.14)和式(3.15),可知转移矩阵(或矩阵指数函数)有以下关系

$$\boldsymbol{\phi}(t_2-t_1)\cdot\boldsymbol{\phi}(t_1)=\boldsymbol{\phi}(t_2)$$
$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_2-t_1)}\cdot\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_1}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_2}$$

这种关系称为组合性质。

综上分析,可以从任意指定的初始时刻 t_0的状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$,求得任意时刻 t 的状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$。换言之,矩阵微分方程的解,在时间上可以任意分段求取。这是动态系统采用状态空间分析法的又一优点。因为在经典控制理论中,用高阶微分方程描述的系统,在求解时,对初始条件的处理是很困难的,一般都是假定初始时刻 $t=0$,初始条件为零,即从零初始条件出发,去计算系统的输出响应。

在状态空间分析中,把系统自由运动的一般解表示为状态转移矩阵的形式,有着重要而普遍的意义。它不仅可以表示出系统在 t_0时刻的任何状态,通过$\boldsymbol{\phi}(t-t_0)$的作用,转移到 t 时刻的状态;还可把$\boldsymbol{\phi}(t-t_0)$视为一种线性算子,将状态空间中 t_0时刻的状态,映射为解空间中 t 时刻的状态。

3.2.2　状态转移矩阵的基本性质

1. 不发生时间推移下的不变性

$$\boldsymbol{\phi}(0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}0}=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{\phi}(t-t)=\boldsymbol{I} \tag{3.16}$$

证明

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2!}+\cdots$$

令 $t=0$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}0}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\cdot 0+\frac{\boldsymbol{A}^2 0^2}{2!}+\cdots=\boldsymbol{I}$$

该性质表明:若状态向量从 t 时刻又转移到 t 时刻,即状态向量没有发生转移,显然,此时状态向量是不变的。这是状态转移矩阵所必须满足的条件。

2. 传递性(组合性)

$$\boldsymbol{\phi}(t_2-t_0)=\boldsymbol{\phi}(t_2-t_1)\boldsymbol{\phi}(t_1-t_0) \tag{3.17}$$

或

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_2-t_0)}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_2-t_1)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_1-t_0)} \tag{3.18}$$

这就是组合性质。其意义在于状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$从初始时刻 t_0先转移至 t_1,再转移至 t_2,与状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$直接从初始时刻 t_0转移至 t_2完全等效,说明一个转移过程可分为若干小的转移过程。

3. 可逆性

$$\boldsymbol{\phi}^{-1}(t)=\boldsymbol{\phi}(-t),\quad \boldsymbol{\phi}^{-1}(t-t_0)=\boldsymbol{\phi}(t_0-t) \tag{3.19}$$

或

$$(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})^{-1}=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t},\quad (\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)})^{-1}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-t)} \tag{3.20}$$

证明

$$\boldsymbol{\phi}(t-t_0)\boldsymbol{\phi}(t_0-t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}=\boldsymbol{I}$$

而

$$\boldsymbol{\phi}(t_0-t)\boldsymbol{\phi}(t-t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-t)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}=\boldsymbol{I}$$

从而式(3.19)和式(3.20)得证。

可推导出

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\phi}^{-1}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t_0-t)\boldsymbol{x}(t)$$

当 $t_0=0$ 时， $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\phi}(-t)\boldsymbol{x}(t)$

该性质表明：状态转移过程是可以逆转的，即状态转移矩阵的逆阵意味着状态向量按时间的逆向转移。利用这个性质，可由已知的 $\boldsymbol{x}(t)$，求出小于 t 时刻的初始时刻 t_0 的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)(t_0<t)$。

4. 分解性(分段转移)

$$\boldsymbol{\phi}(t_1+t_2)=\boldsymbol{\phi}(t_1)\boldsymbol{\phi}(t_2)=\boldsymbol{\phi}(t_2)\boldsymbol{\phi}(t_1) \tag{3.21}$$

证明

$$\boldsymbol{\phi}(t_1+t_2)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_1+t_2)}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_2}=\boldsymbol{\phi}(t_1)\boldsymbol{\phi}(t_2)$$

$$\boldsymbol{\phi}(t_1+t_2)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_2+t_1)}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_2}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_1}=\boldsymbol{\phi}(t_2)\boldsymbol{\phi}(t_1)$$

$$\boldsymbol{\phi}(t_1+t_2)=\boldsymbol{\phi}(t_1)\boldsymbol{\phi}(t_2)=\boldsymbol{\phi}(t_2)\boldsymbol{\phi}(t_1)$$

进一步 $\boldsymbol{\phi}(t_1+t_2)=\boldsymbol{\phi}[t_1-(-t_2)]=\boldsymbol{\phi}(t_1-0)\boldsymbol{\phi}[0-(-t_2)]$

该性质表明：从 $-t_2$ 到 t_1 的转移等于从 $-t_2$ 到 0 的转移，再从 0 到 t_1 的转移。

5. 倍时性

$$[\boldsymbol{\phi}(t)^k]=\boldsymbol{\phi}(kt) \tag{3.22}$$

证明

$$[\boldsymbol{\phi}(t)^k]=\underbrace{\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\cdots\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}}_{k\text{个}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}kt}=\boldsymbol{\phi}(kt)$$

该性质表明：状态转移矩阵的 k 次方等于该状态转移矩阵的时间自变量扩大 k 倍。

6. 微分性和交换性

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{A} \tag{3.23}$$

证明 根据定义，有

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k+\cdots$$

由于无穷级数对任意有限时间 t 均收敛，故将上式逐项对 t 求导，可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)&=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2t+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}\boldsymbol{A}^kt^{k-1}+\cdots\\&=\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}\boldsymbol{A}^{k-1}t^{k-1}+\cdots\right]\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{A}$$

该性质说明：$\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{\phi}(t)$相乘次序是可以交换的。

除以上 6 个性质之外，还有另外两个性质(针对方阵)。

(1) 对于 $n\times n$ 方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，如果满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则

$$e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t} = e^{\boldsymbol{A}t} \cdot e^{\boldsymbol{B}t} = e^{\boldsymbol{B}t} \cdot e^{\boldsymbol{A}t} \tag{3.24}$$

证明 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时

$$\begin{aligned}
e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t} &= \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 t^2 + \frac{1}{3!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^3 t^3 + \cdots \\
&= \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t + (\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{B}^2)\frac{t^2}{2!} \\
&\quad + (\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{ABA} + \boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{BA}^2 + \boldsymbol{BAB} + \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^3)\frac{t^3}{3!} + \cdots \\
&= \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t + (\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2)\frac{t^2}{2!} + (\boldsymbol{A}^3 + 3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{B}^3)\frac{t^3}{3!} + \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}t}e^{\boldsymbol{B}t} &= \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \cdots\right)\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{B}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{B}^3t^3 + \cdots\right) \\
&= \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t + \left(\frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} + \boldsymbol{AB} + \frac{\boldsymbol{B}^2}{2!}\right)t^2 + \left(\frac{\boldsymbol{A}^3}{3!} + \frac{\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}}{2!} + \frac{\boldsymbol{AB}^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{B}^3}{3!}\right)t^3 + \cdots \\
&= \boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t + (\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2)\frac{t^2}{2!} + (\boldsymbol{A}^3 + 3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{B}^3)\frac{t^3}{3!} + \cdots
\end{aligned}$$

所以

$$e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t} = e^{\boldsymbol{A}t} \cdot e^{\boldsymbol{B}t}$$

注：若 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，则 $e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}\neq e^{\boldsymbol{A}t}\cdot e^{\boldsymbol{B}t}$。

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 维方阵，t 和 s 为两个独立的自变量，则有

$$e^{\boldsymbol{A}(t+s)} = e^{\boldsymbol{A}t} \cdot e^{\boldsymbol{A}s} \tag{3.25}$$

证明 根据定义

$$\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}t} \cdot e^{\boldsymbol{A}s} &= \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \cdots\right)\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}s + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2s^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3s^3 + \cdots\right) \\
&= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}(t+s) + \boldsymbol{A}^2\left(\frac{t^2}{2!} + ts + \frac{s^2}{2!}\right) + \boldsymbol{A}^3\left(\frac{t^3}{3!} + \frac{1}{2!}t^2s + \frac{1}{2!}ts^2 + \frac{s^3}{3!}\right) + \cdots \\
&= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}(t+s) + \boldsymbol{A}^2\frac{(t+s)^2}{2!} + \boldsymbol{A}^3\frac{(t+s)^3}{3!} + \cdots \\
&= e^{\boldsymbol{A}(t+s)}\text{，得证。}
\end{aligned}$$

3.2.3 几个特殊的矩阵指数函数

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 维对角线矩阵，即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

则 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 也为 $n\times n$ 维对角线矩阵，且为

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

只要将式(3.26)的对角线矩阵 $\boldsymbol{A}$ 代入定义式,即

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2!}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda_1^2 t^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda_2^2 t^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}\lambda_n^2 t^2 \end{bmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^k t^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_2^k t^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_n^k t^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$,得证。

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 能够通过非奇异变换为对角阵,即

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$$

则

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{3.28}$$

证明

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}t} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k t^k \\ &= \boldsymbol{I}+(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})t^2+\cdots \\ &= \boldsymbol{PIP}^{-1}+(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})t+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{P\Lambda}^2\boldsymbol{P}^{-1})t^2+\cdots \\ &= \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Lambda}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{\Lambda}^2t^2+\cdots\right)\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{P}^{-1} \end{aligned}$$,得证。

（3）若 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $m\times m$ 维约当矩阵，即

$$\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i\end{bmatrix}$$

则

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_i t}=\boldsymbol{\phi}_i(t)=\mathrm{e}^{\lambda_i t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(m-1)!}t^{(m-1)}\\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(m-2)!}t^{(m-2)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} \tag{3.29}$$

一旦得到了每个约当块的矩阵指数函数，便可立即写出约当矩阵的指数函数。

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个约当矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_l\end{bmatrix} \tag{3.30}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_l$ 代表约当块，则

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1 t} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_2 t} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_l t}\end{bmatrix} \tag{3.31}$$

其中 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1 t},\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_2 t},\cdots,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_l t}$ 是由式(3.29)所表示的矩阵。

例如

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{ccc:cc}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3\end{array}\right]$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{\phi}(t)=\left[\begin{array}{ccc:cc}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & t\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2!}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & t\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_3 t}\end{array}\right]$$

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 为模态矩阵(有一对共轭复根),即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{\phi}(t)=\mathrm{e}^{\sigma t}\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix} \tag{3.32}$$

证明

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{e}^{\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}t}=\mathrm{e}^{\begin{bmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \sigma\end{bmatrix}t}\cdot\mathrm{e}^{\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}t}$$

其中

$$\mathrm{e}^{\begin{bmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \sigma\end{bmatrix}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\sigma t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\sigma t}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}t}&=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}t+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}^2 t^2+\cdots\\ &=\begin{bmatrix}1-\frac{t^2}{2!}\omega^2+\frac{t^4}{4!}\omega^4-\frac{t^6}{6!}\omega^6+\cdots & \omega t-\frac{t^3}{3!}\omega^3+\frac{t^5}{5!}\omega^5+\cdots\\ -\left(\omega t-\frac{t^3}{3!}\omega^3+\frac{t^5}{5!}\omega^5+\cdots\right) & 1-\frac{t^2}{2!}\omega^2+\frac{t^4}{4!}\omega^4-\frac{t^6}{6!}\omega^6+\cdots\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\sigma t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\sigma t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t & \mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t\\ -\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t & \mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t\end{bmatrix}\\ &=\mathrm{e}^{\sigma t}\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}\text{,得证。}\end{aligned}$$

3.2.4 状态转移矩阵的计算

前面已指出,状态方程的解实质上可归结为计算状态转移矩阵,即矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。本节介绍求解 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的几种方法,它们都有各自的特点,可运用于不同的场合。

1. 直接计算法

按照 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的定义,即式(3.9)直接计算

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k+\cdots$$

在计算中,对无穷级数必须考虑其对收敛性的要求。可以证明,对所有常数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和有限的 t 值来说,这个无穷级数都是收敛的。这种方法通常很难得到解析形式的结果,但由于计算步骤简单,程序容易编制,适合于计算机运算。

例 3.2 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$,试用直接计算法求状态转移矩阵 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

解

$$\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}t} &= \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}t+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}^2 t^2+\cdots \\
&= \begin{bmatrix}1+t-1.5t^2+\cdots & -t-0.5t^2+\cdots \\ 4t+2t^2+\cdots & 1-2t^2+\cdots\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. 拉氏变换法

按照式(3.12)计算

$$e^{\boldsymbol{A}t} = L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]$$

用该方法求解状态转移矩阵 $e^{\boldsymbol{A}t}$，关键是必须首先求出$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$。

例 3.3　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{bmatrix}$，试用拉氏变换法求状态转移矩阵 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

解　由于

$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & 0\\ -4 & s\end{bmatrix}$$

可得

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{s^2}\begin{bmatrix}s & 0\\ 4 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s} & 0\\ \dfrac{4}{s^2} & \dfrac{1}{s}\end{bmatrix}$$

因此

$$e^{\boldsymbol{A}t} = L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}] = \begin{bmatrix}1(t) & 0\\ 4t & 1(t)\end{bmatrix}$$

3. 对角线标准型与约当标准型法

1) $\boldsymbol{A}$ 特征值互异

将 $\boldsymbol{A}$ 变换为对角线标准型，即

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{P}$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 对角线化的非奇异线性变换矩阵。

那么 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 可由下式给出

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{3.33}$$

2) $\boldsymbol{A}$ 具有 n 重特征值

将 $\boldsymbol{A}$ 变换为约当标准型,即

$$\boldsymbol{PAP}^{-1}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{bmatrix}$$

其中,$\boldsymbol{P}$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 约当化的非奇异线性变换矩阵。

那么 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 可由式(3.34)给出

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2\mathrm{e}^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{(n-1)}\mathrm{e}^{\lambda t}\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} & t\mathrm{e}^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{(n-2)}\mathrm{e}^{\lambda t}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t\mathrm{e}^{\lambda t}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{3.34}$$

例 3.4 已知线性定常系统的齐次状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

求系统的状态转移矩阵 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

解 该矩阵的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3=0$$

因此,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三重特征值 $\lambda=1$。

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为标准Ⅰ型,故变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可由下式求得

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda & 1 & 0\\ \lambda^2 & 2\lambda & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}$$

注意到

$$e^{\boldsymbol{J}t}=\begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

可得系统的状态转移矩阵为

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t-te^t+\frac{1}{2}t^2e^t & te^t-t^2e^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ \frac{1}{2}t^2e^t & e^t-te^t-t^2e^t & te^t+\frac{1}{2}t^2e^t \\ te^t+\frac{1}{2}t^2e^t & -3te^t-t^2e^t & e^t+2te^t+\frac{1}{2}t^2e^t \end{bmatrix}$$

4. 化 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的有限项法(凯莱-哈密尔顿定理法)

这种方法是利用凯莱-哈密尔顿(Caley-Hamilton)定理,化 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的有限项,然后通过求待定时间函数获得 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 的方法。必须指出,这种方法相当系统,而且计算过程简单。

1) 凯莱-哈密尔顿定理

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 维方阵,其特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必满足其自身特征方程,即

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$$

故

$$\boldsymbol{A}^n=-a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}-a_{n-2}\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_1\boldsymbol{A}-a_0\boldsymbol{I}$$

它是 $\boldsymbol{A}^{n-1},\boldsymbol{A}^{n-2},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 的线性组合。

同理,
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{n+1}=\boldsymbol{A}^n\cdot\boldsymbol{A}&=-a_{n-1}\boldsymbol{A}^n-a_{n-2}\boldsymbol{A}^{n-1}-a_{n-3}\boldsymbol{A}^{n-2}-\cdots-a_1\boldsymbol{A}^2-a_0\boldsymbol{A}\\&=-a_{n-1}(-a_{n-1}A^{n-1}-a_{n-2}A^{n-2}-\cdots-a_1A-a_0I)\\&\quad-(a_{n-2}A^{n-1}+a_{n-3}A^{n-2}+\cdots+a_1A^2+a_0\boldsymbol{A})\\&=(a_{n-1}^2-a_{n-2})\boldsymbol{A}^{n-1}+(a_{n-1}a_{n-2}-a_{n-3})\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+(a_{n-1}a_1-a_0)\boldsymbol{A}+a_{n-1}a_0\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

以此类推,$\boldsymbol{A}^{n+1},\boldsymbol{A}^{n+2},\cdots$ 都可以用 $\boldsymbol{A}^{n-1},\boldsymbol{A}^{n-2},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 的线性组合来表示。

2) 化 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的有限项法

已知 $n\times n$ 维系统矩阵 $\boldsymbol{A}$,其 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 可表示为一个无穷项的幂级数,即

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k$$

由凯莱-哈密尔顿定理可知,$\boldsymbol{A}^n,\boldsymbol{A}^{n+1},\boldsymbol{A}^{n+2},\cdots$ 均可用 $\boldsymbol{A}^{n-1},\boldsymbol{A}^{n-2},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 的线性组合来表示,所以矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 的无穷级数表达式可以化为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个有限项表达式,即

$$e^{\boldsymbol{A}t}=a_0(t)\boldsymbol{I}+a_1(t)\boldsymbol{A}+a_2(t)\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_{n-1}(t)\boldsymbol{A}^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(t)\boldsymbol{A}^i \tag{3.35}$$

式中,$a_i(t)$ 是时间 t 的标量函数。

3) $a_i(t)$的计算方法

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异时,有

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

证明 根据 $\boldsymbol{A}$ 矩阵满足其自身特征方程的定理,可知特征值 λ 和 $\boldsymbol{A}$ 是可以互换的,所以 λ 也必须满足式(3.35),即

$$\begin{cases} a_0(t) + a_1(t)\lambda_1 + a_2(t)\lambda_1^2 + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} = e^{\lambda_1 t} \\ a_0(t) + a_1(t)\lambda_2 + a_2(t)\lambda_2^2 + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} = e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ a_0(t) + a_1(t)\lambda_n + a_2(t)\lambda_n^2 + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} = e^{\lambda_n t} \end{cases} \tag{3.37}$$

解方程组(3.36),即可得到式(3.37)。

(2) $\boldsymbol{A}$ 具有 n 重特征值 λ_1 时,有

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-3}(t) \\ a_{n-2}(t) \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & (n-1)\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \dfrac{(n-2)(n-3)}{2!}\lambda_1^{n-4} & \dfrac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda_1^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \cdots & (n-2)\lambda_1^{n-3} & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(n-1)!}t^{(n-1)}e^{\lambda_1 t} \\ \dfrac{1}{(n-2)!}t^{(n-2)}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{2!}t^2 e^{\lambda_1 t} \\ te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

证明 同上,有

$$a_0(t) + a_1(t)\lambda_1 + a_2(t)\lambda_1^2 + \cdots + a_{n-2}(t)\lambda_1^{n-2} + a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} = e^{\lambda_1 t}$$

上式对 λ_1 求导一次,有

$$a_1(t) + 2a_2(t)\lambda_1 + \cdots + (n-2)a_{n-2}(t)\lambda_1^{n-3} + (n-1)a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-2} = te^{\lambda_1 t}$$

上式再对 λ_1 求导一次,有

$$2a_2(t) + 6a_3(t)\lambda_2 + \cdots + (n-2)(n-3)a_{n-2}(t)\lambda_1^{n-4} + (n-1)(n-2)a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-3} = t^2 e^{\lambda_1 t}$$

重复以上步骤,经过$(n-1)$次求导后,有

$$(n-1)!a_{n-1}(t) = t^{n-1}e^{\lambda_1 t}$$

由上面的 n 个方程,对 $a_i(t)$求解,即得式(3.38)。

例 3.5　已知

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}$$

试用化 e^{At} 为 A 的有限项法计算 e^{At}。

解　由矩阵 A 的特征方程

$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$$

可得 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$

对于 $\lambda_3=2$ 有　　$e^{2t}=a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 有　　$e^t=a_0(t)+a_1(t)+a_2(t)$

因为是二重特征值，将上式对 λ_2 求导，补充一个方程

$$te^t=a_1(t)+2a_2(t)$$

从而联立求解，得

$$\begin{bmatrix}a_0(t)\\a_1(t)\\a_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}te^t\\e^t\\e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\3&2&-2\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}te^t\\e^t\\e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2te^t+e^{2t}\\3te^t+2e^t-2e^{2t}\\-te^t-e^t+e^{2t}\end{bmatrix}$$

由此得

$$\begin{aligned}e^{At}&=a_0(t)I+a_1(t)A+a_2(t)A^2\\&=\begin{bmatrix}-2te^t+e^{2t}&0&0\\0&-2te^t+e^{2t}&0\\0&0&-2te^t+e^{2t}\end{bmatrix}+(3te^t+2e^t-2e^{2t})\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}\\&\quad+(-te^t-e^t+e^{2t})\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}e^t&0&0\\0&e^t&0\\0&e^{2t}-e^t&e^{2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

5. 最小多项式

最小多项式的概念很重要，最小多项式在 $n\times n$ 维矩阵多项式的计算中起着重要作用。在后面判断多输入多输出系统的能控性和能观性时将应用到。

设系统矩阵 A 是 $n\times n$ 维矩阵，其特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

按照凯莱—哈密尔顿定理，A 必满足其自身的零化多项式，即

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0\tag{3.39}$$

然而式(3.39)不一定是 A 满足的最小阶次的零化多项式。

将矩阵 A 为其根的最小阶次多项式称为最小多项式，也就是说，定义 $n\times n$ 维矩阵 A 的最小多项式为最小阶次的多项式 $\varphi(\lambda)$，即

$$\varphi(\lambda)=\lambda^m+b_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0,\quad m\leqslant n$$

使得 $\varphi(\lambda)=0$,或者

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^m + b_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1} + \cdots + b_1\boldsymbol{A} + b_0\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0} \tag{3.40}$$

假设 λ 的多项式 $d(\lambda)$ 是伴随矩阵 $\mathrm{adj}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 的所有元素的最大公因式。可以证明,如果将 $d(\lambda)$ 的 λ 最高阶次的系数选为 1,则最小多项式 $\varphi(\lambda)$ 由下式给出

$$\varphi(\lambda) = \frac{|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|}{d(\lambda)} \tag{3.41}$$

$n\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$ 可按下列步骤求出:

(1) 根据伴随矩阵 $\mathrm{adj}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$,写出作为 λ 的因式分解多项式的 $\mathrm{adj}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 的各元素;

(2) 确定作为伴随矩阵 $\mathrm{adj}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 各元素的最大公因式 $d(\lambda)$。选取 $d(\lambda)$ 的 λ 最高阶次系数为 1。如果不存在公因式,则 $d(\lambda)=1$,此时 $\varphi(\lambda)$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$;

(3) 最小多项式 $\varphi(\lambda)$ 可由式(3.41)得到。

例 3.6 已知系统矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

试求其最小多项式。

解 特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$$(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

其伴随矩阵

$$\mathrm{adj}(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} (\lambda-1)(\lambda-2) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 3(\lambda-1) & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

则最大公因式 $d(\lambda)=\lambda-1$

故

$$\varphi(\lambda)=\frac{|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}{d(\lambda)}=\frac{(\lambda-1)^2(\lambda-2)}{\lambda-1}=\lambda^2-3\lambda+2$$

由于

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而进一步验证 $\varphi(\boldsymbol{A})=0$。

可见,$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $\varphi(\lambda)$ 阶次为 2,而其特征多项式阶次为 3,所以其最小多项式比其特征多项式低了一次。

3.2.5 由状态转移矩阵求系统矩阵

由状态转移矩阵 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 求系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的问题,是前面介绍的由系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 求状态转移矩阵 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 问题的逆问题。通常有以下几种方法求解。

（1）方法一：

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)\boldsymbol{\phi}(-t) \tag{3.42}$$

证明 由状态转移矩阵的微分性有

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi}(t)$$

所以

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)\boldsymbol{\phi}^{-1}(t)$$

由状态转移矩阵的可逆性有

$$\boldsymbol{\phi}^{-1}(t)=\boldsymbol{\phi}(-t)$$

故

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)\boldsymbol{\phi}(-t)$$

（2）方法二：

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)\big|_{t=0}=\dot{\boldsymbol{\phi}}(0) \tag{3.43}$$

证明 因为

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$$

对其求导有

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi}(t)$$

当 $t=0$ 时，有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi}(0)=\dot{\boldsymbol{\phi}}(0)$$

而

$$\boldsymbol{\phi}(0)=\boldsymbol{I}$$

故

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\phi}}(0)$$

（3）方法三：

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\{L[\boldsymbol{\phi}(t)]\}^{-1} \tag{3.44}$$

证明 因为

$$\boldsymbol{\phi}(t)=L^{-1}\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\}$$

所以

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=L[\boldsymbol{\phi}(t)]$$

即

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\{L[\boldsymbol{\phi}(t)]\}^{-1}$$

故

$$\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\{L[\boldsymbol{\phi}(t)]\}^{-1}$$

例 3.7 已知系统的状态转移矩阵，试求其系统矩阵 $\boldsymbol{A}$。

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$$

解 (方法一)由式(3.42)得

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)\boldsymbol{\phi}(-t)=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{-t} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{t} & 0\\ 0 & 2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t} & 2\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

(方法二)由式(3.43)得

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)\mid_{t=0}=\begin{bmatrix}-\mathrm{e}^{-t} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{t} & 0\\ 0 & 2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t} & 2\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

(方法三)由式(3.44)得

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=L[\boldsymbol{\phi}(t)]=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0\\ 0 & \frac{1}{(s-2)(s-1)} & \frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0\\ 0 & \frac{1}{(s-2)(s-1)} & \frac{1}{s-2}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}s+1 & 0 & 0\\ 0 & s-1 & 0\\ 0 & s-1 & s-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

3.3 线性定常系统非齐次状态方程的解

本节讨论线性定常系统在控制作用$\boldsymbol{u}(t)$下的强制运动。此时,状态方程为非齐次矩阵微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{3.45}$$

若初始时刻 $t_0=0$,系统的初始状态 $\boldsymbol{x}(t)|_{t=0}=\boldsymbol{x}(0)$时,其解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.46}$$

式中$\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

若初始时刻为 t_0,系统的初始状态 $\boldsymbol{x}(t)|_{t=t_0}=\boldsymbol{x}(t_0)$时,其解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.47}$$

式中,$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$。

显然,解 $\boldsymbol{x}(t)$由两部分组成,式(3.46)和式(3.47)右边第一项表示由初始状态引起的自由运动,第二项表示由控制激励作用引起的强制运动,加在一起,描述了系统在输入作用的激励下,从初始状态出发到时刻 t 的状态转移。

线性定常系统非齐次状态方程的解可用两种方法来求解,下面分别加以介绍。

3.3.1　积分法

将式(3.45)写成

$$\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

将上式两边左乘 $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$,得

$$\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}] = -\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x} + \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\dot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}] = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{3.48}$$

将上式在区间[0,t]内积分,则

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{x}]\mathrm{d}\tau &= \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(0)\\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

也即

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

同理,若对式(3.48)在区间[t_0,t]内积分,则可得式(3.47)。

3.3.2　拉氏变换法

对式(3.45)两边取拉氏变换,得

$$sX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s)$$

即

$$(sI-A)X(s)=x(0)+BU(s)$$

上式左乘$(sI-A)^{-1}$,得

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s) \tag{3.49}$$

由于

$$(sI-A)^{-1}=L[\phi(t)],\quad U(s)=L[u(t)]$$

而两个拉氏变换函数的积是一个卷积积分的拉氏变换,即

$$(sI-A)^{-1}BU(s)=L\left[\int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{3.50}$$

将式(3.50)代入式(3.49),取拉氏反变换 ,得

$$x(t)=\phi(t)x(0)+\int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

3.3.3 特定输入下的状态响应

在特定控制作用如脉冲函数、阶跃函数和斜坡函数的激励下,则系统解的表达式(3.46)可简化为以下公式。

1. 脉冲响应

当$u(t)=K\delta(t)$,$x(t)|_{t=0}=x(0)$时,

$$x(t)=e^{At}x(0)+e^{At}BK \tag{3.51}$$

式(3.51)中,K为与$u(t)$同维的常数列向量。

证明 将$u(t)=K\delta(t)$,$x(t)|_{t=0}=x(0)$代入式(3.46),有

$$\begin{aligned}x(t)&=\phi(t)x(0)+\int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}BK\delta(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

其中

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}BK\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=e^{A(t-0)}BK=e^{At}BK$$

所以

$$x(t)=e^{At}x(0)+e^{At}BK$$

2. 阶跃响应

若A为非奇异阵,其A^{-1}存在,当$u(t)=K\cdot 1(t)$,$x(t)|_{t=0}=x(0)$时,

$$x(t)=e^{At}x(0)+A^{-1}(e^{At}-I)BK \tag{3.52}$$

证明 由于

$$u(t)=K\cdot 1(t),\quad x(t)|_{t=0}=x(0)$$

所以

$$\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{BK}\cdot 1(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{BK}\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_0^t \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(\tau-t)}\boldsymbol{BK}\mathrm{d}(\tau-t) = [-\boldsymbol{A}^{-1}\cdot \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(\tau-t)}\cdot \boldsymbol{BK}]\big|_0^t$$
$$= -\boldsymbol{A}^{-1}\cdot[\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(t-t)} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}]\cdot\boldsymbol{BK} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} - I)\cdot\boldsymbol{BK}$$

故

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{A}^{-1}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{BK}$$

3. 斜坡响应

若 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异阵，其 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，当 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}t\cdot 1(t)$，$\boldsymbol{x}(t)|_{t=0}=\boldsymbol{x}(0)$ 时，

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + [\boldsymbol{A}^{-2}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} - \boldsymbol{I}) - \boldsymbol{A}^{-1}t]\boldsymbol{BK} \tag{3.53}$$

证明　由于

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K}t\cdot 1(t),\quad \boldsymbol{x}(t)\big|_{t=0} = \boldsymbol{x}(0)$$

所以

$$\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{BK}\tau\cdot 1(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{BK}\tau\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_0^t \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(\tau-t)}\boldsymbol{BK}\tau\mathrm{d}(\tau-t) = \int_0^t -\boldsymbol{A}^{-1}\mathrm{d}[\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(\tau-t)}]\boldsymbol{BK}\tau$$
$$= [-\boldsymbol{A}^{-1}\cdot \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(\tau-t)}\cdot\boldsymbol{BK}\tau]\big|_0^t - \int_0^t -\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(\tau-t)}\boldsymbol{BK}\mathrm{d}\tau$$
$$= -\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(\tau-t)}\cdot\boldsymbol{BK}t + \boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{A}^{-1}\cdot(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} - \boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{BK}]$$
$$= -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BK}t + \boldsymbol{A}^{-2}\cdot(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} - \boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{BK}$$
$$= [\boldsymbol{A}^{-2}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} - \boldsymbol{I}) - \boldsymbol{A}^{-1}t]\boldsymbol{BK}$$

故

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + [\boldsymbol{A}^{-2}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} - \boldsymbol{I}) - \boldsymbol{A}^{-1}t]\boldsymbol{BK}$$

例 3.8　设系统状态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

试确定该系统在输入作用 $u(t)$ 分别为单位脉冲函数、单位阶跃输入及单位斜坡函数时的状态响应。

解　在例 3.1 已得系统的状态转移矩阵为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\dfrac{1}{2}\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$$

(1) 单位脉冲响应,根据式(3.51),得系统状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0+\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{BK}=\begin{bmatrix}\cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t+\cos 2t\end{bmatrix}$$

(2) 单位阶跃响应,根据式(3.52),得系统状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}x_0+\boldsymbol{A}^{-1}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{BK}=\begin{bmatrix}\cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2t\\ 2\sin 2t\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 2t-1 & -\frac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2t\\ 2\sin 2t\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\cos 2t-1\\ 2\sin 2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4}\cos 2t-1\\ \frac{5}{2}\sin 2t\end{bmatrix}$$

(3) 单位斜坡响应,根据式(3.53),系统状态方程的解应为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0+[\boldsymbol{A}^{-2}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}-\boldsymbol{I})-\boldsymbol{A}^{-1}t]\boldsymbol{BK}$$

其中

$$[\boldsymbol{A}^{-2}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}-\boldsymbol{I})-\boldsymbol{A}^{-1}t]\boldsymbol{BK}$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}\right)^2\left(\begin{bmatrix}\cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}t\right\}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\left\{\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 2t-1 & -\frac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t-1\end{bmatrix}-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}t\right\}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\begin{bmatrix}-\cos 2t+1 & \frac{1}{2}\sin 2t\\ -2\sin 2t & -\cos 2t+1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & t\\ -4t & 0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-\cos 2t+1 & \frac{1}{2}\sin 2t-t\\ -2\sin 2t+4t & -\cos 2t+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t\\ -\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

所以系统状态方程的解为

$$x(t)=\begin{bmatrix}\cos 2t\\ 2\sin 2t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t\\ -\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2t+\frac{1}{8}\sin 2t-\frac{1}{4}t\\ 2\sin 2t-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

如果线性定常系统的输出方程为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{3.54}$$

将式(3.46)或式(3.47)代入式(3.54),可得

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{C}\int_0^t\boldsymbol{\phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{3.55}$$

或

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{C}\int_{t_0}^t\boldsymbol{\phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{3.56}$$

可见,系统的输出 $\boldsymbol{y}(t)$由三部分组成:第一部分是当输入向量等于零时,初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$或 $\boldsymbol{x}(t_0)$激励引起的,为系统的零输入响应;第二部分是当初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$或 $\boldsymbol{x}(t_0)$为零时,输入向量引起的,为系统的零状态响应;第三部分是系统的直接传输部分。当系统状态转移矩阵求出后,在不同输入向量作用下的系统响应即可求出。进而能够定量分析系统的运动性能以及通过输入向量的选取,使 $\boldsymbol{y}(t)$具有期望的特性。

3.4 线性时变系统的运动分析

如果线性系统含有随时间而变的系数,称为线性时变系统,其状态方程描述如下

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u} \tag{3.57}$$

状态空间分析法的优点之一在于它能够用于分析时变系统的运动,并且使解的表达式的形式和线性定常系统相统一。

和线性定常系统不同,时变系统状态方程的解常常不能写成解析形式,但如果矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$和$\boldsymbol{B}(t)$的所有元素在定义区间$[t_0,t_f]$上是绝对可积的,则对于每一初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$,系统状态方程的解存在并且是唯一的。

3.4.1 线性时变系统齐次状态方程的解

对于线性时变系统齐次状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}(t)\big|_{t=t_0}=\boldsymbol{x}(t_0) \tag{3.58}$$

其解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{3.59}$$

式中$\boldsymbol{\phi}(t,t_0)$是 $n\times n$ 阶非奇异方阵,它满足

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t,t_0)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0) \tag{3.60}$$

及初始条件

$$\boldsymbol{\phi}(t_0,t_0)=\boldsymbol{I} \tag{3.61}$$

证明 将式(3.59)对 t 求导,并考虑式(3.58),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)]\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

即

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$$

并且式(3.59)当$t=t_0$时,有

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

即

$$\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)=\boldsymbol{I}$$

由于式(3.59)满足方程(3.58)和初始条件,故式(3.59)是齐次状态方程(3.58)的解。这时系统输入向量为零,故为自由运动。并且从式(3.59)可知,线性时变系统齐次状态方程的解,类似于前面所述线性定常系统中的$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$,也是初始状态的转移,故$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$也称为线性时变系统的状态转移矩阵。在一般情况下,只需将$\boldsymbol{\Phi}(t)$或$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$改为$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$,则上几节关于线性定常系统所得到的大部分结论,均可推广应用于线性时变系统。

3.4.2 状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$的基本性质

1. 不可交换性

$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$满足自身的矩阵微分方程及初始条件,即

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$$
$$\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)=\boldsymbol{I}$$

见式(3.60)和式(3.61)。在这里,$\boldsymbol{A}(t)$和$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$一般是不能交换的。

2. 传递性

$$\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0) \tag{3.62}$$

证明 根据式(3.59)有

$$\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$
$$\boldsymbol{x}(t_2)=\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

而

$$\boldsymbol{x}(t_2)=\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

由于解的唯一性,故

$$\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_2,t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)$$

3. 可逆性

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t_0,t) \tag{3.63}$$

证明 把$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$右乘$\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)$,有

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t)=\boldsymbol{I}$$

把$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$左乘$\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)$,有

$$\boldsymbol{\phi}(t_0,t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)=\boldsymbol{\phi}(t_0,t_0)=\boldsymbol{I}$$

故式(3.63)成立。

4. $\phi(t,\tau)$对第二元 τ 的偏导数

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)=-\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\boldsymbol{A}(\tau) \tag{3.64}$$

证明　根据式(3.61)可得

$$\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\boldsymbol{\phi}(\tau,t)=\boldsymbol{I}$$

将上式对 τ 求导，有

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\right]\boldsymbol{\phi}(\tau,t)+\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{\phi}(\tau,t)\right]=\boldsymbol{0}$$

即

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\right]\boldsymbol{\phi}(\tau,t)+\boldsymbol{\phi}(t,\tau)[\boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{\phi}(\tau,t)]=\boldsymbol{0}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)+\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\boldsymbol{A}(\tau)=\boldsymbol{0}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{\phi}(t,\tau)=-\boldsymbol{\phi}(t,\tau)\boldsymbol{A}(\tau)$$

3.4.3　状态转移矩阵$\boldsymbol{\phi}(t,t_0)$的计算

尽管线性时变系统的状态转移矩阵$\boldsymbol{\phi}(t,t_0)$和线性定常系统的状态转移矩阵$\boldsymbol{\phi}(t-t_0)$或$\boldsymbol{\phi}(t)$在形式上和某些性质上有如此类似之处，但由于$\boldsymbol{\phi}(t,t_0)$既是时间 t 的函数，又是初始时刻 t_0的函数，所以它的计算较$\boldsymbol{\phi}(t-t_0)$困难得多。可以分为两种情况计算得到$\boldsymbol{\phi}(t,t_0)$，下面分别加以说明。

(1) 当 $A(t)$和 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 满足乘法可交换条件，即，

$$\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{A}(t) \tag{3.65}$$

则有

$$\boldsymbol{\phi}(t,t_0)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{3.66}$$

证明　如果$\boldsymbol{\phi}(t,t_0)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$，则就表明 $\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\boldsymbol{x}(t_0)$ 是齐次方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解，那么 $\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$ 必须满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=A(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{3.67}$$

将 $\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$ 展开成幂级数

$$\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2+\cdots \tag{3.68}$$

上式两边对时间取导数,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\boldsymbol{A}(t)+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2+\frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\boldsymbol{A}(t)+\cdots \tag{3.69}$$

把式(3.68)两边左乘 $\boldsymbol{A}(t)$,有

$$\boldsymbol{A}(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau+\cdots \tag{3.70}$$

比较式(3.69)和式(3.70),可以看到,要使

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\boldsymbol{A}(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

成立,其充分必要条件是

$$\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{A}(t)$$

即 $\boldsymbol{A}(t)$和 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 满足乘法可交换条件。

(2) 通常 $\boldsymbol{A}(t)$和 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 不满足乘法可交换条件,这时线性时变系统的状态转移矩阵不能写成闭合形式,只能采用级数近似法计算,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}(t,t_0)=&\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_0)\mathrm{d}\tau_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_0)\int_{t_0}^{\tau_0}\boldsymbol{A}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_0\\&+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_0)\int_{t_0}^{\tau_0}\boldsymbol{A}(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1}\boldsymbol{A}(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_0+\cdots\end{aligned} \tag{3.71}$$

证明 式(3.71)两边对时间 t 求导,有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\phi}}(t,t_0)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_0)\mathrm{d}\tau_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_0)\left[\int_{t_0}^{\tau_0}\boldsymbol{A}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\right]\mathrm{d}\tau_0+\cdots\right\}\\&=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_0)\mathrm{d}\tau_0+\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_0)\left[\int_{t_0}^{\tau_0}\boldsymbol{A}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\right]\mathrm{d}\tau_0+\cdots\\&=\boldsymbol{A}(t)\left[\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_0)\mathrm{d}\tau_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau_0)\left[\int_{t_0}^{\tau_0}\boldsymbol{A}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\right]\mathrm{d}\tau_0+\cdots\right]\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\phi}(t,t_0)\end{aligned} \tag{3.72}$$

又

$$\boldsymbol{\phi}(t_0,t_0)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}+\cdots \tag{3.73}$$

可见式(3.71)满足式(3.72)和式(3.73),所以式(3.71)是线性时变系统的状态转移矩阵。

例 3.9 已知时变系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}4t & 1\\1 & 4t\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\quad t_0=0$$

试求其状态转移矩阵$\boldsymbol{\phi}(t,0)$。

解
$$\int_{0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{t}\begin{bmatrix}4\tau & 1\\1 & 4\tau\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}2t^2 & t\\t & 2t^2\end{bmatrix}$$

由于

$$\boldsymbol{A}(t)\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}4t & 1\\ 1 & 4t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2t^2 & t\\ t & 2t^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8t^3+t & 6t^2\\ 6t^2 & 8t^3+t\end{bmatrix}$$

$$\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}2t^2 & t\\ t & 2t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4t & 1\\ 1 & 4t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8t^3+t & 6t^2\\ 6t^2 & 8t^3+t\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{A}(t)$$

满足乘法可交换条件，可按式(3.66)计算，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}(t,0)&=\exp\left[\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\boldsymbol{I}+\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2!}\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2+\cdots\\&=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2t^2 & t\\ t & 2t^2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2t^2 & t\\ t & 2t^2\end{bmatrix}^2+\cdots\\&=\begin{bmatrix}1+\frac{5}{2}t^2+2t^4+\cdots & t+2t^3+\cdots\\ t+2t^3+\cdots & 1+\frac{5}{2}t^2+2t^4+\cdots\end{bmatrix}\end{aligned}$$

例 3.10　已知时变系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 4t\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\quad t_0=0$$

试求其状态转移矩阵$\boldsymbol{\phi}(t,0)$。

解
$$\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\tau\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}0 & t\\ t & 2t^2\end{bmatrix}$$

由于

$$\boldsymbol{A}(t)\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 4t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & t\\ t & 2t^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t & 2t^2\\ 4t^2 & t+8t^3\end{bmatrix}$$

$$\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & t\\ t & 2t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 4t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t & 4t^2\\ 2t^2 & t+8t^3\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}(t)\int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\neq\int_{t_0}^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\boldsymbol{A}(t)$$

不满足乘法可交换条件，则按式(3.71)计算$\boldsymbol{\phi}(t,0)$。

$$\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\tau\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}0 & t\\ t & 2t^2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau_0)\left[\int_0^{\tau_0} \boldsymbol{A}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\right]\mathrm{d}\tau_0&=\int_0^t \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\tau_0\end{bmatrix}\left[\int_0^{\tau_0}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\tau_1\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau_1\right]\mathrm{d}\tau_0\\&=\int_0^t \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\tau_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \tau_0\\ \tau_0 & 2\tau_0^2\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau_0=\int_0^t \begin{bmatrix}\tau_0 & 2\tau_0^2\\ 4\tau_0^2 & \tau_0+8\tau_0^3\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau_0\\&=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t^2 & \frac{2}{3}t^3\\ \frac{4}{3}t^3 & \frac{1}{2}t^2+2t^4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t,0) &= \exp\left[\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \\ &= \boldsymbol{I}+\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau_0)\mathrm{d}\tau_0+\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau_0)\int_0^{\tau_0}\boldsymbol{A}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_0+\cdots \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & t\\ t & 2t^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t^2 & \frac{2}{3}t^3\\ \frac{4}{3}t^3 & \frac{1}{2}t^2+2t^4\end{bmatrix}+\cdots \\ &= \begin{bmatrix}1+\frac{1}{2}t^2+\cdots & t+\frac{2}{3}t^3+\cdots\\ t+\frac{4}{3}t^3+\cdots & 1+\frac{5}{2}t^2+2t^4+\cdots\end{bmatrix}\end{aligned}$$

3.4.4 线性时变系统非齐次状态方程的解

线性时变系统非齐次状态方程重写如下

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(t)\big|_{t=t_0}=\boldsymbol{x}(t_0) \tag{3.74}$$

其解的形式类似于线性定常系统,为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.75}$$

证明 由线性系统的叠加原理,可将线性时变系统非齐次状态方程的解 $\boldsymbol{x}(t)$分为两部分:第一部分是初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$的转移;第二部分是由控制作用激励的状态 $\boldsymbol{x}_u(t)$的转移。即

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_u(t)$$

代入式(3.74),有

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+[\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)\boldsymbol{x}_u(t)+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{x}}_u(t)]=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

即

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)[\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{x}_u(t)]+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{x}}_u(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

将式(3.60)代入式(3.75),有

$$\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)[\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{x}_u(t)]+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{x}}_u(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

即

$$\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\dot{\boldsymbol{x}}_u(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

则

$$\dot{\boldsymbol{x}}_u(t)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t,t_0)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

在(t_0,t)区间进行积分,有

$$\boldsymbol{x}_u(t)=\int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{x}_u(t_0)$$

所以

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^t \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_u(t_0)$$

$$= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_u(t_0)$$

上式取 $t=t_0$，并注意到$\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)=\boldsymbol{I}$，可知 $\boldsymbol{x}_u(t_0)=\boldsymbol{0}$，从而得到式(3.75)。

显然，如果把式(3.74)的求解公式(3.75)用于线性定常系统，只需要将$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$和$\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)$分别换成$\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$和$\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)$。从而再一次显示出定常系统是时变系统的特殊情况。另外，还可以看到，只有引入了状态转移矩阵才有可能使时变系统和定常系统的求解公式建立统一的形式。

由于计算时变系统的$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$是不容易的，所以，通常先将系统进行离散化，使得在时间增量期间，系统参数没有明显的变化。这样求解连续时变系统状态方程的问题就变成了离散状态方程的求解。

3.4.5 线性时变系统的输出

如果线性时变系统的输出方程为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u} \tag{3.76}$$

将式(3.75)代入式(3.76)，可得

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \boldsymbol{C}(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{3.77}$$

或

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\left[\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\right] + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{3.78}$$

可见，系统的输出 $\boldsymbol{y}(t)$也可以分为三部分：零输入响应、零状态响应和直接传输部分。

3.5 线性系统的脉冲响应矩阵

3.5.1 线性时变系统的脉冲响应矩阵

式(3.77)或式(3.78)给出了线性时变系统在初始状态和输入向量作用下的系统输出。若假设 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0}$，而系统的输入 $\boldsymbol{u}(t)$为单位脉冲函数，即

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{e}_i\delta(t-\tau)$$

其中，τ 是施加单位脉冲的时刻。而

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow i \text{ 位置}$$

$\boldsymbol{e}_i\delta(t-\tau)$则表示 $t=\tau$ 时刻，仅在第 i 个输入端施加一个单位脉冲。由式(3.77)可得系统的输出为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_i(t) &= \boldsymbol{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau_1)\boldsymbol{B}(\tau_1)\boldsymbol{e}_i\delta(\tau_1-\tau)\mathrm{d}\tau_1+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{e}_i\delta(t-\tau)\\ &= \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{e}_i\delta(t-\tau)\end{aligned}$$

所以有

$$\boldsymbol{h}_i(t,\tau)=\begin{cases}\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{e}_i\delta(t-\tau), & t\geqslant\tau\\ \boldsymbol{0}, & t<\tau\end{cases}$$

可见,$\boldsymbol{h}_i$ 是 m 维向量。它表示系统输出 $\boldsymbol{y}(t)$对输入 $\boldsymbol{u}(t)$的第 i 个元素在 $t=\tau$ 时刻施加单位脉冲的响应。

如果分别求出所有的 $\boldsymbol{h}_i(i=1,2,\cdots,r)$,并定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(t,\tau) &= [\boldsymbol{h}_1(t,\tau),\boldsymbol{h}_2(t,\tau),\cdots\boldsymbol{h}_r(t,\tau)]\\ &= [\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{e}_2,\cdots\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{e}_r]\\ &\quad +[\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{e}_2,\cdots\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{e}_r]\delta(t-\tau)\\ &= \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\cdots\boldsymbol{e}_r]+\boldsymbol{D}(t)[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\cdots\boldsymbol{e}_r]\delta(t-\tau)\\ &= \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)+\boldsymbol{D}(t)\delta(t-\tau)\end{aligned}$$

上式当 $t\geqslant\tau$ 时成立,而当 $t<\tau$ 时,$\boldsymbol{H}(t,\tau)=\boldsymbol{0}$。

因此

$$\boldsymbol{H}(t,\tau)=\begin{cases}\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)+\boldsymbol{D}(t)\delta(t-\tau), & t\geqslant\tau\\ \boldsymbol{0}, & t<\tau\end{cases}\tag{3.79}$$

$\boldsymbol{H}(t,\tau)$即为线性时变系统的脉冲响应矩阵。

3.5.2 线性定常系统的脉冲响应矩阵

对于线性定常系统而言,$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 均为常数阵,并且状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)=\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)$,所以可由式(3.79)直接得到线性定常系统的脉冲响应矩阵

$$\boldsymbol{H}(t-\tau)=\begin{cases}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t-\tau), & t\geqslant\tau\\ \boldsymbol{0}, & t<\tau\end{cases}\tag{3.80}$$

因为线性定常系统的脉冲响应矩阵只与$(t-\tau)$有关,与 τ 本身的大小无关。所以,为了方便起见,假定 $\tau=0$,即假定单位脉冲出现在 $\tau=0$ 时刻。则此时线性定常系统的脉冲响应矩阵为

$$\boldsymbol{H}(t)=\begin{cases}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t), & t\geqslant 0\\ \boldsymbol{0}, & t<0\end{cases}\tag{3.81}$$

3.5.3 传递矩阵与脉冲响应矩阵的关系

对式(3.81))进行拉氏变换,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(s) &= L[\boldsymbol{H}(t)]=\int_0^{\infty}\boldsymbol{H}(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t)]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\infty}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}\boldsymbol{D}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\boldsymbol{C}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\end{aligned}\tag{3.82}$$

而

$$\boldsymbol{A}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^\infty \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-st})$$
$$=-\boldsymbol{I}+s\int_0^\infty \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

上式整理，可写为

$$[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]\int_0^\infty \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\boldsymbol{I}$$

如果$[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}$存在，则

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1} \tag{3.83}$$

将式(3.83)代入式(3.82)，则得

$$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\boldsymbol{W}(s) \tag{3.84}$$

当 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$ 时，

$$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{C}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}=\boldsymbol{W}(s) \tag{3.85}$$

式(3.85)说明，线性定常系统在初始条件为零的情况下，系统的脉冲响应矩阵的拉氏变换就是系统的传递函数矩阵。这一关系与经典控制理论中脉冲响应和传递函数之间的关系是一致的。脉冲响应矩阵既可以由定义求得，也可以对传递函数矩阵进行拉氏反变换求得。

例 3.11　线性定常系统方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试求系统的脉冲响应矩阵和传递函数矩阵。

解
$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s&-1\\0&s-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&\frac{1}{s(s-2)}\\0&\frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi}(t)=L^{-1}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&\frac{1}{s(s-2)}\\0&\frac{1}{s-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1)\\0&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$$

脉冲响应矩阵为

$$\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}-1)\\0&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}+3)\\\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$$

传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{W}(s)=\boldsymbol{H}(s)=L[\boldsymbol{H}(t)]=L\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t}+3)\\\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2s-3}{s(s-2)}\\\frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$$

3.5.4 利用脉冲响应矩阵计算控制系统的输出

当系统脉冲响应矩阵已知时,可利用脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{H}(t)$求出系统在其他输入向量作用下的输出 $\boldsymbol{y}(t)$。

如果用脉冲函数表示任意输入向量 $\boldsymbol{u}(t)$,有

$$\boldsymbol{u}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{u}(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.86}$$

将式(3.86)代入式(3.56),则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{C}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\\&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{C}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{D}\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{u}(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t-\tau)]\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{H}(t-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{3.87}$$

可见,当系统的初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$和脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{H}(t-\tau)$已知时,就可以求得任意输入向量作用下的系统输出。当系统初始状态为零,即 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{0}$ 时,有

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{H}(t-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.88}$$

3.6 连续系统的离散化

3.6.1 问题的提出

在离散时间系统中,系统各部分的信号和连续系统不同,不再都是时间变量 t 的连续函数。在系统的一处或多处其信号呈脉冲序列或数码的形式。离散控制系统可以分为两种情况。

(1) 整个系统工作于单一的离散状态。对于这种系统,其状态变量全部是离散量。

(2) 系统工作在连续和离散两种状态。对于这种系统,其状态变量既有连续的模拟量又有离散量。例如采样控制系统就是属于这种情况。

对于第一种情况的系统,其状态方程可以直接根据系统输入输出关系的差分方程或脉冲传递函数写出一个一阶差分方程组;对于第二种情况的系统,其状态方程既有一阶差分方程组又有一阶微分方程组。为了能对这种系统运用离散系统的分析和设计方法,要求整个系统统一用离散状态方程描述,这就提出了连续时间系统的离散化问题。在利用计算机分析连续时间系统,或者利用计算机等离散控制装置来控制连续时间受控系统,都会遇到将一个连续时间系统化为等价的离散时间系统的问题。

线性连续系统离散化的实质,就是由系统的连续时间状态空间描述导出其对应的离散时间状态空间描述,并建立起两者系统矩阵间的关系式。

3.6.2　基本假设

为了使离散化后的描述具有简单的形式，并保证其能够复原，故引入以下几点假设。

(1) 离散按一个等采样周期 T 的采样过程处理，即采样瞬时为 $t=kT, k=0,1,2,\cdots$ 为一正整数。

采样时间间隔为 ΔT，

可近似为 $\Delta T\approx 0$。

(2) 采样周期 T 的值满足香农(Shannon)采样定理所给出的条件，即离散信号 $\boldsymbol{u}(kT)$ 可以不失真地复原为原来的连续信号 $\boldsymbol{u}(t)$ 的条件是

$$\omega_s \geqslant 2\omega_m$$

其中，ω_s——采样角频率；

ω_m——连续信号的上限角频率。

(3) 认为输入量 $\boldsymbol{u}(t)$ 只在采样时刻发生变化，在相邻两采样时刻之间，$\boldsymbol{u}(t)$ 是通过零阶保持器保持不变的，且等于前一采样时刻的值，即在 kT 和 $(k+1)T$ 之间，$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}(kT)=$ 常数。

3.6.3　线性定常系统的离散化

对于线性定常系统的状态空间描述

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}\tag{3.89}$$

在基本假设的情况下，则线性定常系统的状态空间描述可等效为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}[(k+1)T]=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(kT)\\ \boldsymbol{y}(kT)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(kT)\end{cases}\tag{3.90}$$

若省略 T，则为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)\end{cases}\tag{3.91}$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\begin{cases}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{\phi}(T)\\ \boldsymbol{H}=\int_0^T\boldsymbol{\phi}(t)\mathrm{d}t\cdot\boldsymbol{B}\end{cases}\tag{3.92}$$

而矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 与连续系统相同。

证明　输出方程是状态向量和控制向量的某种组合，离散化后，组合关系并不改变，所以 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 不变。

为了确定 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{H}$，写出式(3.89)的状态方程的解

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{3.93}$$

设 $t_0=kT, t=(k+1)T$，其间 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}(kT)=$ 常数，从而有

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T]=\boldsymbol{\phi}(T)\boldsymbol{x}(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}\boldsymbol{\phi}[(k+1)T-\tau]\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau\cdot\boldsymbol{u}(kT) \tag{3.94}$$

将式(3.94)和式(3.90)的状态方程比较,可得

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{\phi}(T)$$

$$\boldsymbol{H}=\int_{kT}^{(k+1)T}\boldsymbol{\phi}[(k+1)T-\tau]\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau \tag{3.95}$$

欲简化式(3.95),故令 $t=(k+1)T-\tau$,则 $\mathrm{d}\tau=-\mathrm{d}t$。

积分下限 $\tau=kT$ 时,相当于 $t=T$,

积分上限 $\tau=(k+1)T$ 时,相当于 $t=0$。

于是式(3.95)简化为

$$\boldsymbol{H}=\int_{T}^{0}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{B}\mathrm{d}(-t)=\int_{0}^{T}\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{B}\mathrm{d}t=\int_{0}^{T}\boldsymbol{\phi}(t)\mathrm{d}t\cdot\boldsymbol{B}$$

3.6.4 近似离散化

当采样周期 T 较小时,一般当其为系统最小时间常数的 1/10 左右时,离散化的状态方程可近似表示为

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T]=(T\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}(kT)+T\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(kT) \tag{3.96}$$

也即

$$\boldsymbol{G}\approx T\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I} \tag{3.97}$$

$$\boldsymbol{H}\approx T\boldsymbol{B} \tag{3.98}$$

证明 根据导数的定义

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{x}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{x}(t_0)}{\Delta t}$$

现研究设 $t_0=kT\sim t=(k+1)T$ 这一段的导数,有

$$\dot{\boldsymbol{x}}(kT)=\lim_{T\to 0}\frac{\boldsymbol{x}[(k+1)T]-\boldsymbol{x}(kT)}{T}\approx\frac{\boldsymbol{x}[(k+1)T]-\boldsymbol{x}(kT)}{T}$$

将上式代入$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$中,有

$$\frac{\boldsymbol{x}[(k+1)T]-\boldsymbol{x}(kT)}{T}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(kT)$$

整理即得式(3.96)。

例 3.12 线性定常系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$

试建立其离散化模型。

解 (1) 按式(3.92)计算,

由例 3.1 已经求出

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\begin{bmatrix}\cos 2t & -\dfrac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{\phi}(T)=\begin{bmatrix}\cos 2T & -\frac{1}{2}\sin 2T\\ 2\sin 2T & \cos 2T\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=\int_0^T\boldsymbol{\phi}(T)\mathrm{d}t\cdot\boldsymbol{B}=\left\{\int_0^T\begin{bmatrix}\cos 2t & -\frac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}\mathrm{d}t\right\}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sin 2T & \frac{1}{4}\cos 2T-\frac{1}{4}\\ -\cos 2T-1 & \frac{1}{2}\sin 2T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\cos 2T-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\sin 2T\end{bmatrix}$$

(2) 按式(3.97)和式(3.98)近似计算，

$$\boldsymbol{G}\approx T\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & -T\\ 4T & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}\approx T\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\T\end{bmatrix}$$

(3) 按以上两种方法得到在不同采样周期 T 时的结果列于表 3.1。从表 3.1 中结果可见，当 $T=0.05\mathrm{s}$ 时，两者非常接近。

表 3.1 两种方法结果比较

	G		**H**	
	$\begin{bmatrix}\cos 2T & -\frac{1}{2}\sin 2T\\ 2\sin 2T & \cos 2T\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & -T\\ 4T & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\cos 2T-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\sin 2T\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\ T\end{bmatrix}$
$T=1$	$\begin{bmatrix}-0.4161 & -0.4546\\ 0.819 & -0.4161\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.354\\ 0.4546\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$
$T=0.5$	$\begin{bmatrix}0.5403 & -0.4207\\ 1.683 & 0.5403\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ 2 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.1149\\ 0.4207\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\ 0.5\end{bmatrix}$
$T=0.05$	$\begin{bmatrix}0.9950 & -0.0499\\ 0.1997 & 0.9950\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & -0.05\\ 0.2 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0.0012\\ 0.0499\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\ 0.05\end{bmatrix}$

3.6.5 线性时变系统的离散化

对于线性时变系统的状态空间描述

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t)\end{cases}\tag{3.99}$$

在基本假设的情况下，则线性定常系统的状态空间描述可等效为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}[(k+1)T]=\boldsymbol{G}(kT)\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{H}(kT)\boldsymbol{u}(kT)\\ \boldsymbol{y}(kT)=\boldsymbol{C}(kT)\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{D}(kT)\boldsymbol{u}(kT)\end{cases}\tag{3.100}$$

或省略 T，可写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(k) \end{cases} \tag{3.101}$$

采用与线性定常系统类似的证明方法，可以得到

$$\boldsymbol{G}(kT) = \boldsymbol{\Phi}[(k+1)T, kT] \tag{3.102}$$

$$\boldsymbol{H}(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} \boldsymbol{\Phi}[(k+1)T, \tau]\boldsymbol{B}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.103}$$

$$\boldsymbol{C}(kT) = \boldsymbol{C}(t)\mid_{t=kT} \tag{3.104}$$

$$\boldsymbol{D}(kT) = \boldsymbol{D}(t)\mid_{t=kT} \tag{3.105}$$

则线性时变系统离散化的状态方程的解为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}[(k+1)T] =& \boldsymbol{\Phi}[(k+1)T, kT]\boldsymbol{x}(kT) \\ &+ \int_{kT}^{(k+1)T} \boldsymbol{\Phi}[(k+1)T, \tau]\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{3.106}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}[(k+1)T, kT]$表示$\boldsymbol{\Phi}[t, t_0]$在$(k+1)T \leqslant t \leqslant kT$区间内的状态转移矩阵，可以对它在$t_0 = kT$附近进行泰勒级数展开并作近似计算，有

$$\boldsymbol{\Phi}[(k+1)T, kT] = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}(kT)T + \frac{1}{2!}[\boldsymbol{A}^2(kT) + \dot{\boldsymbol{A}}(kT)]T^2 \tag{3.107}$$

当采样周期T较小时，仿照线性定常系统，可得线性时变系统离散化的状态方程近似表示形式

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T] = [T\boldsymbol{A}(kT) + \boldsymbol{I}]\boldsymbol{x}(kT) + T\boldsymbol{B}(kT)\boldsymbol{u}(kT) \tag{3.108}$$

也即

$$\boldsymbol{G}(kT) \approx T\boldsymbol{A}(kT) + \boldsymbol{I} \tag{3.109}$$

$$\boldsymbol{H}(kT) \approx T\boldsymbol{B}(kT) \tag{3.110}$$

3.7 线性离散系统的运动分析

从数学角度，线性离散系统的运动分析，可归结为对线性矩阵差分方程

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{3.111}$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots$$

进行求解。这种求解过程，比之连续系统的状态方程的求解，无疑要简单得多。离散时间系统状态方程的求解有两种：递推法和z变换法。递推法对于定常离散系统和时变离散系统都是适用的，而z变换法则只能用于求解定常离散系统。

3.7.1 线性定常离散系统方程的解

当系统为线性定常离散系统时，其运动方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{cases}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}(0) \tag{3.112}$$

其中$\boldsymbol{x}(k)$为n维状态向量，$\boldsymbol{u}(k)$为r维输入向量，$\boldsymbol{y}(k)$为m维输出向量，$k=0,1,2,\cdots$。可以采用递推法和z变换法进行求解，下面分别介绍。

1. 递推法

设初始时刻为 $t_0=0$，初始状态为 $\boldsymbol{x}(0)$。假定系统方程的解存在且唯一，要用递推法对式(3.112)中状态方程求解，则依次令其 $k=0,1,2,\cdots$，从而有

$$
\begin{aligned}
&k=0, && \boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(0)\\
&k=1, && \boldsymbol{x}(2)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(1)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(1)=\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(0)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(1)\\
&k=2, && \boldsymbol{x}(3)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(2)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(2)=\boldsymbol{G}^3\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(0)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(1)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(2)\\
&\ \vdots && \ \vdots\\
&k=k-1, && \boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k-1)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k-1)=\boldsymbol{G}^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{G}^{k-j-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(j)
\end{aligned}
$$

于是线性定常离散系统状态方程的递推求解公式即为

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{G}^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{G}^{k-j-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(j) \tag{3.113}$$

或

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{G}^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{G}^{j}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k-j-1) \tag{3.114}$$

几点说明如下。

(1) 线性定常离散系统状态方程的求解公式和线性定常连续系统状态方程的求解公式在形式上是类似的，它也由两部分响应组成。第一部分 $\boldsymbol{G}^k\boldsymbol{x}(0)$是由初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$所引起的响应，即由初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$转移而来；而第二部分则是由输入的各次采样信号所引起的响应，即由控制作用激励的状态转移。所不同的是离散状态方程的解是状态空间的一条离散轨迹。

(2) 在由输入引起的响应中，第 k 个时刻的状态，只取决于此采样时刻以前的输入采样值，而与该时刻的输入采样值无关。

(3) 式(3.113)和式(3.114)是按初始时刻 $k=0$ 得到的，若初始时刻由 $k=h$ 开始，且相应的初始状态为 $\boldsymbol{x}(h)$，则其解为

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{G}^{k-h}\boldsymbol{x}(h)+\sum_{j=h}^{k-1}\boldsymbol{G}^{k-j-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(j) \tag{3.115}$$

或

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{G}^{k-h}\boldsymbol{x}(h)+\sum_{j=h}^{k-1}\boldsymbol{G}^{j}\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k-j-1) \tag{3.116}$$

(4) $\boldsymbol{G}^k$ 或 $\boldsymbol{G}^{k-h}$ 相当于连续系统中的$\boldsymbol{\phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$或$\boldsymbol{\phi}(t-t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$，称为线性定常离散系统的状态转移矩阵，记为

$$\boldsymbol{\phi}(k)=\boldsymbol{G}^k \tag{3.117}$$

或

$$\boldsymbol{\phi}(k-h)=\boldsymbol{G}^{k-h} \tag{3.118}$$

利用状态转移矩阵$\boldsymbol{\phi}(k)$可将求解公式(3.113)和(3.114)改写为

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\phi}(k)\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\phi}(k-j-1)\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(j) \tag{3.119}$$

或

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\phi}(k)\boldsymbol{x}(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\phi}(j)\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k-j-1) \tag{3.120}$$

(5) 状态转移矩阵的性质如下。

① 满足自身的矩阵差分方程及初始条件,即

$$\boldsymbol{\phi}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{\phi}(k),\quad \boldsymbol{\phi}(0)=\boldsymbol{I} \tag{3.121}$$

② 传递性,

$$\boldsymbol{\phi}(k_2)=\boldsymbol{\phi}(k_2-k_1)\boldsymbol{\phi}(k_1) \tag{3.122}$$

③ 可逆性,

$$\boldsymbol{\phi}^{-1}(k)=\boldsymbol{\phi}(-k) \tag{3.123}$$

(6) 系统的输出。有了 $\boldsymbol{x}(k)$的表达式(3.119),将其代入系统的输出方程,即可求出系统的输出

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\phi}(k)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{C}\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\phi}(k-j-1)\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(j)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \tag{3.124}$$

可见,系统的输出 $\boldsymbol{y}(k)$由三部分组成:第一部分是系统的零输入响应;第二部分是系统的零状态响应;第三部分系统的直接传输部分。

2. z 变换法

用 z 变换法对线性定常离散系统状态方程进行求解,则对其状态方程

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k),\quad \boldsymbol{x}(t)\big|_{t=0}=\boldsymbol{x}(0)$$

两边进行 z 变换,有

$$z\boldsymbol{X}(z)-z\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}(z)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}(z)$$

移项整理得

$$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})\boldsymbol{X}(z)=z\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}(z)$$

上式两边左乘$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}$,有

$$\boldsymbol{X}(z)=(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}z\boldsymbol{x}(0)+(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}(z)$$

对上式两边取 z 反变换,得

$$\boldsymbol{x}(k)=Z^{-1}[(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}z]\boldsymbol{x}(0)+Z^{-1}[(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}(z)] \tag{3.125}$$

比较式(3.119)和式(3.125),虽然二者形式不同,但实际上却是完全一样的,即有

$$\boldsymbol{\phi}(k)=\boldsymbol{G}^k=Z^{-1}[(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}z] \tag{3.126}$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\phi}(k-j-1)\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(j)=Z^{-1}[(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}(z)] \tag{3.127}$$

两种方法比较:

(1) 递推法既适用于线性定常离散系统也适用于线性时变离散系统,而 z 变换法则只能用于线性定常离散系统;

(2) 用递推法求得的解是序列形式,而用 z 变换法求得的解是封闭形式,在用计算机进行计算时,递推法十分方便。

例 3.13 线性定常离散系统状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -0.4 & 0.3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(k)$$

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\quad u(k)=1$$

试求 $\boldsymbol{x}(k)$。

解 $(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}=\begin{bmatrix}z & 1\\0.4 & z-0.3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{z-0.3}{(z-0.8)(z+0.5)} & \dfrac{-1}{(z-0.8)(z+0.5)}\\ \dfrac{-0.4}{(z-0.8)(z+0.5)} & \dfrac{z}{(z-0.8)(z+0.5)}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{5/13}{z-0.8}+\dfrac{8/13}{z+0.5} & -\dfrac{10/13}{z-0.8}+\dfrac{10/13}{z+0.5}\\ -\dfrac{4/13}{z-0.8}+\dfrac{4/13}{z+0.5} & \dfrac{8/13}{z-0.8}+\dfrac{5/13}{z+0.5}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi}(k)=\boldsymbol{G}^k=Z^{-1}[(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}z]=\begin{bmatrix}\dfrac{5}{13}(0.8)^k+\dfrac{8}{13}(-0.5)^k & -\dfrac{10}{13}(0.8)^k+\dfrac{10}{13}(-0.5)^k\\ -\dfrac{4}{13}(0.8)^k+\dfrac{4}{13}(-0.5)^k & \dfrac{8}{13}(0.8)^k+\dfrac{5}{13}(-0.5)^k\end{bmatrix}$$

又

$$U(z)=\frac{z}{z-1}$$

则

$$z\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}U(z)=\begin{bmatrix}z\\-z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{z}{z-1}\\ \dfrac{z}{z-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{z^2}{z-1}\\ \dfrac{-z^2+2z}{z-1}\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{X}(z)=(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}[z\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{H}U(z)]=\begin{bmatrix}\dfrac{(z^2+0.7z-2)z}{(z-0.8)(z+0.5)(z-1)}\\ \dfrac{(-z^2+1.6z)z}{(z-0.8)(z+0.5)(z-1)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{3.08z}{z-0.8}-\dfrac{1.08z}{z+0.5}-\dfrac{z}{z-1}\\ -\dfrac{2.46z}{z-0.8}-\dfrac{0.538z}{z+0.5}+\dfrac{2z}{z-1}\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{x}(k)=Z^{-1}[\boldsymbol{X}(z)]=\begin{bmatrix}3.08\times0.8^k-1.08\times(-0.5)^k-1\\ -2.46\times0.8^k-0.538\times(-0.5)^k+2\end{bmatrix}$$

3.7.2 线性时变离散系统状态方程的解

线性时变离散系统的运动方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(k)\end{cases}$$

设初始时刻为 k_0,初始状态为 $\boldsymbol{x}(k_0)$。假定系统的解存在且唯一,则状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\phi}(k,k_0)\boldsymbol{x}(k_0)+\sum_{j=k_0}^{k-1}\boldsymbol{\phi}(k,j+1)\boldsymbol{H}(j)\boldsymbol{u}(j)\tag{3.128}$$

证明 用递推法进行证明。

$$k=k_0,\quad \boldsymbol{x}(k_0+1)=\boldsymbol{G}(k_0)\boldsymbol{x}(k_0)+\boldsymbol{H}(k_0)\boldsymbol{u}(k_0)$$

$$\begin{aligned}k=k_0+1,\quad \boldsymbol{x}(k_0+2)&=\boldsymbol{G}(k_0+1)\boldsymbol{x}(k_0+1)+\boldsymbol{H}(k_0+1)\boldsymbol{u}(k_0+1)\\&=\boldsymbol{G}(k_0+1)\boldsymbol{G}(k_0)\boldsymbol{x}(k_0)+\boldsymbol{G}(k_0+1)\boldsymbol{H}(k_0)\boldsymbol{u}(k_0)\\&\quad+\boldsymbol{H}(k_0+1)\boldsymbol{u}(k_0+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k=k_0+2,\quad \boldsymbol{x}(k_0+3)&=\boldsymbol{G}(k_0+2)\boldsymbol{x}(k_0+2)+\boldsymbol{H}(k_0+2)\boldsymbol{u}(k_0+2)\\&=\boldsymbol{G}(k_0+2)\boldsymbol{G}(k_0+1)\boldsymbol{G}(k_0)\boldsymbol{x}(k_0)\\&\quad+\boldsymbol{G}(k_0+2)\boldsymbol{G}(k_0+1)\boldsymbol{H}(k_0)\boldsymbol{u}(k_0)\\&\quad+\boldsymbol{G}(k_0+2)\boldsymbol{H}(k_0+1)\boldsymbol{u}(k_0+1)+\boldsymbol{H}(k_0+2)\boldsymbol{u}(k_0+2)\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}k-1=k_0+(k-k_0-1),\quad \boldsymbol{x}(k)&=\boldsymbol{G}(k-1)\boldsymbol{x}(k-1)+\boldsymbol{H}(k-1)\boldsymbol{u}(k-1)\\&=\boldsymbol{G}(k-1)\boldsymbol{G}(k-2)\cdots\boldsymbol{G}(k_0+1)\boldsymbol{G}(k_0)\boldsymbol{x}(k_0)\\&\quad+\sum_{j=k_0}^{k-1}\boldsymbol{G}(k-1)\boldsymbol{G}(k-2)\cdots\boldsymbol{G}(j+1)\boldsymbol{H}(j)\boldsymbol{u}(j)\end{aligned}$$

若令

$$\boldsymbol{\phi}(k,k_0)=\boldsymbol{G}(k-1)\boldsymbol{G}(k-2)\cdots\boldsymbol{G}(k_0+1)\boldsymbol{G}(k_0)\tag{3.129}$$

则

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\phi}(k,k_0)\boldsymbol{x}(k_0)+\sum_{j=k_0}^{k-1}\boldsymbol{\phi}(k,j+1)\boldsymbol{H}(j)\boldsymbol{u}(j)\quad 得证$$

其中$\boldsymbol{\phi}(k,k_0)$称为状态转移矩阵。它满足如下矩阵差分方程及初始条件,即

$$\boldsymbol{\phi}(k+1,k_0)=\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{\phi}(k,k_0),\quad \boldsymbol{\phi}(k_0,k_0)=\boldsymbol{I}\tag{3.130}$$

由式(3.128)可知,线性时变离散系统其状态方程的解也包括两项,即由初始状态所引起的零输入响应和由输入的各次采样信号所引起的零状态响应。

有了$\boldsymbol{x}(k)$的表达式,将其代入系统的输出方程,求系统的输出为

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{\phi}(k,k_0)\boldsymbol{x}(k_0)+\boldsymbol{C}(k)\sum_{j=k_0}^{k-1}\boldsymbol{\phi}(k,j+1)\boldsymbol{H}(j)\boldsymbol{u}(j)+\boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(k)\tag{3.131}$$

可见,系统的输出$\boldsymbol{y}(k)$也是由系统的零输入响应、零状态响应和直接传输三部分组成。

3.8 基于 MATLAB 的运动分析

3.8.1 基于 MATLAB 的线性定常系统的运动分析

用 MATLAB 可以很方便地求解线性定常系统的各种时间响应:单位脉冲响应、零输入响应和在给定输入作用下的零状态响应等。

MATLAB 求系统时间域的响应有许多命令,下面列出一些常用命令的格式和功能。

(1) 格式:expm(a * t)。

功能:求系统在 t 时刻状态转移矩阵。

(2) 格式:impulse(sys)。

功能:绘制系统输出的单位脉冲响应曲线。

格式：[y,t,x]=impulse(sys,iu)。

功能：只对第 iu 个输入，计算系统所有状态和输出的单位脉冲响应。

说明：当为单输入单输出系统时用[y,t,x]=impulse(sys)命令即可。

(3) 格式：step(sys)。

功能：绘制系统输出的单位阶跃响应曲线。

格式：[y,t,x]=step(sys,iu)。

功能：只对第 iu 个输入，计算系统所有状态和输出的单位阶跃响应。

说明：当为单输入单输出系统时用[y,t,x]=step(sys)命令即可。

(4) 格式：initial(sys,x0)。

功能：绘制初始状态为 x0 时系统输出的零输入响应曲线。

格式：[y,t,x]= initial(sys,x0)。

功能：计算初始状态为 x0 时系统所有状态和输出的零输入响应。

(5) 格式：lsim(sys,u,t)。

功能：绘制在任意输入 u 时系统输出的零状态响应曲线。

格式：[y,t,x]=lsim(sys,u,t)。

功能：计算在任意输入 u 时系统所有状态和输出的零状态响应。

例 3.14　用 MATLAB 分别演算例 3.2、例 3.4 和例 3.5。

解　(1) 直接计算法(例 3.2)，在 MATLAB 中执行以下命令

```
A = [1, - 1;4,0];                      % 输入系统矩阵
syms t;                                % 定义变量
eat1 = expm(A * t)                     % 求状态转移矩阵
```

运行结果为

```
eat1 =
[(15 ^(1/2) * exp(t/2 - (15 ^(1/2) * t * i)/2) * (t/2 - (15 ^(1/2) * t * i)/2) * i)/(15 * t) - (15 ^
(1/2) * exp(t/2 + (15 ^(1/2) * t * i)/2) * (t/2 + (15 ^(1/2) * t * i)/2) * i)/(15 * t), - (15 ^(1/
2) * exp(t/2 - (15 ^(1/2) * t * i)/2) * (15 ^(1/2) * i + 1) * (t/2 - (15 ^(1/2) * t * i)/2) * i)/(120 *
t) - (15 ^(1/2) * exp(t/2 + (15 ^(1/2) * t * i)/2) * (15 ^(1/2) * i - 1) * (t/2 + (15 ^(1/2) * t *
i)/2) * i)/(120 * t)]
[(15 ^(1/2) * exp(t/2 - (15 ^(1/2) * t * i)/2) * 4 * i)/15 - (15 ^(1/2) * exp(t/2 + (15 ^(1/2) * t *
i)/2) * 4 * i)/15, - (15 ^(1/2) * exp(t/2 - (15 ^(1/2) * t * i)/2) * (15 ^(1/2) * i + 1) * i)/30 -
(15 ^(1/2) * exp(t/2 + (15 ^(1/2) * t * i)/2) * (15 ^(1/2) * i - 1) * i)/30]
```

说明：其运行结果虽然与例 3.2 在表达形式上不同，但经过推算，均可写成封闭形式为

```
[cos(2 * t), - 1/2 * sin(2 * t)]
[2 * sin(2 * t),cos(2 * t)]
```

(2) 拉氏变换法(例 3.4)，在 MATLAB 中执行以下命令。

```
A = [0,1,0; 0,0,1; 1, - 3,3];          % 输入系统矩阵
syms s;
sys =  inv(s * eye(size(A)) - A)       % 求预解矩阵
eat2 = ilaplace(sys)                   % 求拉氏反变换
```

运行结果为

```
sys =
```

```
[(s^2-3*s+3)/(s^3-3*s^2+3*s-1),  (s-3)/(s^3-3*s^2+3*s-1),  1/(s^3-3*s^2+3*s-1)]
[  1/(s^3-3*s^2+3*s-1),  s*(s-3)/(s^3-3*s^2+3*s-1),  s/(s^3-3*s^2+3*s-1)]
[  s/(s^3-3*s^2+3*s-1),  -(3*s-1)/(s^3-3*s^2+3*s-1),  s^2/(s^3-3*s^2+3*s-1)]
eat2 =
[  (-t+1+1/2*t^2)*exp(t),   -(-t+t^2)*exp(t),  1/2*t^2*exp(t)]
[          1/2*t^2*exp(t),  (-t+1-t^2)*exp(t),  1/2*(t^2+2*t)*exp(t)]
[   1/2*(t^2+2*t)*exp(t),   -(3*t+t^2)*exp(t),  (1+2*t+1/2*t^2)*exp(t)]
```

(3) 非奇异变换法——计算特征值及特征向量矩阵(例 3.5),在 MATLAB 中执行以下命令。

```
A=[1,0,0; 0,1,0; 0,1,2];              %输入系统矩阵
syms t;
[P,D]=eig(A);          % 求特征值和特征向量(P为特征向量构成的矩阵,D为特征值构成的矩阵)
Q=inv(P);                             %求变换阵的逆阵
eat3=P*expm(D*t)*Q
```

运行结果为

```
eat3 =
[        exp(t),                 0,                0]
[             0,            exp(t),                0]
[             0,   exp(2*t)-exp(t),         exp(2*t)]
```

例 3.15 设系统状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & -1\\4 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t), \quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$$

试确定该系统在输入作用 $u(t)$ 为单位阶跃输入时的状态响应和输出响应,并绘制响应曲线。

解 在 MATLAB 中执行以下命令。

```
a=[0 -1; 4 0]; b=[0; 1];              %输入系统矩阵A
c=[1 0]; d=0;
G=ss(a,b,c,d);                        %建立状态空间描述的系统模型
x0=[1; 0];                            %初始状态
syms s t;
G0=inv(s*eye(size(a))-a);             %求零输入响应x1
x1=ilaplace(G0)*x0
G1=inv(s*eye(size(a))-a)*b;           %求零状态响应x2
x2=ilaplace(G1/s)
x=x1+x2                               %系统的状态响应x
y=c*x                                 %系统的输出响应y
for I=1: 61;                          %计算在各时间点状态值xt和输出值yt
tt=0.1*(I-1);
xt(: ,I)=subs(x(: ),'t',tt);
yt(I)=subs(y,'t',tt);
end;
plot(0: 60,[xt; yt]);                 %绘制响应曲线
```

运行结果为

```
x1 =
```

```
   cos(2 * t)
 2 * sin(2 * t)
x2 =
 1/4 * cos(2 * t) - 1/4
     1/2 * sin(2 * t)
x =
 5/4 * cos(2 * t) - 1/4
     5/2 * sin(2 * t)
y =
5/4 * cos(2 * t) - 1/4
```

系统状态响应和输出响应如图 3.2 所示。

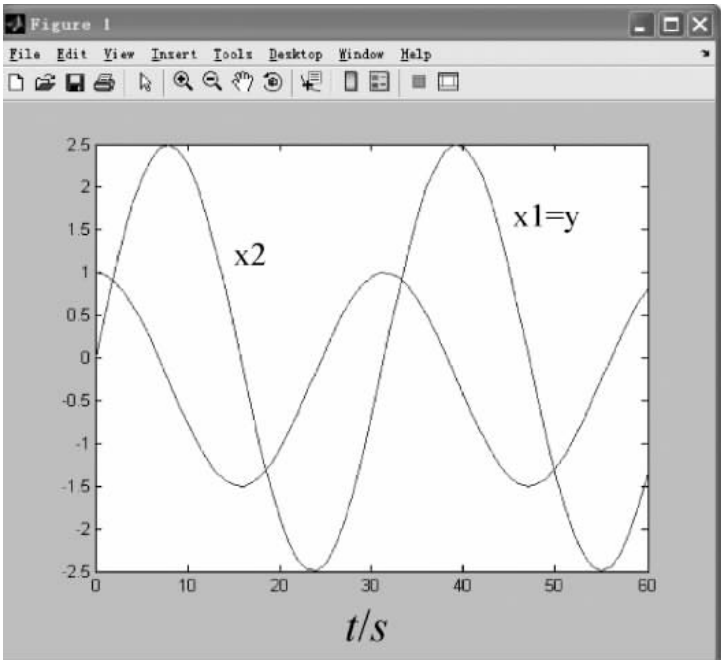

图 3.2　状态响应和输出响应曲线

例 3.16　设系统状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & 0\\ -4 & 3 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$$

试确定该系统的零输入响应曲线。

解　在 MATLAB 中执行以下命令

```
a = [1,0,3; 2,5,0; - 4,3,1]; b = [0; 1; 2];
c = [1,0,0]; d = 0;
G = ss(a,b,c,d);                        % 建立状态空间描述的系统模型
x0 = [1,1,1];
[y,t,x] = initial(G,x0)
```

结果给出零输入响应 y 和 x 的数据，如果执行命令

```
plot(t,x),
```

可得到系统的零输入时的状态响应曲线如图 3.3 所示。再执行命令

```
plot(t,y),
```

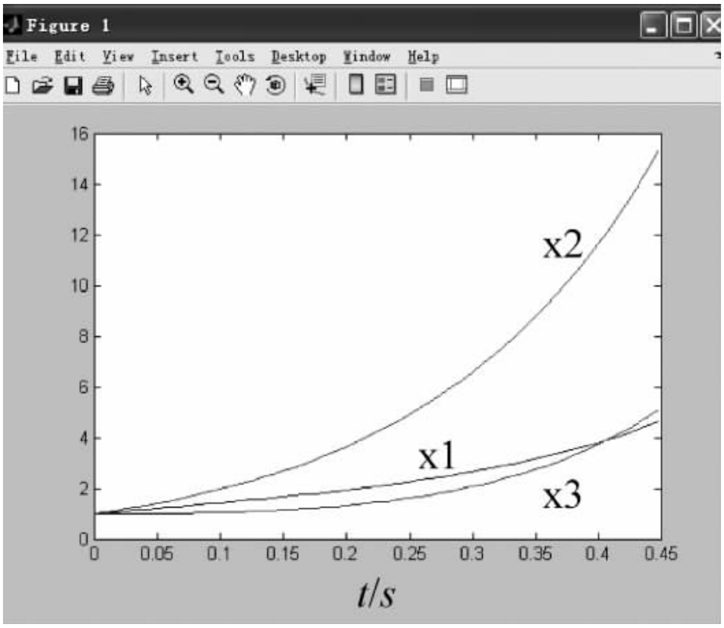

图 3.3 零输入时系统的状态响应

则可得到系统的零输入时的输出响应曲线如图 3.4 所示。

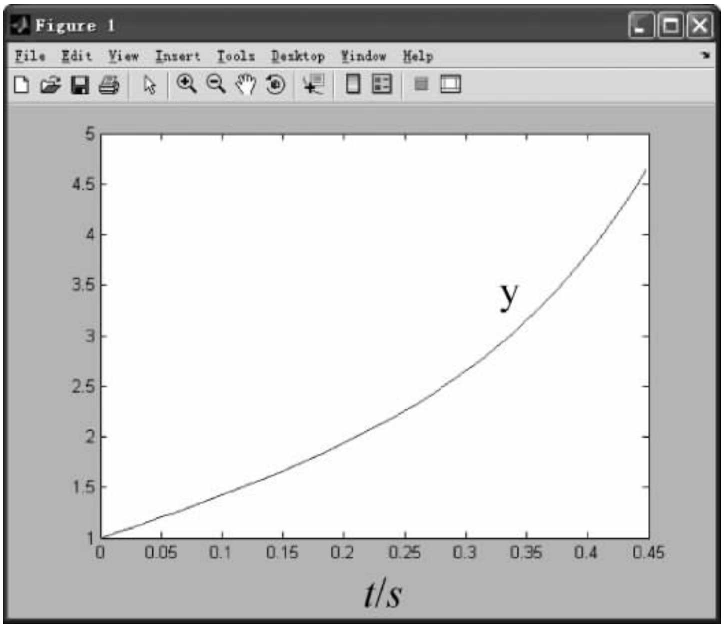

图 3.4 零输入时系统的输出响应

3.8.2 基于 MATLAB 的线性离散系统的运动分析

利用 MATLAB 可以将线性连续系统的状态空间描述离散化，而且还可利用 MATLAB 求解线性离散系统的响应，其命令和线性连续系统的命令类似。

(1) 格式：sysd＝c2d(sys,Ts)。

功能：线性连续系统离散化，其中 Ts 是采样周期。

(2) 格式：[y,x]＝dimpulse(A,B,C,D)。

功能：计算线性离散系统所有状态和输出的单位脉冲响应。

[y,x]＝dimpulse(A,B,C,D,iu)。

功能：只对第 iu 个输入，单位脉冲响应。

(3) 格式：[y,x]＝dstep(A,B,C,D)。

功能：计算线性离散系统所有状态和输出的单位阶跃响应曲线。

格式：[y,x]＝ dstep(A,B,C,D,iu)。

功能：只对第 iu 个输入，计算线性离散系统所有状态和输出的单位阶跃响应。

(4) 格式：[y,x]＝dinitial(A,B,C,D,x0,n)。

功能：计算线性离散系统由初始状态 x0 引起的零输入响应，n 是采样数。

(5) 格式：[y,x]＝dlsim(A,B,C,D,x0,n)。

功能：计算线性离散系统在任意输入 u 和初始状态 x0 下的响应。

例 3.17 线性定常系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

设采样周期 $T=0.05$s，试求其离散化状态方程。

解 在 MATLAB 中执行以下命令

```
A = [0, - 1; 4,0]; B = [0; 1]; C = [1,0]; D = 0; sys = ss(A,B,C,D);
Ts = 0.05;                              % 采样周期 T = 0.05s
sysd = c2d(sys,Ts)
```

运行结果为

```
a =
               x1          x2
   x1       0.995   - 0.04992
   x2      0.1997       0.995
b =
                u1
   x1   - 0.001249
   x2      0.04992
c =
       x1   x2
   y1   1    0
d =
       u1
```

```
   y1   0
Sampling time: 0.05
Discrete-time model.
```

例 3.18 线性定常离散系统状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -0.4 & 0.3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\quad u(k)=1$$

试求 $\boldsymbol{x}(k)$。

解 在 MATLAB 中执行以下命令

```
G=[0 -1; -0.4 0.3]; h=[1; 1];      %输入系统矩阵
x0=[1; -1];                        %初始状态
syms z n k;
thta=inv(z*eye(size(G))-G)*z;      %求状态转移矩阵 thtak
thtak=iztrans(thta,k)
uz=z/(z-1);                        %求单位阶跃响应 xk
xk=iztrans(thta*x0+thta/z*h*uz)
```

运行结果为

```
thtak =
[   8/13*(-1/2)^k+5/13*(4/5)^k, 10/13*(-1/2)^k-10/13*(4/5)^k]
[   4/13*(-1/2)^k-4/13*(4/5)^k,    5/13*(-1/2)^k+8/13*(4/5)^k]
xk =
  -14/13*(-1/2)^n+40/13*(4/5)^n-1
   -7/13*(-1/2)^n-32/13*(4/5)^n+2
```

例 3.19 设系统状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & 0\\ -4 & 3 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$$

设采样周期 $T=0.05\mathrm{s}$,试求其离散化状态方程。

解 在 MATLAB 中执行以下命令

```
A=[1,0,3; 2,5,0; -4,3,1]; B=[0; 1; 2];
C=[1,0,0]; D=0;
G=ss(A,B,C,D);                     %建立状态空间描述的系统模型
Ts=0.05;                           %采样周期设定
[A,B,C,D]=c2dm(A,B,C,D,Ts);        %连续系统离散化
x0=[1; 1; 1]; n=20;
[y,x]=dinitial(A,B,C,D,x0,n)
```

结果给出零输入响应 y 和 x 的数据,如果执行命令

```
>> plot(x),
```

可得到系统的零输入时的状态响应曲线如图 3.5 所示。再执行命令

```
plot(y),
```

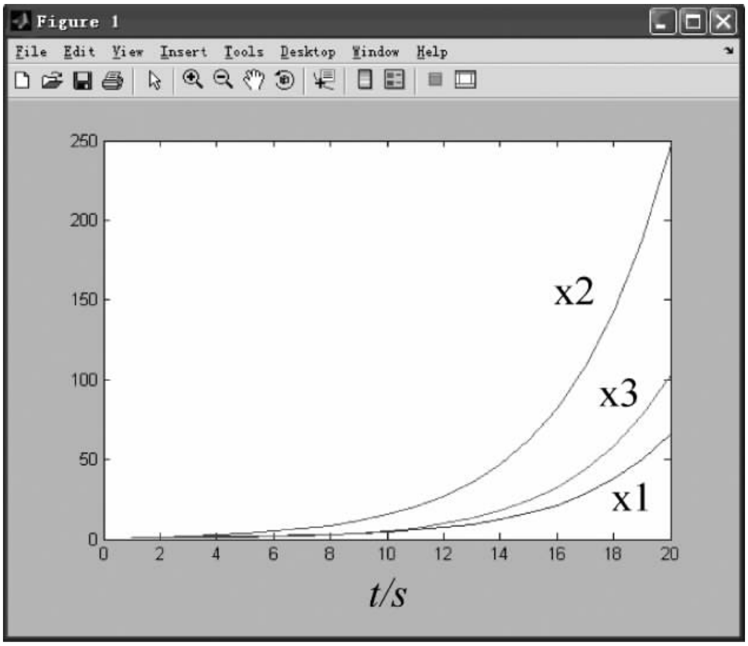

图 3.5　零输入时离散系统的状态响应

则可得到系统的零输入时的输出响应曲线如图 3.6 所示。

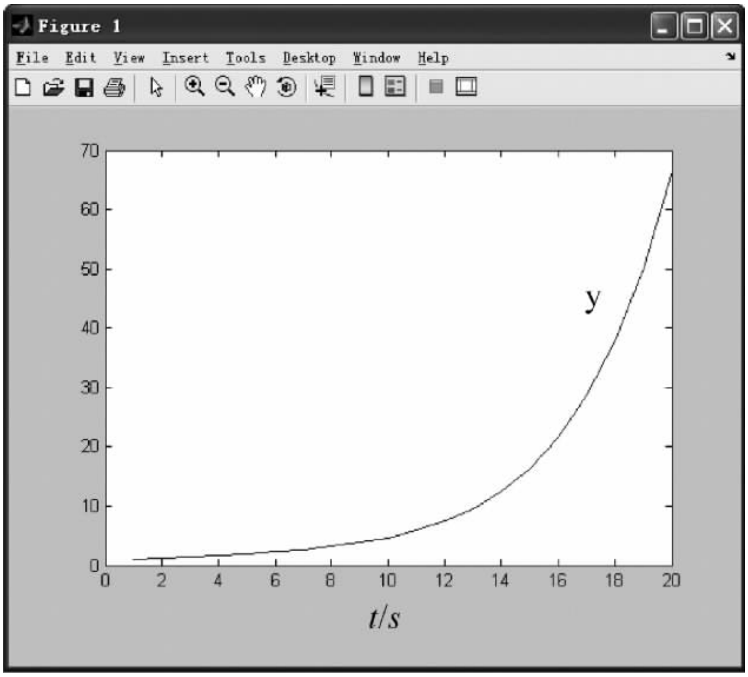

图 3.6　零输入时离散系统的输出响应

本章小结

本章是以定量分析(即对系统方程进行求解)的方法研究系统的运动特性。状态方程是矩阵微分(差分)方程,输出方程是矩阵代数方程。因此,求系统方程的解关键在于求状态方程的解。

本章介绍了线性定常连续系统齐次和非齐次状态方程的解以及线性连续时变系统和线性离散系统状态方程的解;分析了系统状态变量解的组成,系统状态运动由系统内部初始状态引起的自由分量和系统外部输入向量作用引起的强制分量两部分所构成。

决定系统状态运动行为的是状态转移矩阵,它是由系统的 $\boldsymbol{A}(t)$ 唯一决定的,状态转移矩阵是系统定量分析中非常重要的概念。本章介绍了状态转移矩阵的定义、基本性质和求解方法。线性时变系统状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 较难计算,但对于线性定常系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$ 是不难计算的。本章重点介绍了线性定常系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$ 的 4 种计算方法,其间介绍了非常有用的凯莱-哈密尔顿定理。

当状态方程的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 求得后,不同输入向量 $\boldsymbol{u}(t)$ 作用下的输出响应 $\boldsymbol{y}(t)$ 即可求得。进而就能定量分析系统的性能。而且由于输出响应 $\boldsymbol{y}(t)$ 是针对某个控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 而言,所以则可利用 $\boldsymbol{u}(t)$ 的选取使 $\boldsymbol{y}(t)$ 达到期望的特性。

对于线性连续系统,当输入向量 $\boldsymbol{u}(t)$ 是脉冲函数时,可以得到系统的脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{H}(t,\tau)$ 或 $\boldsymbol{H}(t-\tau)$,它可以作为系统的一种数学模型。

本章还结合离散系统状态方程的求解,讲解了连续时间系统的离散化问题。系统的离散化改变了系统的结构,因此状态方程系数阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 变为 $\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$。对于离散系统来说,可以得到与连续系统类似的结论。只是离散系统方程的求解方法是用迭代法,很适合于计算机计算。而且离散系统同样具有状态转移矩阵,但其形式与连续系统有所不同。

本章最后介绍了利用 MATLAB 进行控制运动分析的方法。

习题

3.1 计算下列矩阵的矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$。

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ (4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -5 & 4\end{bmatrix}$

3.2 已知系统状态方程和初始条件为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

(1) 试用拉氏变换法求其状态转移矩阵;

（2）试用化对角标准型法求其状态转移矩阵；

（3）试用化 e^{At} 为有限项法求其状态转移矩阵；

（4）根据所给初始条件，求齐次状态方程的解。

3.3　判断下列矩阵是否满足状态转移矩阵的条件，如果满足，试求其与之对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$。

（1）$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\sin t & 0 & 0\\ 0 & \sin t & \cos t\\ 0 & -\cos t & \sin t\end{bmatrix}$　　（2）$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-2t}-e^{-t}\\ e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-2t}-e^{-t}\end{bmatrix}$

（3）$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(e^{-2t}-1)\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$　　（4）$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}+2e^{3t} & -e^{-t}+e^{3t}\\ -4e^{-t}+4e^{3t} & 2e^{-t}+2e^{3t}\end{bmatrix}$

3.4　给定某二阶系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, t\geqslant 0$，现知其对应于两个不同初始状态的状态响应为

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}\text{时，}\quad \text{则 } \boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}-2e^{-t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\text{时，}\quad \text{则 } \boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}-e^{-2t}\\ 2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

试确定这个系统的转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 和系统矩阵 $\boldsymbol{A}$。

3.5　计算下列系统在单位脉冲输入、单位阶跃输入和单位斜坡输入下的时间响应 $\boldsymbol{x}(t)$。

（1）$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

（2）$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

3.6　关于矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，利用 $e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}=e^{\boldsymbol{A}t}e^{\boldsymbol{B}t}$ 的性质，试确定系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\sigma & \omega\\ -\omega & \sigma\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$。

3.7　已知系统的齐次状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -3 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

并知该系统在某一时刻的状态为

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$$

试求其初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$。

3.8　线性时变系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$ 的系数矩阵如下，试求与之对应的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,0)$。

（1）$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & t\end{bmatrix}$　　（2）$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}t & 1\\ -1 & t\end{bmatrix}$　　（3）$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & t\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$

3.9　已知线性定常离散系统的差分方程如下：

$$y(k+2)+0.3y(k+1)+0.2y(k)=0.1u(k)$$

若设 $u(k)=1, y(0)=1, y(1)=0$，试用递推法求出 $y(k), k=2,3,\cdots,10$。

3.10　设线性定常连续时间系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad t\geqslant 0$$

取采样周期 $T=0.05\mathrm{s}$,试将该连续系统的状态方程离散化。

3.11　已知线性定常离散时间系统状态方程为

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(k)\\ u_2(k)\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

设 $u_1(k)$ 与 $u_2(k)$ 是同步采样,$u_1(k)$ 是来自斜坡函数 t 的采样,而 $u_2(k)$ 是由指数函数 e^{-t} 采样而来。试求该状态方程的解 $\boldsymbol{x}(k)$。

MATLAB 实验

M3.1　已知系统状态方程中系统矩阵为 $\boldsymbol{A}$,求其状态转移矩阵。

(1) 直接计算法

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

(2) 拉氏变换法

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

(3) 非奇异变换法

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

M3.2　设系统状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t), & \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$$

试确定该系统在输入作用 $u(t)$ 为单位阶跃输入时的状态响应和输出响应,并绘制响应曲线。

M3.3　设系统状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$$

试确定该系统的零输入响应曲线。

M3.4 线性定常系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

设采样周期 $T=0.05\text{s}$,试求其离散化状态方程。

M3.5 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

采样周期 $T=0.05\text{s}$,试求其离散化状态方程。

M3.6 线性定常离散系统状态方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u(k) = 1 \end{cases}$$

试求 $\boldsymbol{x}(k)$。