第3章 集合

3.1 集合的基本概念

3.1.1 集合与元素的基本概念

在朴素集合论中，人们用日常语言给集合概念和属于关系以直观说明。其中最常见的是集合论创始人康托的说法："将一些明确的(确定的)、彼此有区别的、具体的或理念中抽象的对象看作一个整体，便叫做'一个集合'。"

主要注意如下几点：

(1) 当提到一个集合时，这个集合自身是作为一个整体被看待的；

(2) 集合是由可以确定的一些对象个体汇集而成的，也就是说，必须可以清晰判定任何一个对象个体是否在这些对象个体之中，并且可以明确区分开这些对象个体中任何两个不同的对象个体；

(3) 在朴素集合论中，集合中的元素既可以是物理世界中的对象，也可以是人们头脑中形成的观念对象。例如：将"北京四中2015年所有在籍学生的全体"作为一个集合，其元素都是具体现实的人(在籍学生)；将"所有实数的全体"的对象作为一个集合，其元素(实数)便是由理念抽象的对象组成的集合。作为数学理论，集合论所讨论的集合，基本上都是由人类理念在其抽象过程中产生的对象汇集而成的。只有在将数学应用于现实时，才会涉及到由现实物理世界中的对象作为元素组成的集合。因此，在理解作为数学理论的集合论时，一定要适应抽象的思维方式和观念对象的建构方式。

如果以符号 A 表示一个集合，a 表示一个对象个体，假如 a 在那些汇集为集合 A 的对象个体之中，则称 a 属于 A，记为 $a\in A$，否则记为 $a\notin A$。如果 $a\in A$，称 a 是 A 的元素，也称集合 A 含 a。

集合的表示方法有两种。

(1) 一种是列举法又称穷举法，它是将集合中的元素全部列出来，元素之间用逗号","隔开，并用大括号"{}"在两边括起来，表示这些元素构成整体。

列举法：列出集合的所有元素或部分元素，可用于有限集和有一定规律的无限集。如：

$$A=\{a,b,\cdots,z\},\quad Z=\{1,-3,1,-5,7,\cdots\}$$

$$D=\{c,\{c\},\{c,d\}\}$$

集合中的元素还可以是集合。

(2) 集合的另一种表示方法叫做谓词法又叫叙述法，它是利用一项规则，概括集合中元素的属性，以便决定某一事物是否属于该集合的方法。设 x 为某类对象的一般表示，P 为关于 x 的一个命题，用 $P|x$ 表示"使 P 成立的对象 x 所组成的集合"，其中竖线"|"前写的是对象的一般表示，右边写出对象应满足(具有)的属性。

谓词表示法：用谓词来描述集合中元素的性质。

如：

$$B=\{x \mid x \in \mathrm{R} \wedge (x-1=0)\},$$

描述法为

$$B=\{x \mid F(x) \wedge G(x)\};$$

谓词描述法为设

$$F(x): x \in \mathrm{R}, \quad G(x): x-1=0$$

集合的性质：

(1) 集合的元素是彼此不同的，相同的元素应该认为是同一个元素；

(2) 集合的元素是无序的，如：$\{1,2,3\}=\{2,3,1\}$。

注：元素与集合的关系是属于 $\in$ 和不属于 $\notin$。

本书规定集合的元素都是集合。对任何集合 A，都有 $A \notin A$。

例 3.1 令 $A=\{a,\{b,c\},d,\{\{d\}\}\}$，则

$\{b,c\} \in A$ $\quad$ $b \notin A$ $\quad$ $\{\{d\}\} \in A$ $\quad$ $\{d\} \notin A$ $\quad$ $d \in A$

3.1.2 集合与集合间的关系

定义 3.1 若集合 B 中的元素都在集合 A 中，则称 B 是 A 的**子集合**，简称**子集**。这时也称 B 被 A 包含，或 A 包含 B，记为 $B \subseteq A$。如果 B 不被 A 包含，则记为 $B \nsubseteq A$。

注：① 包含的符号化为 $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$；② 对任何集合 A，都有 $A \subseteq A$。

定义 3.2 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称集合 A 与 B **相等**，记为 $A=B$。

定理 3.1 $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$。

证明 必要性 即证：$A=B \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$。

$A=B \Rightarrow (\forall x(x \in A) \rightarrow (x \in B)) \wedge (\forall x(x \in B) \rightarrow (x \in A)) \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

充分性 即证：$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A=B$。

反证法：假设

$$A \neq B \Rightarrow (\exists x(x \in A) \rightarrow (x \notin B)) \Rightarrow A \not\subset B$$

$$A \neq B \Rightarrow (\exists x(x \in B) \rightarrow (x \notin A)) \Rightarrow B \not\subset A$$

所以与条件矛盾，

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A=B$$

定义 3.3 对符号 A,B，若 $B \subseteq A$ 且 $B \neq A$，则称 B 是 A 的**真子集**，记为 $B \subset A$。如果 B 不是 A 的真子集，则记为 $B \not\subset A$。

注：真子集的符号化：$B \subset A \Leftrightarrow (B \subseteq A) \wedge (B \neq A)$。

定义 3.4 不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$。

例 3.2　$\{x|x^4+10=0\cap x\in R\}$ 就是空集。

注:①空集的符号化为 $\varnothing=\{x|x\neq x\}$；②空集是一切集合的子集；$\varnothing\subseteq A\Leftrightarrow\forall x(x\in\varnothing\rightarrow x\in A)\Leftrightarrow T$，因右边的蕴含式中前件为假，所以整个蕴含式是真。③空集是唯一的。

假设存在 $\varnothing_1$ 和 $\varnothing_2$，则 $\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$ 且 $\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$，因此 $\varnothing_1=\varnothing_2$。

定理 3.2　含有 n 个元素的集合，它共有 2^n 个子集合。

证明　集合 A 的 $m(m=0,1,2,\cdots,n)$ 个元素组成的子集个数为从 n 个元素中取 m 个元素的组合数，即 C_n^m，故 $P(A)$ 的元素个数为：$|P(A)|=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$。

根据二项式定理 $(x+y)^n=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m x^x y^{n-m}$，令 $x=y=1$，得

$$2^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m$$

故 $|P(A)|=2^n$。

定义 3.5　由 A 的所有子集作为元素形成的集合称为**幂集**，记为 $P(A)$ 或 2^A。

注：幂集的符号化为 $P(A)=\{B|B\subseteq A\}$。

例 3.3　设 $A=\{1,2,3\}$，求 $P(A)$。

解　$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{3,2\},\{1,2,3\},\}$

定义 3.6　如果一个问题中所涉及的集合都是某一集合的子集，则称该集合为**全集**。全集一般记为 E。

注意：全集的概念相当于论域，只包含与讨论有关的所有对象，并不一定包含一切对象与事物。例如：在初等数论中，全体整数组成了全集；方程 $x^2+1=0$ 的解集合，在全集为实数集时为空集，而全集为复数集时解集合就不再是空集，此时解集合为 $\{i,-i\}$。

例 3.4　判断真伪。

(1) $\{x\}\subseteq\{x\}$：　真　　(2) $\{x\}\in\{x\}$：　假

(2) (3) $\{x\}\in\{x,\{x\}\}$　真　　(4) $\{x\}\subseteq\{x,\{x\}\}$：　真

(3) (5) $\{x\}\subseteq\{x\}\cup x$：　假　　(6) 若 $x\in A, A\in P(B)$，则 $x\in P(B)$：　假

(7) 若 $x\subseteq A, A\subseteq P(B)$，则 $x\subseteq P(B)$：　真

例 3.5　判断真伪。

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$：真　(2) $\varnothing\in\varnothing$：假　(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$：真　(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$：真

例 3.6　求下列集合的幂集合。

解

$$P(\varnothing)=\{\varnothing\},$$
$$P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$$
$$P(\{1,\{2,3\}\})=\{\varnothing,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$$

例 3.7　求下列集合的幂集合。

(1) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$　　(2) $\{\varnothing\cup\{\varnothing\}\}$　　(3) $\{\{1,2\},\{2,1,1\},\{2,1,1,2\}\}$

解

(1) $P(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

(2) $P(\{\varnothing\cup\{\varnothing\}\})=P(\{\{\varnothing\}\})=\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$

(3) $P(\{\{1,2\},\{2,1,1\},\{2,1,1,2\}\})=P(\{\{1,2\}\})=\{\varnothing,\{\{1,2\}\}\}$

3.2 集合的运算

集合的运算，就是以集合为对象，按照确定的规则得到另外一些新集合的过程。给定集合 A,B，可以通过集合的并($\cup$)、交($\cap$)、相对补($-$)、绝对补($^{-}$)和对称差($\oplus$)等运算产生新的集合。

定义 3.7 设 A,B 为任意两集合，所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 和 B 的**并集**，记作 $A\cup B$。

例 3.8 设 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7\}$。

注意：集合是由互不相同的元素组成的，在 $A\cup B$ 中 3 只能写一次，不能重写。

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{\exists x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$

定义 3.8 设任意两个集合 A 和 B，由集合 A 和 B 共同元素组成的集合，称为集合 A 和 B 的**交集**，记作 $A\cap B$。

如：设 $A=$\{首都大学的本科学生\}，$B=$\{首都大学计算机专业的学生\}，则

$$A \cap B = \{\text{首都大学计算机专业的本科学生}\}$$

例 3.9 设 A 是所有能被 2 整除的整数集合，B 是所有能被 3 整除的整数集合，则 $A\cap B$ 是所有能被 2 与 3 最小公倍数 6 整除的整数集合。

定义 3.9 设 A,B 为任意两集合，由属于 A 而不属于 B 的一切元素构成的集合，称为 A 与 B 的**差运算**(又称 B 对于 A 的补运算或相对补)，记为 $A-B$，$A-B$ 称为 A 与 B 的**差集**(或 B 对于 A 的补集)。

若 $A=E$，对任意集合 B 关于 E 的补集为 $E-B$，称为**集合 B 的绝对补**，记作 $\bar{B}$。

如设 $A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{1,3,6,7,8\}$，则 $A-B=\{5,9\}$。

例 3.10 设 A 是素数集合，B 是奇数集合，则 $A-B=\{2\}$。

定义 3.10 设 A,B 为任意两集合，由"属于 A 而不属于 B"或"属于 B 而不属于 A"的一切元素构成的集合，称为 A,B 的**对称差**，记作 $A\oplus B$。

$$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$$

1. 集合的基本运算公式

设 A,B 是集合，则

(1) A 与 B 的并：$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$

(2) A 与 B 的交：$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$

(3) A 与 B 的差(B 对 A 的相对补)：$A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$

(4) A 与 B 的对称差：$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

(5) A 的补集(或称绝对补)：$\sim A=E-A=\{x\mid x\in E\wedge x\notin A\}$

注："并"和"交"运算可以推广到有(无)限个集合，即，若 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，则 $\bigcap A=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$。

例 3.11 令

F：一年级大学生的集合　　　　S：二年级大学生的集合

R：计算机系学生的集合 M：数学系学生的集合

T：选修离散数学的学生的集合 L：爱好文学学生的集合

P：爱好体育运动学生的集合

则

所有计算机系二年级学生都选修离散数学 $R \cap S \subseteq T$

数学系一年级的学生都没有选修离散数学 $(M \cap F) \cap T = \varnothing$

数学系学生或爱好文学或爱好体育运动 $M \subseteq L \cup P$

只有一、二年级的学生才爱好体育运动 $P \subseteq F \cup S$

除数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学 $T \subseteq (M \cup R) \cap S$

例 3.12 分别对条件(1)到(5)，确定 X 集合与下述哪些集合相等。

$$S_1 = \{1,2,\cdots,8,9\},\quad S_2 = \{2,4,6,8\},\quad S_3 = \{1,3,5,7,9\},$$
$$S_4 = \{3,4,5\},\quad S_5 = \{3,5\}$$

(1) 若 $X \cap S_3 = \varnothing$，则 $X = S_2$；

(2) 若 $X \subseteq S_4, X \cap S_2 = \varnothing$，则 $X = S_5$；

(3) 若 $X \subseteq S_1, X \not\subseteq S_3$，则 $X = S_1, S_2, S_4$；

(4) 若 $X - S_3 = \varnothing$，则 $X = S_3, S_5$；

(5) 若 $X \subseteq S_3, X \not\subseteq S_1$，则 X 与 $S_1, \cdots, S_5$ 都不等。

2. 集合的运算律

设 A,B,C 是集合，则下列运算律成立。

1) 幂等律

$$A \cup A = A,\quad A \cap A = A$$

2) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3) 交换律

$$A \cup B = B \cup A,\quad A \cap B = B \cap A$$

4) 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

5) 同一律

$$A \cup \varnothing = A,\quad A \cap E = A$$

6) 零律

$$A \cup E = E,\quad A \cap \varnothing = \varnothing$$

7) 排中律

$$A \cup \sim A = E$$

8) 矛盾律

$$A \cap \sim A = \varnothing$$

9) 吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A,\quad A \cap (A \cup B) = A$$

10）德·摩根律

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$， $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$，

$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$， $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$，

$\sim\varnothing=E$， $\sim E=\varnothing$

11）双重否定律

$$\sim(\sim A)=A$$

12）其他重要运算性质

(1) $A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$

(2) $A\subseteq A\cup B, B\subseteq A\cup B$

(3) $A-B\subseteq A$

(4) $A-B=A\cap\sim B$

(5) $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

(6) $A\oplus B=B\oplus A$

(7) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

(8) $A\oplus\varnothing=A$

(9) $A\oplus A=\varnothing$

(10) $A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$

例 3.13 证明 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

证明 对任意的 x，

$$\begin{aligned}x\in A-(B\cup C)&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C)\\&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\\&\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\&\Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge x\in(A-C)\\&\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)\end{aligned}$$

所以 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

例 3.14 证明 $A\cap E=A$。

证明 对任意 x，

$$x\in A\cap E\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in E\Leftrightarrow x\in A$$

故 $A\cap E=A$。

例 3.15 证明 $A\cup(A\cap B)=A$。

证明

$$\begin{aligned}A\cup(A\cap B)&=(A\cap E)\cup(A\cap B)&&\text{（同一律）}\\&=A\cap(E\cup B)&&\text{（分配律）}\\&=A\cap E&&\text{（零律）}\\&=A&&\text{（同一律）}\end{aligned}$$

例 3.16 证明 $A-B=A\cap\sim B$。

证明 对任意 x，

$$\begin{aligned}x\in(A-B)&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\\&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap \sim B)$$

所以 $A-B=A\cap\sim B$。

例 3.17 证明$(A-B)\cup B=A\cup B$。

证明

$$\begin{aligned}(A-B)\cup B &= (A\cap\sim B)\cup B\\ &= (A\cup B)\cap(\sim B\cup B)\\ &= (A\cup B)\cap E = A\cup B\end{aligned}$$

例 3.18 证明 $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$。

证明

(1) 先证 $A\cup B=B\Rightarrow A\subseteq B$。

对 $\forall x$,

$$x\in A\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Rightarrow x\in(A\cup B)\Rightarrow x\in B(\text{因为 } A\cup B=B)$$

所以 $A\subseteq B$。

(2) 再证 $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$。

显然 $A\cap B\subseteq A$,下面只需证 $A\subseteq A\cap B$。

对 $\forall x$,

$$x\in A\Rightarrow x\in A\wedge x\in A\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in(A\cap B)(\text{因为 } A\subseteq B)$$

所以 $A\cap B=A$。

(3) 下证 $A\cap B=A\Rightarrow A-B=\varnothing$。

$$A-B=A\cap\sim B=(A\cap B)\cap\sim B=A\cap(B\cap\sim B)=A\cap\varnothing=\varnothing$$

(4) 最后证明 $A-B=\varnothing\Rightarrow A\cup B=B$。

$$A\cup B=(A-B)\cup B=\varnothing\cup B=B\quad(\text{由上例及 } A-B=\varnothing)$$

例 3.19 化简$((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$。

解 因 $A\cup B\subseteq A\cup B\cup C$,$A\subseteq A\cup(B-C)$,故

$$\begin{aligned}&((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C)\cap A)\\ &=(A\cup B)-A\\ &=(A\cup B)\cap\sim A\\ &=(A\cap\sim A)\cup(B\cap\sim A)=\varnothing\cup(B-A)=B-A\end{aligned}$$

例 3.20 已知 $A\oplus B=A\oplus C$, 证明 $B=C$。

证明

$$\begin{aligned}&A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)\qquad(\text{已知})\\ &\Rightarrow(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C\\ &\Rightarrow\varnothing\oplus B=\varnothing\oplus C\\ &\Rightarrow B=C\end{aligned}$$

例 3.21 证明 $A\cap C=B\cap C\wedge A\cup C=B\cup C\Rightarrow A=B$

证明 由 $A\cap C=B\cap C$ 和 $A\cup C=B\cup C$,得到

$$(A\cup C)-(A\cap C)=(B\cup C)-(B\cap C)$$

从而有

$$A\oplus C=B\oplus C$$

因此

$$\begin{aligned} A \oplus C = B \oplus C &\Rightarrow (A \oplus C) \oplus C = (B \oplus C) \oplus C \\ &\Rightarrow A \oplus (C \oplus C) = B \oplus (C \oplus C) \\ &\Rightarrow A\varnothing \oplus = B\varnothing \oplus \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

例 3.22 证明 $A\subseteq B\Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$。

证明 任取 x,使

$$x \in P(A)\Rightarrow x \subseteq A\Rightarrow x \subseteq B\Rightarrow x \in P(B)$$

任取 x,使

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow \{x\} \subseteq A\Rightarrow \{x\} \in P(A)\Rightarrow \{x\} \in P(B) \\ &\Rightarrow \{x\} \subseteq B\Rightarrow x \in B \end{aligned}$$

例 3.23 证明 $A-B\subseteq A\cup B$。

证明

$$A - B \subseteq A, \quad A \subseteq A \cup B$$

所以 $A-B\subseteq A\cup B$。

例 3.24 证明 $A\subseteq C\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\cup B\subseteq C$。

证明

$$\begin{aligned} &A \subseteq C\Rightarrow A \cup C = C \\ &B \subseteq C\Rightarrow B \cup C = C \\ &(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C \\ &(A \cup B) \cup C = C\Leftrightarrow A \cup B \subseteq C \end{aligned}$$

命题得证。

例 3.25 证明 $A\subseteq C\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\cup B\subseteq C$。

证明 假设 $A\cup B\subseteq C$ 不成立,则 $\exists x(x\in A\cup B\wedge x\notin C)$,因此 $x\in A$ 或 $x\in B$,且 $x\notin C$。

若 $x\in A$,则与 $A\subseteq C$ 矛盾;若 $x\in B$,则与 $B\subseteq C$ 矛盾。

例 3.26 证明 $A\cap C\subseteq B\cap C\wedge A-C\subseteq B-C\Rightarrow A\subseteq B$。

证明

$$A \cap C \subseteq B \cap C, \quad A - C \subseteq B - C$$

上式两边求并,得

$$\begin{aligned} &(A \cap C) \cup (A - C) \subseteq (B \cap C) \cup (B - C) \\ &\Rightarrow (A \cap C) \cup (A \cap \sim C) \subseteq (B \cap C) \cup (B \cap \sim C) \\ &\Rightarrow A \cap (C \cup \sim C) \subseteq B \cap (C \cup \sim C) \\ &\Rightarrow A \cap E \subseteq B \cap E \\ &\Rightarrow A \subseteq B \end{aligned}$$

3.3 集合中元素的计数

定义 3.11 集合 A 的基数指的是集合 A 中的**元素数**,记作 $\mathrm{card}A$。

有穷集 A:$\mathrm{card}A=|A|=n$,n 为自然数。

如：

$$A = \{a, b, c, d, e\}, \mathrm{card}A = |A| = 5;$$
$$B = \{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in R\}, \mathrm{card}B = |B| = 0$$

无穷集的实例：**N**,**Z**,**Q**,**R**,**C** 等。

例 3.27 对 24 名会外语的科技人员进行掌握外语情况的调查，其统计结果如下：会英、日、德和法语的人分别为 13，5，10 和 9 人；其中同时会英语和日语的有 2 人；会英、德和法语中任两种语言的都是 4 人。已知会日语的人既不会法语也不会德语，分别求只会一种语言的人数和会三种语言的人数。

解 令 A，B，C，D 分别表示会英、法、德、日语的人的集合，根据题意得文氏图，如图 3.1 所示。

设同时会三种语言有 x 人，只会英、法或德语一种语言的分别是 y_1，y_2，y_3 人，则有

$$y_1 + 2(4 - x) + x + 2 = 13 \qquad y_2 + 2(4 - x) + x = 9$$
$$y_3 + 2(4 - x) + x = 10 \qquad y_1 + y_2 + y_2 + 3(4 - x) + x = 19$$

解方程组得 $x=1$，$y_1=4$，$y_2=2$，$y_3=3$。

例 3.28 某班有学生 50 名，在第一次考试中 26 人满分，第二次 21 人满分，如果两次都没有得到满分的有 17 人，那么两次都得到满分的有多少人？

解 示意图如图 3.2 所示，方框表示全班的 50 人。圆Ⅰ表示第一次得满分的人数；圆Ⅱ表示第二次得满分的人数；中间交叉部分表示两次都得满分的人数；两圆之外、方框之内表示两次都没有得满分的人数。

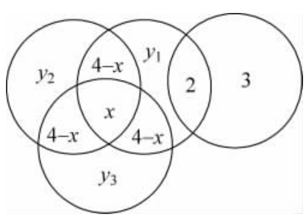

图 3.1 文氏图

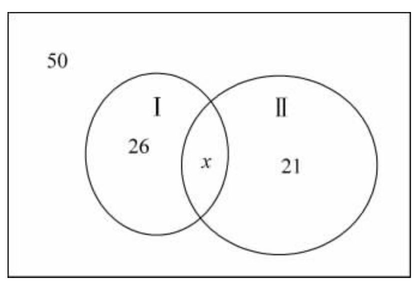

图 3.2 例 3.28 题图

设两次都得满分的人数为 x，则：

$$(26 - x) + x + (21 - x) + 17 = 50$$
$$=> 26 + 21 + 17 - x = 50$$
$$=> 64 - x = 50$$
$$=> x = 64 - 50 = 14$$

即两次都得满分的有 14 人。

例 3.29 求 1～1000 之间（包含 1 和 1000 在内），既不能被 5 和 6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个。

解 设

$$S = \{x \mid x \in Z \wedge 1 \leqslant x \leqslant 1000\}$$
$$A = \{x \mid x \in S \wedge x \text{ 可被 5 整除}\}$$

$B=\{x \mid x \in S \land x\ \text{可被 6 整除}\}$

$C=\{x \mid x \in S \land x\ \text{可被 8 整除}\}$

$|A|=\text{int}(1000/5)=200$

$|B|=\text{int}(1000/6)=166$

$|C|=\text{int}(1000/8)=125$

如图 3.3 所示。

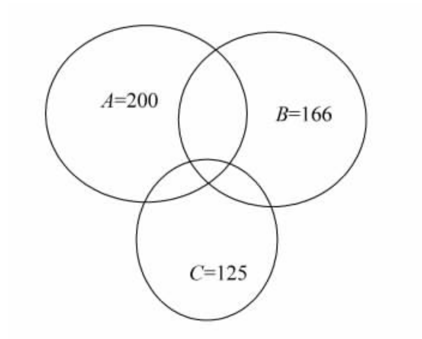

图 3.3　例 3.29 题图

$|A \cap B|=\text{int}(1000/\text{lcm}(5,6))=33$

$|A \cap C|=\text{int}(1000/\text{lcm}(5,8))=25$

$|B \cap C|=\text{int}(1000/\text{lcm}(6,8))=41$

$|A \cap B \cap C|=\text{int}(1000/\text{lcm}(5,6,8))=8$

$1000-(200+100+33+67)=600$

定理 3.3　设 S 为有穷集，$P_1,P_2,\cdots,P_m$ 是 m 个性质。S 中的任何元素 x 或者具有性质 P_i，或者不具有性质 $P_i(i=1,\cdots,m)$，两种情况必居其一。

若 A_i 表示 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，则 S 中不具有性质 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 的元素数为：

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}| = {} & |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |A_i \cap A_j| \\ & - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & + \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|\end{aligned}$$

推论　S 中至少具有一条性质的元素数为

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = {} & \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & - \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|\end{aligned}$$

根据包含排斥原理，例 3.29 中所求的元素数为：

$$\begin{aligned}|A \cap B \cap C| = {} & |S| - (|A| + |B| + |C|) \\ & + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C| \\ = {} & 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600\end{aligned}$$

例 3.30　某班有 25 个学生，其中 14 人会打台球，12 人会打乒乓球，6 人会打台球和乒乓球，5 人会打台球和网球，还有 2 人会打这三种球。已知 6 个会打网球的人都会打台球或乒乓球。求不会打球的人数。

解　先求出会打球的人，25－会打球的人＝不会打球的人。

$|台|=14$，　$|乒乓|=12$，　$|台 \cap 乒乓|=6$，　$|台 \cap 网|=5$，　$|台 \cap 乒乓 \cap 网|=2$，

$|网|=6$，

又

$$6=|网 \cap (台 \cup 乒乓)|=|网 \cap 台|+|网 \cap 乒乓|-|网 \cap 台 \cap 乒乓|,$$

故

$$5+|网 \cap 乒乓|-2=6,$$

故

$$|\text{网} \cap \text{乒乓}| = 3$$

由包含排斥原理可知会打球的人数为

$$\begin{aligned}|\text{台} \cup \text{乒乓} \cup \text{网}| &= |\text{台}| + |\text{乒乓}| + |\text{网}| - |\text{台} \cap \text{乒乓}| - |\text{台} \cap \text{网}| \\ &\quad - |\text{乒乓} \cap \text{网}| + |\text{台} \cap \text{乒乓} \cap \text{网}| \\ &= 14 + 12 + 6 - 6 - 5 - 3 + 2 = 20\end{aligned}$$

故不会打球有 5 人。

1. 两个基本原理

加法原理：若一个事件以 m 种方式出现（这些方式构成集合 A），另一个事件以 n 种方式出现（这些方式构成集合 B），这两个事件完成一件即能达到目的（构成集合 $A \cup B$），则达到目的的方式数为 $m+n$。

如：假设从城市 A 到城市 B 有铁路 3 条，公路 5 条，航线 1 条，那么按加法原理，从城市 A 到城市 B 有 $3+5+1=9$ 种走法。

乘法原理：若一个事件以 m 种方式出现（这些方式构成集合 A），另一个事件以 n 种方式出现（这些方式构成集合 B），这两个事件同时完成才能达到目的（构成集合 $A \cap B$），则达到目的的方式数为 $m\,n$。

如：一位学生想从图书馆借数据库原理和 Java 语言书各一本，书架上有 5 种不同作者的数据库原理书，有 3 种不同作者的 Java 语言书，那么这位学生共有 $5\times3=15$ 种不同的选法。

中学里已学过的计数公式是排列组合公式。从 n 个元素的集合中每次取 m 个的排列和组合的公式分别为：

$$p_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

例 3.31 将 1,2,3 三个数字排成 2 行 3 列的矩阵，要求同行和同列上都没有相同的数字，问这样的数字矩阵有多少？（实际上这就是集合{1,2,3}到自身上的一些双射或置换，这些双射不允许一个元素以自身为像。）

解 先排矩阵的第一行共有 $P_3^3=3!=6$ 种排法，如果不管题目的要求，第二行也有 6 种排法，由乘法原理，知共有 $6\times6=36$ 种矩阵。这些矩阵包含了有一列数字相同的情况，有两列因而就有三列数字相同的情况，按题目要求这些矩阵都应该除去，这些矩阵的个数可如下计算：一列数字相同其余两列数字不同的矩阵数有 $C_3^1C_3^1P_2^2$ 种；有两列数字相同从而就有三列数字相同的矩阵数有 $3!=6$ 个，因此所求的矩阵个数为

$$P_3^3 \times P_3^3 - C_3^1C_3^1P_2^2 - 3! = 12$$

2. 容斥原理

设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，它含有 n 个元素，可以说集合 A 的基数是 n，记作 $\mathrm{card}A=n$。基数是表示集合中所含元素多少的量。如果集合 A 的基数是 n，可记为 $|A|=n$，这时称 A 为有穷集，显然空集的基数是 0，即 $|\varnothing|=0$。如果 A 不是有穷集，则称 A 为无穷集。

定理 3.4 设 A,B 为有限集合,则 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$。

证明

① 当 A,B 不相交,即 $A\cap B=\varnothing$ 时,

$$|A\cup B|=|A|+|B|$$

② 当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时,

$$|A|=|A\cap\bar{B}|+|A\cap B|,\quad |B|=|A\cap B|+|\bar{A}\cap B|$$

所以

$$|A|+|B|=|A\cap\bar{B}|+|\bar{A}\cap B|+2|A\cap B|$$

因为

$$|A\cup B|=|A\cap\bar{B}|+|\bar{A}\cap B|+|A\cap B|$$

所以

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

例 3.32 假设 20 名青年中有 10 名是女生,14 名是学生,其中既是女生又是学生的青年有 6 名,问既不是女生又不是学生的青年的有几名?

解 设该 20 名青年组成集合 Y,$|Y|=20$,其中女生集合设为 W,$|W|=10$;学生集合设为 S,$|S|=14$。$|W\cap S|=6$,又因为 $Y=(W\cup S)\cup(\bar{W}\cap\bar{S})$,所以

$$Y=(W\cup S)\cup(\bar{W}\cap\bar{S})=20,$$

即

$$\begin{aligned}(\bar{W}\cap\bar{S})&=20-(W\cup S)\\&=10-(|W|+|S|-|W\cap S|)\\&=(20-(10+14-6))=2\end{aligned}$$

因此,既不是女生又不是学生的青年有 2 人。

习题 3

1. 列出下述集合的全部元素:

(1) $A=\{x|x\in\mathrm{N}\wedge x$ 是偶数 $\wedge x<15\}$;

(2) $B=\{x|x\in\mathrm{N}\wedge 4+x=3\}$;

(3) $C=\{x|x$ 是十进制的数字$\}$。

2. 用谓词法表示下列集合:

(1) {奇整数集合};

(2) {小于 7 的非负整数集合};

(3) $\{3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$。

3. 用列元素法表示下列集合。

(1) $S_1=\{x|x$ 是十进制的数字$\}$

(2) $S_2=\{x|x=2\cup x=5\}$

(3) $S_3=\{x|x\in R\cap 3<x<12\}$

(4) $S_4=\{x \mid x^2-1=0 \cap x>3\}$

(5) $S_5=\{x,y> \mid x,y\in Z \cap 0\leqslant x\leqslant 2 \cap 1\leqslant y\leqslant 0\}$

4. 对任意集合 A,B,C,确定下列命题的真假性。

(1) 如果 $A\in B \wedge B\in C$,则 $A\in C$。

(2) 如果 $A\in B \wedge B\in C$,则 $A\in C$。

(3) 如果 $A\subset B \wedge B\in C$,则 $A\in C$。

5. 求下列集合的幂集。

(1) $\{a,b,c\}$

(2) $\{a,\{b,c\}\}$

(3) $\{\varnothing\}$

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

(5) $\{\{a,b\},\{a,a,b\},\{a,b,a,b\}\}$

6. 给定自然数集合 **N** 的下列子集。

$A=\{1,2,7,8\}$

$B=\{x \mid x^2<50\}$

$C=\{x \mid x$ 可以被 3 整除且 $0\leqslant x\leqslant 30\}$

$D=\{x \mid x=2^K,K\in I \wedge 0\leqslant K\leqslant 6\}$

列出下面集合的元素。

(1) $A\cup B\cup C\cup D$

(2) $A\cap B\cap C\cap D$

(3) $B-(A\cup C)$

(4) $(\overline{A}\cap B)\cup D$

7. 对下列集合,画出其文氏图。

(1) $\overline{A}\cap\overline{B}$

(2) $A—(B-\cap\overline{C})$

(3) $A\cap(\overline{B}\cup C)$

8. 设 F 表示一年级大学生的集合,S 表示二年级大学生的集合,M 表示数学专业学生的集合,R 表示计算机专业学生的集合,T 表示听离散数学课学生的集合,G 表示星期一晚上参加音乐会的学生的集合,H 表示星期一晚上很迟才睡觉的学生的集合。问下列各句子所对应的集合表达式分别是什么?

(1) 所有计算机专业二年级的学生在学离散数学课。

(2) 这些且只有这些学离散数学课的学生或者星期一晚上去听音乐会的学生在星期一晚上很迟才睡觉。

(3) 听离散数学课的学生都没参加星期一晚上的音乐会。

(4) 这个音乐会只有大学一、二年级的学生参加。

(5) 除去数学专业和计算机专业以外的二年级学生都去参加了音乐会。

9. 对 60 个人的调查表明有 25 人阅读《每周新闻》杂志,26 人阅读《时代》杂志,26 人阅读《幸运》杂志,9 人阅读《每周新闻》和《幸运》杂志,11 人阅读《每周新闻》和《时代》杂志,8 人阅读《时代》和《幸运》杂志,还有 8 人什么杂志都不阅读。那么阅读全部 3 种杂志的有多

少人？只阅读《每周新闻》的有多少人？只阅读《时代》的有多少人？只阅读《幸运》的有多少人？只阅读一种杂志的有多少人？

10．75 个学生去书店买语文、数学、英语课外书，每种书每个学生至多买 1 本。已知有 20 个学生每人买 3 本书，55 个学生每人至少买 2 本书。设每本书的价格都是 1 元，所有的学生总共花费 140 元。那么恰好买 2 本书的有多少个学生？至少买 2 本书的学生花费多少元？买一本书的有多少个学生？至少买一本书的有多少个学生？没买书的有多少个学生？

11．设 $|A|=3$，$|P(B)|=64$，$|P(A\cup B)|=256$，求 $|B|$、$|A\cap B|$、$|A-B|$、$|A\oplus B|$。

12．求不超过 120 的素数个数。

13．求 1～250 这 250 个整数中，至少能被 2、3、5、7 之一整除的数的个数。

14．化简下列各式。

(1) $(A\cap B)\cup(A-B)$　　(2) $A\cup(B-A)-B$

(3) $(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B)-((A\cup(B-C)\cap A)$

15．设 A,B,C 为任意三个集合，

(1) 证明：$(A-B)-C\subseteq A-(B-C)$。

(2) 在什么条件下，(1)中的等号成立？

16．75 名儿童到游乐场玩，他们可以骑旋转木马，做滑行铁道，乘宇宙飞船。已知其中 20 人这三种游戏都玩过，其中 55 人至少乘过其中的两种。若每样乘坐一次的费用是 5 元，游乐场总共收入 700 元，试确定有多少儿童没有乘坐其中任何一种。