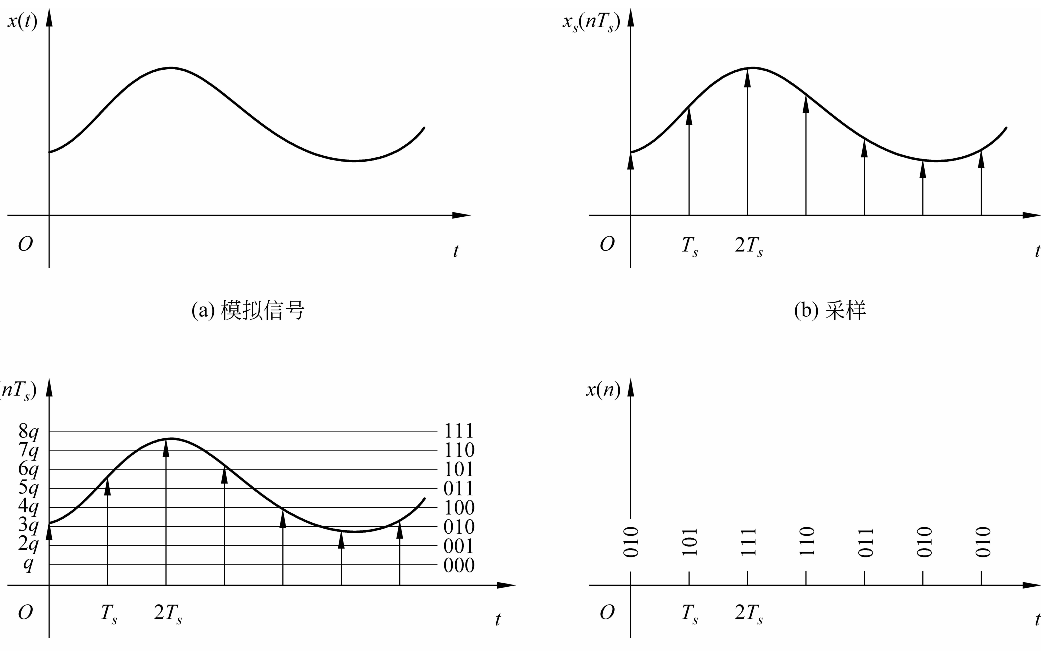
第 5 章　采 样 定 理

5.1　基 本 概 念

模拟信号(Analog Signal)是指信号参数(幅值、相位)在定义域内均连续的信号,也称连续信号。日常生活中常见的自然信号很多属于这种类型,如语音、无线广播、气温变化、地震波、汽车振动、电压变化。然而,现代的计算机等数字系统只能处理数字信号,不能表示连续函数或者无穷大量。因此,将模拟信号转换为数字信号成为一个需要解决的问题,下面将对这个过程加以解释。

图 5-1(a)至(d)给出了模拟信号转换为数字信号的过程。首先,模拟信号经过脉冲采样器,采得一系列离散数值,形成采样信号(Sampling Signal)。然后,对原始信号的幅值进行量化,并用二进制编码,得到数字信号(Digital Signal)。量化区间数量与选择的二进制位数有关,如 2^3 可以表示 8 个量化区间,第一个区间的所有值可以用 000 编码。编码之后的数字信号即可通过数字系统进行传输。



(a) 模拟信号　(b) 采样　(c) 量化　(d) 编码

图 5-1　模拟信号转化为数字信号过程

假设脉冲采样器任何两次闭合之间的时间段均为 T_s,闭合时间长度为 τ,$\tau \ll T_s$,则自零时刻始,模拟信号 $x(t)$经过采样后输出离散信号 $x_s(nT_s)$,$n=0,1,2,\cdots$,采样频率为 $f_s=1/T_s$。显然,采样频率越高,样本点越多,反之,越少。图 5-2 给出了实际采样脉冲和理想采

样脉冲。

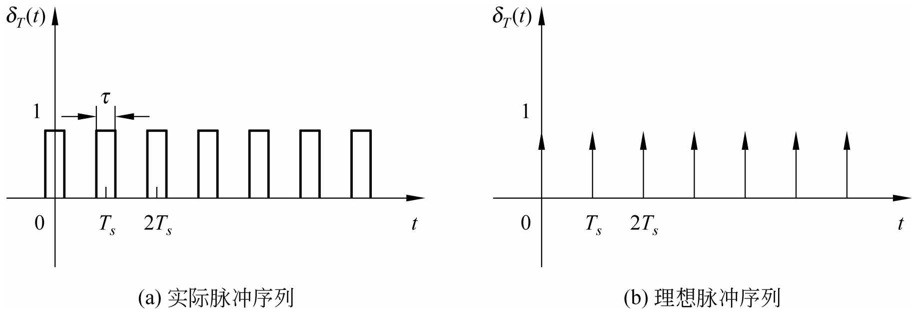


图 5-2　采样序列

为了便于推导，采样过程需要通过数学公式来描述。给定采样序列 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$，如图 5-2(b)所示，采样信号 $x_s(nT_s)$可以表述为

$$x_s(nT_s)=x(t)\,\delta_T(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) \tag{5-1}$$

假设采样脉冲为理想脉冲，$x_s(t)$在脉冲出现瞬间 nT_s 取值为 $x_s(nT_s)$

$$x_s(nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

若只考虑正值时间

$$x_s(nT_s)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

采样过程如图 5-3 所示，图 5-3(a)表示模拟信号，图 5-3(b)表示采样信号。采样时间间隔为 τ。

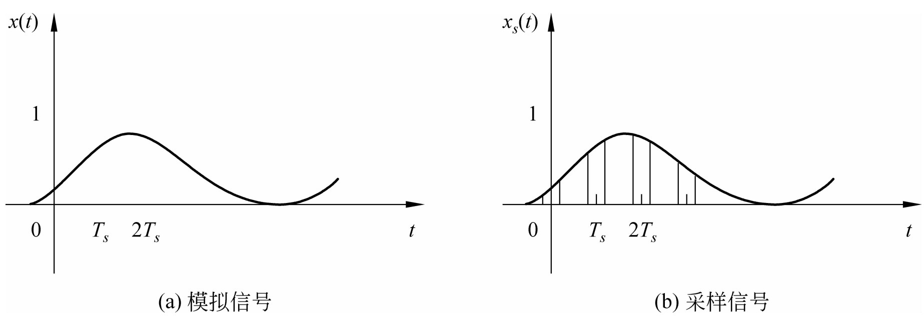


图 5-3　采样过程

5.2　时域采样定理

5.2.1　采样信号的频谱

对式(5-1)两边作傅里叶变换得

$$\hat{X}(\mathrm{j}\omega)=\mathscr{F}(x_s(nT_s))=\mathscr{F}(x(t)\,\delta_T(t))=\frac{1}{2\pi}[X(\mathrm{j}\omega)*\Delta(\mathrm{j}\omega)] \tag{5-2}$$

可知，若要计算采样函数的傅里叶变换，需要计算原函数和采样脉冲的傅里叶变换。首先，考虑 $\Delta(\mathrm{j}\omega)$，简化 $\delta_T(t)$ 表达式。采样的脉冲序列 $\delta_T(t)$ 为周期为 T 的采样序列，可以用傅里叶级数展开

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\frac{2\pi}{T}t}$$

由 3.1.2 节可知 $c_m=1/T$，从而$\delta_T(t)=\frac{1}{T}\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\frac{2\pi}{T}t}$。因此可得采样脉冲$\delta_T(t)$的频谱：

$$\begin{aligned}\Delta(\mathrm{j}\omega)&=\mathscr{F}(\delta_T(t))=\int_{-\infty}^{\infty}\delta_T(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\frac{2\pi}{T}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-m\omega_s)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{2\pi}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-m\omega_s)\end{aligned}$$

其次，假设原信号 $X(t)$的频谱：$X(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$。因此，依据式(5-2)计算采样信号的频谱：

$$\begin{aligned}\hat{X}(\mathrm{j}\omega)&=\frac{1}{2\pi}[X(\mathrm{j}\omega)*\Delta(\mathrm{j}\omega)]\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-m\omega_s)*X(\mathrm{j}\omega)\right]\\&=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\theta)\delta(\omega-m\omega_s-\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}m\omega_s)\\&=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X\left(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}m\frac{2\pi}{T}\right)\end{aligned}$$

可见，采样信号的频谱是原信号的频谱经过周期延拓和幅度压缩 $1/T$ 后的结果。

5.2.2 时域采样定理

采样定理在计算机系统、通信系统中具有重要的作用，因为它揭示了在何种情况下，原始信号与采样信号之间具有一一对应的关系。

1. Nyquist(Shannon)采样定理

给定一个频谱受限信号，其最高频率不超过 f_m。若信号可以用采样信号唯一地表示，则采样频率 f_s 必须不小于原信号频谱中最高频率的两倍，即 $f_s\geqslant 2f_m$。

通常把最低的允许采样频率 $f_s=2f_m$ 称为奈奎斯特频率，最大允许的采样时间间隔 $T_s=1/(2f_m)$称为奈奎斯特时间间隔。图 5-4 为时域采样及频谱关系。左边一列表示时域采样，右边一列对应着频谱函数。

2. 频率混叠

奈奎斯特定理指明采样的最低频率。当采样频率低于原始信号最高频率的 2 倍时，采

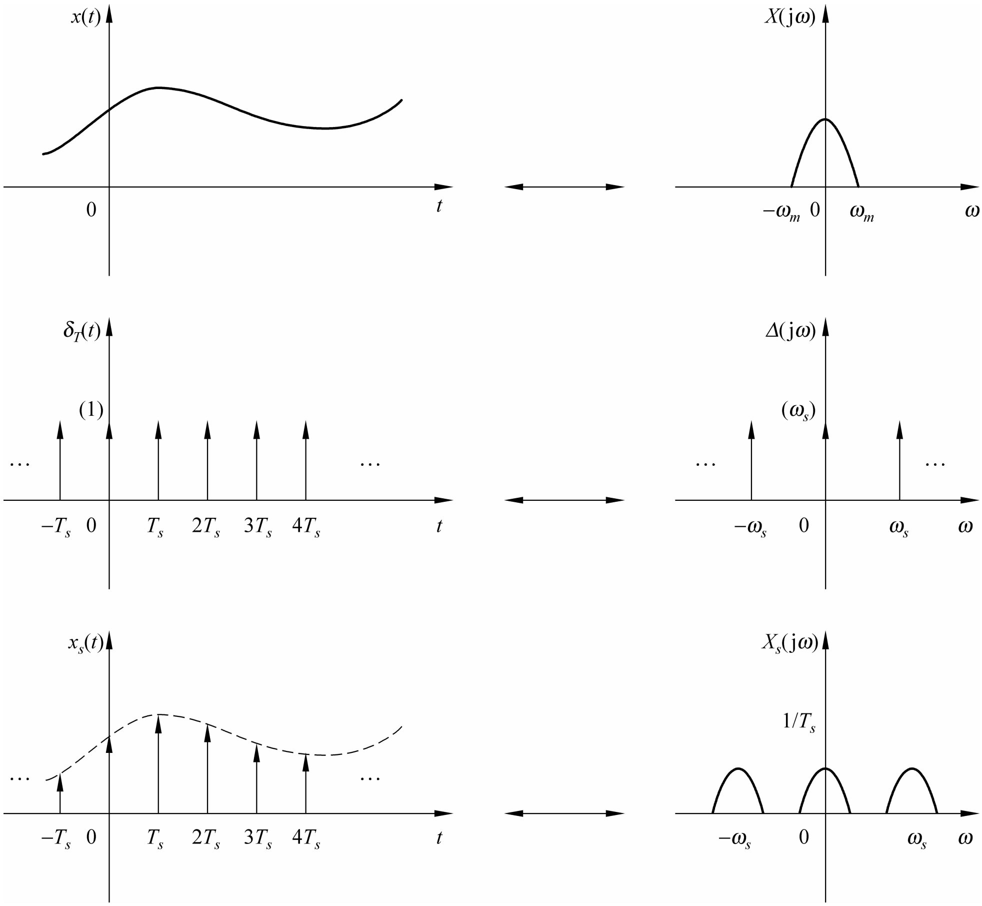


图 5-4　时域采样及信号频谱

样频谱就会发生“频率混叠”现象，如图 5-5 所示。图 5-5(a)表示原始信号的频谱。当 $\omega_s \geqslant 2\omega_{\max}$时，采样信号的频谱如图 5-5(b)所示，可见，信号频谱幅度变为 $1/T$。在这种情况下，只要取采样信号的主值区间的波形，即可无失真地还原原始信号。当 $\omega_s < 2\omega_{\max}$时，采样信号的频谱产生了重叠，如图 5-5(c)所示。此时无法还原出原始信号。

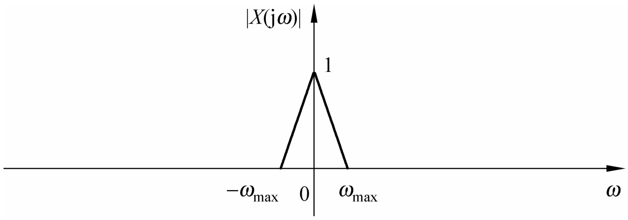
为了减小频率混叠，可以采用提高频率方法或者使用抗混叠滤波器来解决。提高频率方法适合频率变换较快的信号，但是高采样率会带来存储量的增加和计算规模的增大。抗混叠滤波器先对信号低通滤波，然后进行采样，适合频率衰减较慢的信号。

3．采样方式

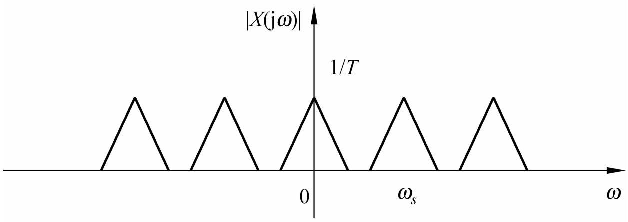
信号的采样方式可以分为实时采样和等效时间采样。实时采样就是按照采样周期依时间顺序采取信号的样本点，每个时刻的幅值的量化和存储需要在有限的时间内完成。因此采样频率较高的信号可能存在一定的困难。等效时间采样要求信号是可以重复产生的，这样采样就可以不依时序的方式完成，实现较慢的速率采样，获得较高的采样精度。

4．信号的恢复

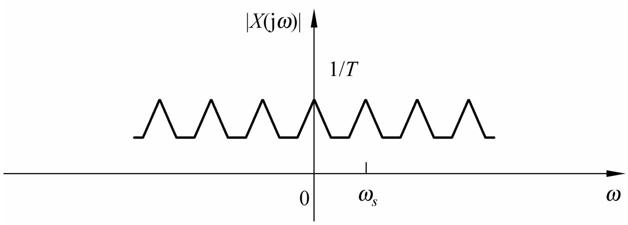
当采样频率不小于两倍奈奎斯特频率时，信号的频谱不会发生重叠现象，因此，信号可以通过低通滤波器无损失地恢复。信号的恢复的过程如图 5-6 所示。下面通过实例解释如



(a) 原信号频谱



(b) 采样信号频谱，$\omega_s \geqslant 2\omega_{max}$



(c) 采样信号频谱，$\omega_s < 2\omega_{max}$

图 5-5　频谱混叠现象

何通过采样信号恢复原始信号。已知采样信号

$$x_s(nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

以及低通滤波器的频域特性函数

$$H(\mathrm{j}\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

对 $H(\mathrm{j}\omega)$进行傅里叶反变换得到滤波器的单位冲击响应

$$h(t) = \frac{\omega_0}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t)$$

因此，

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathscr{F}^{-1}(X(\mathrm{j}\omega)) \\ &= \mathscr{F}^{-1}(X_s(\mathrm{j}\omega) \cdot H(\mathrm{j}\omega)) \\ &= x_s(nT_s) * h(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_c}{\pi} f(nT_s)\mathrm{Sa}[\omega_c(t - nT_s)] \end{aligned}$$

式中使用了冲击函数的卷积性质。

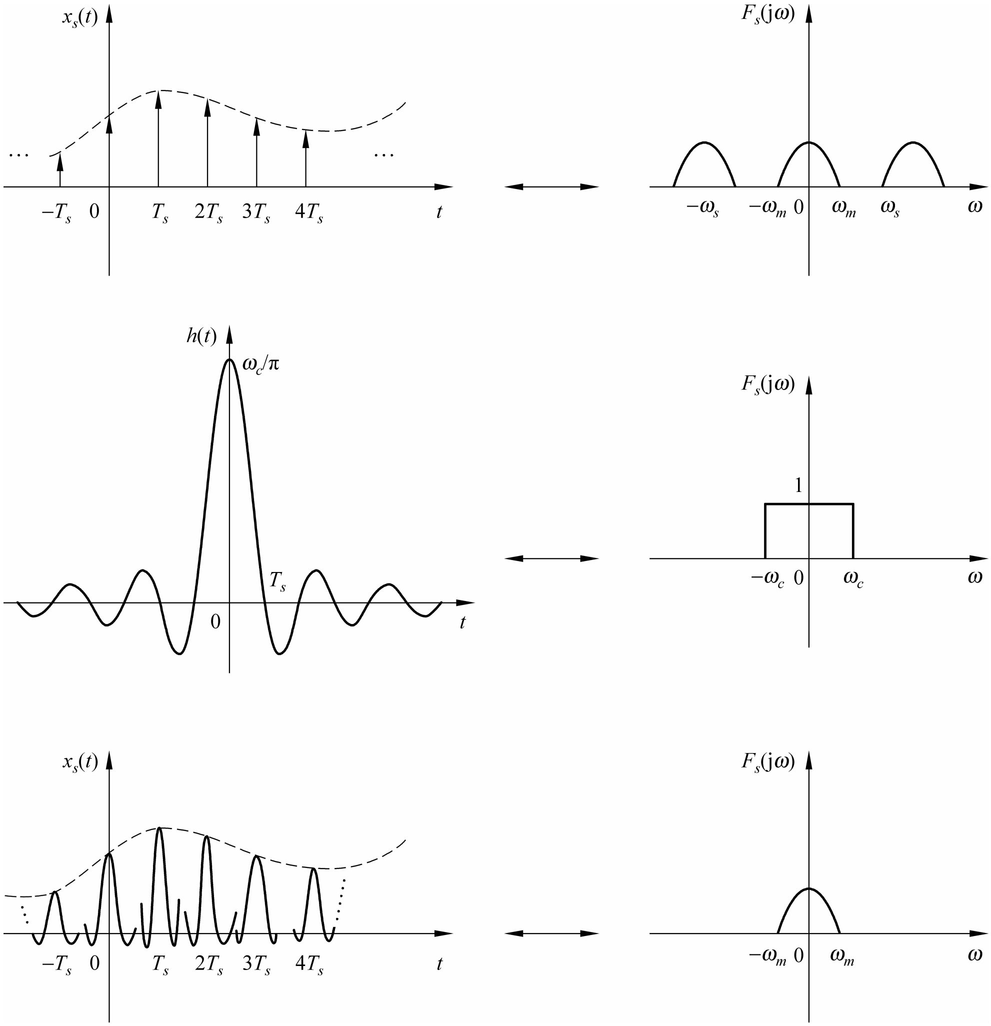


图 5-6　信号的恢复过程

5.3　频域采样定理

5.3.1　频域采样

除了时域采样之外，频域也可以进行采样。采样后的频谱 $X_s(j\omega)$对应的时域函数$x_s(t)$可以通过 $x(t)$和采样频谱的时域函数 $g(t)$的卷积得到。假设频域采样函数为

$$\delta_s(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[j(\omega-n\omega_s)]$$

ω_s 表示频域采样间隔。经过计算得到$\delta_s(j\omega)$的时域函数

$$g(t)=\frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

因此，采样后频谱对应的时域函数为

$$x_s(t) = x(t) * g(t) = x(t) * \left[\frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\right] = \frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-nT_s)$$

5.3.2 频域采样定理

频域采样定理描述：给定一个时域受限信号，如果$|t|<t_m$，则当频域的采样间隔不大于$1/(2t_m)$时，原信号频谱可以由采样序列的频谱唯一表示。图 5-7 给出了频域采样的表示过程。频域采样和时域采样具有类似的性质。

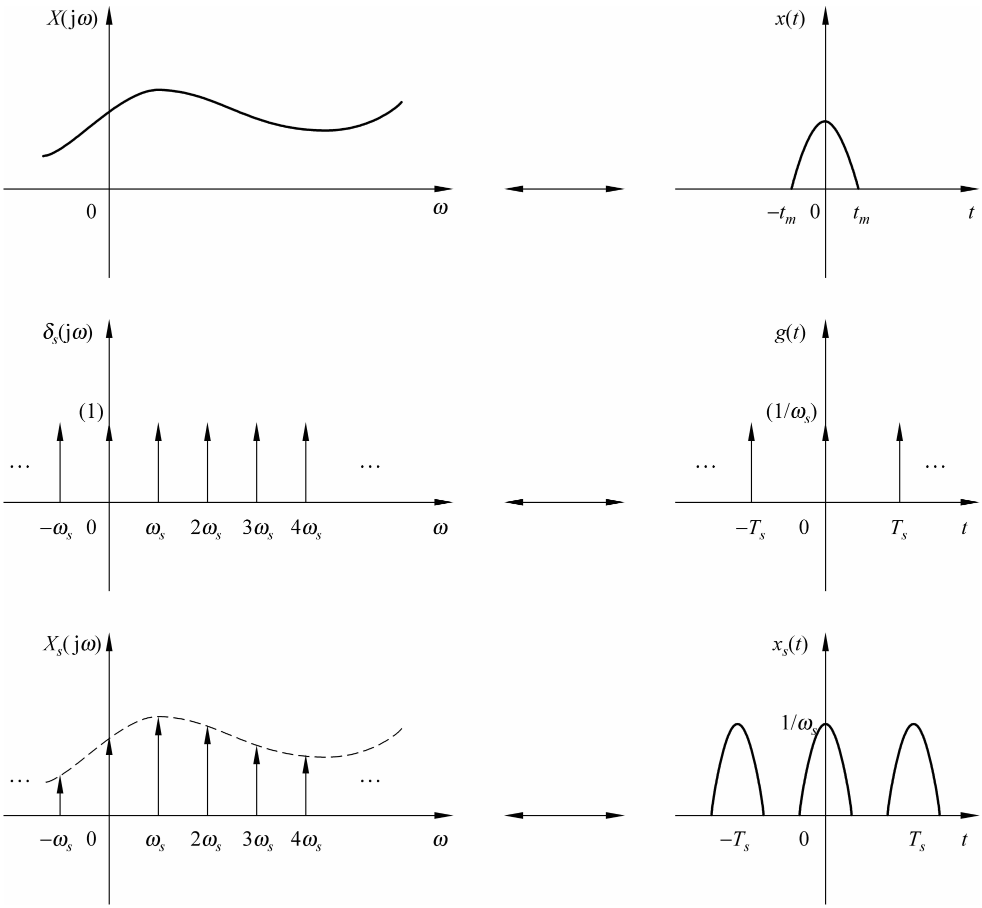


图 5-7 频域采样及时域信号

5.4 应 用

5.4.1 音频采样

音频采样指对声音信号进行采样，音频采样率决定了声音的质量，采样频率越高声音的还原就越真实、自然。表 5-1 列出了一些常用的声音采样频率。

表 5-1　音频采样率

采　样　率	用　　途
8000Hz	电话
11 025Hz,22 050Hz	无线电广播
32 000Hz	miniDV、DAT(LP mode)
44 100Hz	音频 CD、MPEG-1 音频(VCD,SVCD,MP3)
48 000Hz	miniDV、数字电视、DVD、DAT、电影和专业音频所
96 000 或 192 000Hz	DVD-Audio、一些 LPCM DVD 音轨、BD-ROM 音轨、HD-DVD(高清晰度 DVD)音轨

对数字音频,除了采样时域之外,还要对幅值进行采样。数字信号的幅值被量化为 2 的 n 次幂,当用 $m<n$ 对数字信号量化时,就获得了原来幅值上的采样。显然,幅值采样点越多,音质越好。

5.4.2　图像采样

图像是二维或者三维的数字信号,采样方式分为下采样(Subsampled)(或降采样(Downsampled))和上采样(Upsampling)(或图像插值(Interpolating))两种。下采样主要用于:①生成图像的缩略图;②调整图像尺度以符合目标区域大小。上采样是为了放大图像,以便于在更高精度设备上显示,缺点是容易产生锯齿。这两类采样信号的频谱都可以通过 Z 变换进行分析。

小　　结

本章介绍了如何实现模拟信号到数字信号的转变、时域(频域)采样定理。模数转换不仅体现在时域信号的抽样和量化上,在频域也发生了一系列相应的变换,这些变化遵循一定的规律,为采样定理的定义奠定了基础。信号采样分为时域采样和频域采样,根据不同的应用目的选择。采样定理描述了无失真恢复原始信号的基本条件。采样的过程中可能会出现采样方法选择、频率混叠、信号最高频率未知等问题,这些问题在实际中都已有很好的解决方法。

习　　题

5.1　简答模拟信号、采样信号、数字信号的区别。

5.2　简述模拟信号转化为数字信号的过程。

5.3　查阅资料,介绍几种信号的采样方法。

5.4　假设已知信号的采样时间周期分别为 2ms、8ms、32ms,试求这些信号的截止频率分别为多少。

5.5　计算下面函数

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

的傅里叶级数，给出过程。

5.6 计算

$$\delta_s(\mathrm{j}\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[\mathrm{j}(\omega-n\omega_s)]$$

的时域函数，给出推导过程。

5.7 假设采集系统的输入分别为如下的离散频率：5.5kHz、15.5kHz、20kHz、24.6kHz，若采样频率为 10kHz，试求各个频率的输出是什么。

5.8 确定下列信号的奈奎斯特频率和间隔。

(1) $\mathrm{Sa}(100t)$　　(2) $\mathrm{Sa}(100t)+\mathrm{Sa}(50t)$

(3) $\mathrm{Sa}^2(100t)$　　(4) $\mathrm{Sa}(100t)+\mathrm{Sa}^2(50t)$

5.9 若模拟信号 $x(t)$的奈奎斯特频率为 ω，试求下列公式的奈奎斯特频率。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$　　(2) $x(3t)$

(3) $x^2(t)$　　(4) $x(t)\sin(\omega_0 t)$

5.10 $x(t)$的波形如图 5-8 所示。

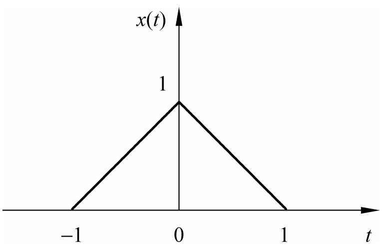


图 5-8　5.10 题的波形

若采样脉冲为

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{1}{8}n\right)$$

试求采样后的频谱。