

本章首先对光纤的光线理论分析方法的使用范围进行讨论,然后对均匀折射率光纤进行光线理论分析,最后对渐变光纤进行光线理论分析。

3.1 引言

光线理论最大的优点在于表征光波传输物理过程的直观性和简单性。在尺寸远大于波长而折射率变化缓慢的空间,用光线理论分析光波的传输现象可以得到非常好的近似结果。但是对于一般的光纤,有必要了解满足光线理论分析的几何尺寸量级。图 3.1 给出了光纤中几种典型的折射率分布。以通信波长为 $1.55\mu\text{m}$ 而折射率为 1.5 的玻璃光纤为例,对于纤芯直径分别为 $60\mu\text{m}$ 的多模光纤、 $15\mu\text{m}$ 的 W 型多模光纤和 $5\mu\text{m}$ 的单模光纤,可以推知这些光纤的纤芯直径分别约为 58、15 和 5 个波长。

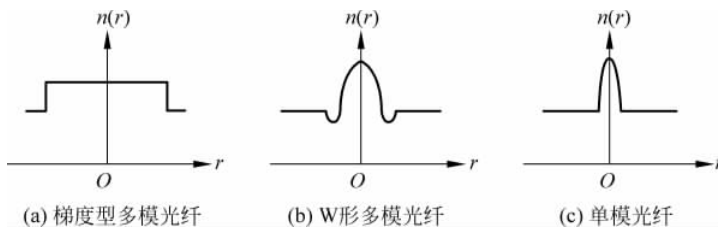


图 3.1 光纤中几种典型的折射率分布示意图

由此可以得到如下几个使用光线理论分析光纤的结论:

- (1) 使用光线理论分析多模均匀光纤是可行的,且具有良好的精度。但是,在纤芯与包层分界面上,因折射率跳跃变化导致光线理论不再适用,故需另行考虑处理。
 - (2) 使用光线理论分析 W 型多模光纤是勉强的,其近似程度较大,分析结果不理想。
 - (3) 由于几何光学近似在单模光纤中不成立,因此光线理论分析完全不适用于单模光纤。
- 下面使用光线理论对均匀光纤和渐变光纤中光线的传输进行分析。

3.2 均匀光纤的光线理论分析

3.2.1 均匀光纤中的光线种类

这里的均匀光纤是指纤芯和包层的折射率均匀但不相同的光纤。阶跃折射率光纤

(SIF)是一种典型的均匀折射率光纤,其折射率的一般表达式为

$$n = \begin{cases} n_1 & 0 \leq r \leq a \\ n_2 & a < r \leq b \end{cases} \quad (n_1 > n_2) \quad (3.1)$$

式中, r 为均匀光纤的径向坐标, a 为纤芯半径, b 为包层半径, 纤芯和包层的折射率 n_1 和 n_2 均为常数, 在 $r=a$ 处折射率呈阶跃式变化。

对 SIF 导光机理的分析, 除需满足全内反射条件之外, 还应满足界面处的“横向谐振”条件。在均匀光纤中存在两类光线, 分别称为子午光线(MR)和偏斜光线(SR)。子午光线是指在子午平面上传输的光线, 在一个周期内和光纤中心轴相交两次。子午平面是指通过光纤中心轴的所有平面, 显然, 子午面有无数多个。子午光线的轨迹是子午平面内的一系列折线, 如图 3.2 所示。

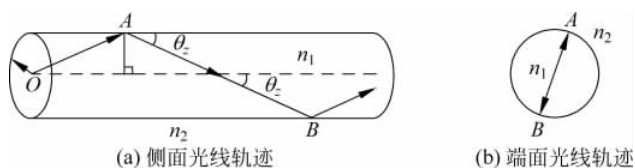


图 3.2 子午光线轨迹示意图

偏斜光线是指不在子午平面内的传输光线, 它与光纤轴既不平行也不相交, 因而不限于单一平面之内。偏斜光线轨迹一般是一系列空间螺旋折线, 可为左旋, 亦可为右旋, 但它们和光纤的中心轴是等距的, 并被限制在 $r_0 \leq r_{ic} \leq a$ 的圆筒内传输, 即光线轨迹折线范围是在纤芯-包层边界这一圆柱面($r_{ic}=a$)与一个半径小于纤芯半径的圆柱面($r_{ic}=r_0$)之间, 并在光纤端面的投影形成一个多边形, 如图 3.3 所示。其中, 由 $r_{ic}=r_0$ 构成的圆柱面(即内接圆)称为内散焦面, 电磁场在此范围内呈驻波形式, 而在此范围之外则呈逐渐衰减形式; 方位角 $(AA)\theta_\phi$ 是光线在光纤端面上的投影线与反射点处纤壁切线的夹角。

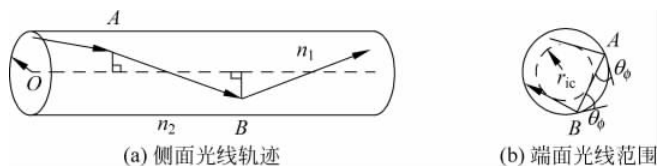


图 3.3 偏斜光线轨迹示意图

3.2.2 子午光线的传输分析

3.2.2.1 子午光线的轨迹

子午光线的传输遵循光的反射定律和折射定律。子午光线的传输比较简单, 其特点是入射光线、反射光线和分界面的法线三者均在子午平面内。现以阶跃型光纤为例, 对子午光线的传输进行分析, 如图 3.4 所示。

设 n_1 、 n_2 分别为纤芯和包层的折射率, n_0 为光纤周围介质的折射率。根据 Shell 定律, 在光纤端面处 $n_0 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta$, 使光线在纤芯与包层界面处产生全反射需满足条件 $\sin \phi \geq \sin \phi_c = n_2/n_1$ (其中 ϕ_c 为临界角)。而 $\phi + \theta = \pi/2$, 有 $\cos \theta \geq n_2/n_1$ 。于是, 子午光线在纤芯与

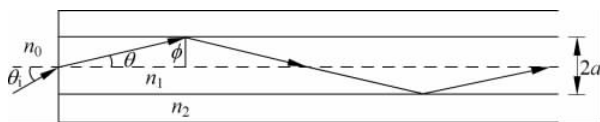


图 3.4 子午光线传输分析示意图

包层界面之间进行全反射的条件为

$$n_0 \sin \theta_i = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 \sqrt{2\Delta} \quad (3.2)$$

式中, θ_i 为光线的入射角, 即光线与 z 轴的夹角。式(3.2)即为光纤的数值孔径 NA, 它是表征光纤性能的重要参数, 其大小标志着光纤与有源器件(如光源、激光器、放大器等)或无源器件(连接器、偏振器、滤波器、隔离器、光纤光栅等)连接时耦合效率的大小。显然, 光纤的数值孔径只决定于其折射率, 而与光纤的几何尺寸无关。

由于子午光线在光纤内的传输路径是锯齿形折线, 所以光线在光纤中的路径一般都大于光纤的长度。考虑长度为 L 的一段直光纤, 设其总光路长度为 $S_{\mp}$, 总全反射次数为 $R_{\mp}$, 根据图 3.4 中的几何关系, 得到

$$S_{\mp} = \frac{L}{\cos \theta} = \frac{L}{\sin \phi} \quad (3.3)$$

由 $n_0 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta$, 可推出如下关系式:

$$S_{\mp} = \frac{n_1 L}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (3.4)$$

而 $R_{\mp}$ 可表示为

$$R_{\mp} = \frac{L}{d(\cot \theta)} = \frac{\sin \theta}{d} \cdot S_{\mp} \quad (3.5)$$

整理得到

$$R_{\mp} = \frac{n_0 L \sin \theta_i}{d \sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (3.6)$$

式中, $d=2a$ 为纤芯直径。上述关系式说明, 在长度为 L 的一段直光纤中, 子午光线传输的总光路长度 $S_{\mp}$ 只取决于入射角 θ_i 和相对折射率 n_0/n_1 , 而与光纤直径 d 无关; 总全反射次数 $R_{\mp}$ 与纤芯直径 d 成反比。

从光线光学的角度考虑, 在光纤中满足全内反射条件的传输光线对应于光波导中传输的导模, 而具有大入射角的光线则对应于更高阶的导模。

3.2.2.2 子午光线的色散

在光纤通信中, 大多采用脉码调制(PCM)方式传递信息。用 PCM 传输时, 在接收端脉冲将展宽, 这将大大限制单位时间内信息的传输容量, 这种脉冲展宽现象称为色散(有关色散的内容在第 1 章中已有阐述)。在多模光纤中, 产生色散的主要因素是多模色散, 而材料色散和波导色散通常可以忽略不计。所谓多模色散, 是指发射端的脉冲同时激励起许多传输模式, 由于不同模式的群速度不同导致各个脉冲到达接收端的时刻不同而引起的展宽现象。

若用光线理论(适用于多模光纤)来说明, 可以把多模色散视为由各个光线轨迹沿光纤轴向的平均速度不同所造成的。

设光波在纤芯中的速度为 v , 由图 3.4 可知, 子午光线沿光纤轴向的速度为 $v_z = v \cos \theta$ 。

当 $\theta=0^\circ$, 子午光线传输最快; 当 $\phi=\phi_c$ (临界角) 时, $\cos\theta=n_2/n_1$, 子午光线传输最慢。

子午光线传输所用的最短时间和最长时间分别为

$$t_{\min} = \frac{L}{v_{\max}} = \frac{L}{v} = \frac{Ln_1}{c} \quad (3.7)$$

$$t_{\max} = \frac{L}{v_{\min}} = \frac{L}{v\left(\frac{n_2}{n_1}\right)} = \frac{Ln_1^2}{cn_2} \quad (3.8)$$

于是, 在传输距离 L 内, 子午光线传输所用的最短时间和最长时间的时延差为

$$\tau = t_{\max} - t_{\min} = \frac{Ln_1}{c} \cdot \left(\frac{n_1 - n_2}{n_2}\right) \approx t_{\min}\Delta \quad (3.9)$$

式(3.9)说明, 时延差 τ 与相对折射率差 Δ 成正比。从模式分析的角度而言, 当入射光的频率固定时, Δ 越小, 则光纤中可以传输的模式越少, 因而时延差也就越小。例如, 对于 $n_1=1.6$, $\Delta=1\%$ 的光纤而言, $\tau=50\text{ns/km}$, 它对应于可传输的频带宽度(带宽)约为 20MHz 。光纤越长, 时延差越大, 可传输的带宽就越窄。

在上述分析中, 未考虑光纤在纤芯-包层界面发生全反射而产生的 Goos-Hänchen 相移现象。我们采用光线理论分析时, 一直把光纤视为较粗的多模光纤来分析处理, 因此这种近似所造成的误差相对较小。更精确的理论分析须依靠后面讨论的波动理论, 这里不做具体分析。有关 Goos-Hänchen 相移的大小, 在此仅给出其计算结果, 即光波在介质波导界面上的每一次全反射引起的相移(相位滞后), 其大小分别如下:

(1) 当电场向量与入射面垂直时, 有

$$\varphi_{\perp} = 2\arctan\left[\frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k^2}}{\sqrt{n_1^2 k^2 - \beta^2}}\right] \quad (3.10a)$$

(2) 当电场向量与入射面平行时, 有

$$\varphi_{//} = 2\arctan\left[\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\right)\frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k^2}}{\sqrt{n_1^2 k^2 - \beta^2}}\right] \quad (3.10b)$$

式中, $k=\omega/c$, $\beta=n_1 k \cos\theta$ (θ 为波矢 $\mathbf{k}$ 与光波传输方向 z 轴的夹角) 表示光波的纵向(光纤轴向)传输常数。

3.2.3 偏斜光线的传输分析

与子午光线不同, 偏斜光线的传输一般很复杂, 需借助立体几何知识加以分析, 偏斜光线传输分析如图 3.5 所示。其中, 一方向矢量 $\mathbf{S}_0 = L_0 \mathbf{e}_x + M_0 \mathbf{e}_y + N_0 \mathbf{e}_z$ 的偏斜光线, 入射到纤芯半径为 a 的光纤端面位置 $\mathbf{P}_0 = x_0 \mathbf{e}_x + y_0 \mathbf{e}_y$ 上。设 $\mathbf{r}_m$ 表示第 m 次反射点的径向矢量, $\mathbf{S}_m$ 为紧接第 m 次反射前的光线方向矢量。

于是, 根据反射前后的光线共在一个平面内的条件, 得到

$$(\mathbf{S}_m - \mathbf{S}_{m+1}) \times \mathbf{r}_m = 0 \quad (3.11)$$

再由入射角等于反射角的条件, 得到

$$(\mathbf{S}_m + \mathbf{S}_{m+1}) \cdot \mathbf{r}_m = 0 \quad (3.12)$$

此外, 在纤芯-包层界面发生全反射的条件下, 可得到

$$\frac{\mathbf{S}_m}{|\mathbf{S}_m|} \cdot \frac{\mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_m|} \leq \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1} \quad (3.13)$$

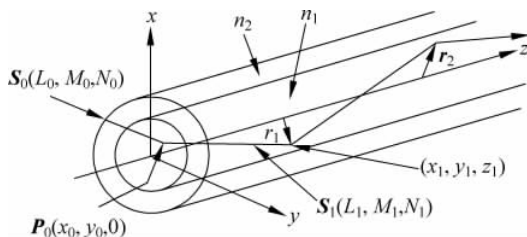


图 3.5 偏斜光线传输分析示意图

对式(3.11)和式(3.12)进行解析几何演算,考虑在 P_0 处入射时的参数并对 S_m 归一化 ($|S_m|=1$),则式(3.13)的全反射条件可具体表示为

$$\sqrt{L_0^2 + M_0^2 - \left(\frac{x_0 M_0 - y_0 L_0}{a}\right)^2} \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3.14)$$

式(3.14)也表示均匀光纤中偏斜光线的一个重要性质,即满足该式的入射光线均可成为偏斜光线,在光纤(或光波导)中能够实现全反射。如果考虑偏斜光线在 $|x_0|=a, y_0=0$ 的位置入射,则式(3.14)的左侧变为 L_0 而与 M_0 无关。因此,若光线几乎与 y 轴平行入射 ($M_0 \approx 1$),且 $|x_0| \approx a, y_0 \approx 0$,则光线将被闭锁在纤芯之内。此时,光线在纤芯-包层界面上反复发生全反射,整体则以螺旋方式传输。然而,这种螺旋光线在 z 轴方向的传输速度非常缓慢。考虑到偏斜光线的存在,由于光纤入射端获得某种激励条件,可能使均匀光纤产生很大的多模色散。然而,这种极端情况实际上一一般较难出现。因此,式(3.9)仍然可以作为一个能给出大致色散值的有效公式来使用。

与式(3.4)、式(3.6)的推导类似,根据图 3.5 中的几何关系,可以得到长度为 L 的一段直光纤中偏斜光线总光路长度 $S_{\text{斜}}$ 和总全反射次数 $R_{\text{斜}}$ 的关系式分别为

$$S_{\text{斜}} = \frac{n_1 L}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_i}} = S_{\text{子}} \quad (3.15)$$

$$R_{\text{斜}} = \frac{n_0 L \sin \theta_i}{d \sin \theta_{\phi} \sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_i}} = \frac{R_{\text{子}}}{\sin \theta_{\phi}} \quad (3.16)$$

3.2.4 弯曲光纤的光线传输分析

光纤在使用中会受到各种形式的外界作用,导致某种程度的弯曲。这时,光纤的光路长度、数值孔径等诸多参数都会发生变化。在实际使用中,光纤经常处于弯曲状态。对长度为 L 的一段弯曲光纤,其总光路长度 $S_{\text{弯}}$ 、总反射次数 $R_{\text{弯}}$ 以及数值孔径(孔径角 θ_0)等参数都将因光纤弯曲程度的不同而发生变化。

图 3.6 为光纤弯曲时光线的传输示意图。其中,光线在 C 处发生弯曲,光线在离

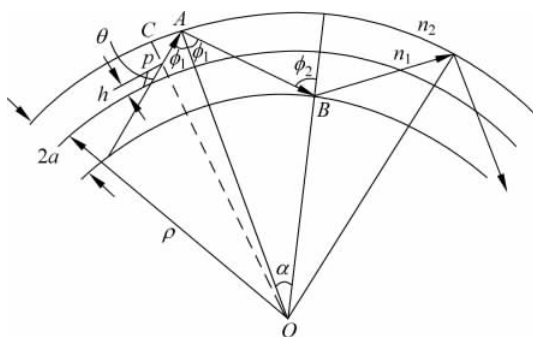


图 3.6 光纤弯曲时光线传输示意图

中心轴 h 处的 p 点进入弯曲区域,两次全反射点之间的距离为 AB ,其他参量如图中所示(其中 p 点处的 θ 与图 3.4 中的 θ 一致)。

3.2.4.1 两种 $S_{\text{弯}}$ 的推导方法

估算法在科研工作中具有重要意义,常用于对某些可量化的参量进行初步估算,以便得到该参量的一般形式和数量级概念。下面首先采用估算法对长度为 L 的一段弯曲光纤的总光路长度 $S_{\text{弯}}$ 进行推导,然后采用几何法进行严格推证。

1. 估算法

考虑到直光纤是弯曲光纤当曲率半径 $\rho \rightarrow \infty$ 时的极限情况,可以假设

$$S_{\text{弯}} = \xi \cdot S_{\text{子}} \quad (3.17)$$

式中, $\xi = \xi(\rho, \alpha)$ 是变换系数,与 ρ 和 α 相关。由于 $S_{\text{子}}$ 已知,因此主要的工作在于对系数 ξ 进行有效估算。根据图 3.6 中的几何关系,可假设 ξ 具有如下形式:

$$\xi \approx \frac{L_{\text{内}}}{L_{\text{中}}} = \frac{\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\rho - a}{\rho} \quad (3.18)$$

由于 α 很小,则 $\alpha \approx \sin \alpha$ 。于是,为使 $\xi = \xi(\rho, \alpha)$ 成立,式(3.18)的估计形式为

$$\xi \approx \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) \quad (3.19)$$

于是,得到式(3.17)的形式为

$$S_{\text{弯}} \approx \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) S_{\text{子}} \quad (3.20)$$

下面的推导证明了上述估算法是有效的,即估算法与将采用的几何法推导的结果是一致的。

2. 几何法

几何法是一种严格的推证方法,在科研中常用于对某些可量化的参量进行精确推算。在图 3.6 中的三角形 OAB 中应用正弦定理,得到

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{\rho - a}{\sin \phi_1} \quad (3.21)$$

于是, AB 可表示为

$$AB = \frac{\sin \alpha}{\sin \phi_1} (\rho - a) = \sin \alpha \frac{\Delta L}{\rho \alpha} \cdot \frac{\rho - a}{\sin \phi_1} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\Delta L}{\sin \phi_1} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)$$

式中, a 为纤芯半径, ρ 为光纤曲率半径, $\Delta L = \rho \alpha$ 表示光纤对应于圆心角为 θ 的中线弧长。长度为 L 的一段弯曲光纤的总光路长度 $S_{\text{弯}}$ 为

$$S_{\text{弯}} = \frac{AB}{\Delta L} \cdot L = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) \frac{L}{\sin \phi_1} \quad (3.22)$$

注意式(3.3),最后得到

$$S_{\text{弯}} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) S_{\text{子}} \quad (3.23)$$

与式(3.20)相比,式(3.23)是精确的推导结果。显然,当 $\rho \rightarrow \infty$ 时, $\alpha \rightarrow 0$, 弯曲光纤转化为直光纤,这时 $S_{\text{弯}} \rightarrow S_{\text{子}}$ 。由于 $\sin \alpha / \alpha < 1$, $(a/\rho) < 1$, 因而有 $S_{\text{弯}} < S_{\text{子}}$ 。这说明,当光纤弯曲时,子午光线的总光路长度会随之减小。

3.2.4.2 $R_{\text{弯}}$ 的推导

在图 3.6 中的三角形 OAB 中继续应用正弦定理,得到

$$\frac{OA}{\sin\phi_2} = \frac{OB}{\sin\phi_1} \quad (3.24)$$

由 $OA=\rho+a$, $OB=\rho-a$ 和 $\phi_2=\phi_1+\alpha$, 得到

$$\Delta L = \alpha \cdot \rho = \alpha \cdot a \cdot \frac{\sin\phi_2 + \sin\phi_1}{\sin\phi_2 - \sin\phi_1} = \alpha \cdot a \cdot \frac{\sin\phi_1 \cos\alpha + \cos\phi_1 \sin\alpha + \sin\phi_1}{\sin\phi_1 \cos\alpha + \cos\phi_1 \sin\alpha - \sin\phi_1} \quad (3.25)$$

在光纤微弯假设条件下, α 很小, 即 $\rho \gg a$, $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$, 式(3.25)简化为

$$\Delta L = \alpha \cdot a \cdot \frac{2\sin\phi_1 + \alpha \cdot \cos\phi_1}{\alpha \cdot \cos\phi_1} = a(2\tan\phi_1 + \alpha) \quad (3.26)$$

根据式(3.26), 可得到长度为 L 的一段弯曲光纤中子午光线的总反射次数 $R_{\text{弯}}$ 的表达式为

$$R_{\text{弯}} = \frac{L}{\Delta L} = \frac{R_{\text{直}}}{1 + \frac{\alpha \cdot a}{L} R_{\text{直}}} \quad (3.27)$$

由式(3.27)可推知 $R_{\text{弯}} < R_{\text{直}}$, 即当光纤弯曲时, 与同样长度的直光纤相比, 子午光线的反射次数会变少。

3.2.4.3 θ_0 的推导

在图 3.6 中的三角形 OAp 中应用正弦定理, 得到

$$\frac{\rho+h}{\sin\phi_1} = \frac{\rho+a}{\sin(90^\circ+\theta)} = \frac{\rho+a}{\cos\theta} \quad (3.28a)$$

式(3.28a)可简化为

$$\cos\theta = (\rho+a) \frac{\sin\phi_1}{\rho+h} \quad (3.28b)$$

利用光线在纤芯与包层界面处的全反射条件 $\sin\phi \geq \sin\phi_c = n_2/n_1$ (其中 ϕ_c 为临界角), 代入式(3.28)可得 inequality

$$\cos\theta \geq \frac{\rho+a}{\rho+h} \cdot \frac{n_2}{n_1} \quad (3.29)$$

于是有

$$\sin\theta \leq \sqrt{1 - \left(\frac{\rho+a}{\rho+h}\right)^2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \quad (3.30)$$

由 $n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta$, 得到光纤弯曲时孔径角 θ_0 的正弦表达式为

$$\sin\theta_0 = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \left(\frac{\rho+a}{\rho+h}\right)^2} \quad (3.31)$$

下面对式(3.31)进行分析。令光纤平直时的孔径角为 $\theta_0(\rho \rightarrow \infty)$, 则有

(1) 当 $h=a$ 时, $\sin\theta_0|_{h=a} = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$, 有 $\theta_0|_{h=a} = \theta_0|_{\rho \rightarrow \infty}$, 与平直光纤情况相同。

(2) 当 $h=0$ 时, $\sin\theta_0|_{h=0} = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \left(1 + \frac{a}{\rho}\right)^2}$, 有 $\theta_0|_{h=0} < \theta_0|_{\rho \rightarrow \infty}$, 即小于平直光纤

孔径角。

(3) 当 $h = -a$ 时, $\sin\theta_0 = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \left(\frac{\rho+a}{\rho-a} \right)^2}$, 有 $\theta_0|_{h=-a} < \theta_0|_{h=0}$, 即小于上述 $h=0$ 时的孔径角。

由上述讨论可知, 光纤弯曲时其端面上各点的孔径角不同, 其规律是沿光纤弯曲的方向由大变小。光纤弯曲时, 由于全反射条件不满足, 其透光量会下降。

3.2.5 斜端面光纤的光线传输分析

光纤端面与其中心轴不垂直时, 将引起光束发生偏折, 这是实际应用中需要重视的一个问题。

3.2.5.1 光纤的入射端面倾斜

图 3.7 为入射端面倾斜时光纤中的光线传输示意图。为简化且不失一般性, 下面以子午光纤为例分析说明。

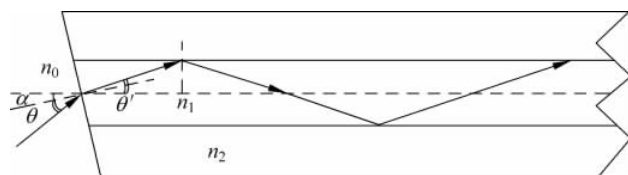


图 3.7 入射端面倾斜时光纤中的光线传输示意图

设 α 为光纤端面的倾斜角, θ 和 θ' 分别为端面倾斜时光线的入射角和折射角(光线与轴线的夹角)。由图 3.7 中的几何关系, 得到

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{n_0 \sin\theta}{n_1} \right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2} - \frac{n_0 n_2}{n_1^2} \sin\theta \quad (3.32)$$

式(3.32)说明: 当 n_1 、 n_2 和 n_0 不变时, 倾斜角 α 越大, 接收角就越小。所以, 光纤入射端面倾斜后, 要接收入射角为 θ 的光线, 其值要大于正常端面的孔径角。反之, 若光线入射方向和倾斜端面的法线方向分别在光纤中心轴的两侧, 则其接收光的范围就增大了 α 角。

下面讨论两种特殊情况。当 $\theta=0$ 时, 式(3.32)简化为

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2} \quad (3.33a)$$

式(3.33a)说明: 对于斜端面光纤, 垂直于斜端面的光线在光纤中发生全反射时, 倾斜角 α 需满足此极限, 即

$$\sin\alpha \leq \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2} \quad (3.33b)$$

当 $\theta=90^\circ$ 时, 式(3.32)简化为

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_1} \right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2} - \frac{n_0 n_2}{n_1^2} \quad (3.34a)$$

式(3.34a)说明: 对于斜端面光纤, 要使光纤能够接收 $\theta=90^\circ$ 范围内的光, 则倾斜角 α 必须满足如下的极限条件:

$$\sin\alpha \leq \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_1} \right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2} - \frac{n_0 n_2}{n_1^2} \quad (3.34b)$$

由式(3.32)并注意到数值孔径 $NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$, 可以得到 NA 的表达式为

$$NA = \frac{n_1^2 \sin \alpha + n_0 n_2 \sin \theta}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.35)$$

由式(3.35)可知,要接收入射角为 θ 的光线,数值孔径必须大于正常端面的数值孔径。

3.2.5.2 光纤的出射端面倾斜

光纤入射端面的倾斜会引起光束发生偏折,光纤出射端面的倾斜也会引起出射光线的角度发生变化。对于正常的非倾斜出射端面,其出射光线具有光纤轴对称性,而出射端面的倾斜则导致了这种对称性的破坏。

图 3.8 给出了出射端面倾斜时光线的偏折示意图。

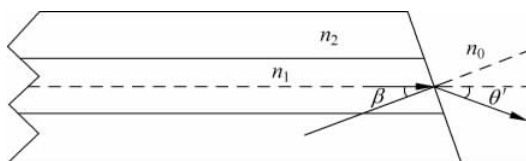


图 3.8 出射端面倾斜时光线的偏折示意图

设 β 为出射端面的倾斜角,当 $\beta \neq 0$ 时,原来平行于光纤轴的光线不再以与端面垂直的方向出射,出射光线将发生偏折,其偏向角 θ' 可写为

$$\theta' = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_0} \sin \beta\right) - \beta \quad (3.36)$$

3.2.6 圆锥形光纤的光线传输分析

圆锥形光纤是指其直径沿其轴向呈线性变化的光纤。锥形光纤因其结构的特殊性,使其在光纤无源器件和有源器件的设计和研制中颇受重视,尤其在光学元件的耦合中应用更为广泛。图 3.9 是子午光线在圆锥形光纤中的传输示意图。

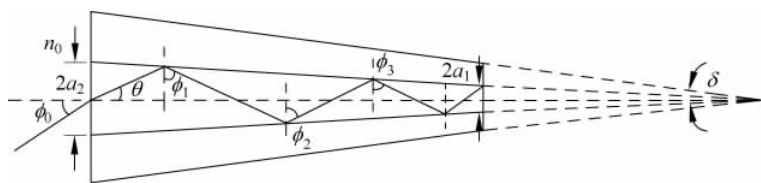


图 3.9 圆锥形光纤中的子午光线传输示意图

设 δ 为圆锥形光纤的纤芯锥角。在圆锥形光纤中,光线在纤芯-包层分界面上反射角 ϕ_m ($m=1, 2, \dots, N$) 随反射次数 m 的增加而逐渐减小。当光线以 ϕ_0 角入射到圆锥形光纤的大端时,折射角为 θ 。由于锥角 $\delta > 0$, 因而光线在内壁发生第一次反射后,反射角就减小 $\delta/2$ 。从第二次开始,其后的每次反射,反射角就减小 δ 。这种规律可用数学关系式分别表示为

$$\phi_1 = 90^\circ - \theta - \frac{\delta}{2}$$

$$\phi_2 = 90^\circ - \theta - \frac{3}{2}\delta$$

$$\begin{aligned}
\phi_3 &= 90^\circ - \theta - \frac{5}{2}\delta \\
&\vdots \\
\phi_n &= 90^\circ - \theta - \frac{2n-1}{2}\delta
\end{aligned} \tag{3.37}$$

注意到 $n_0 \sin \varphi = n_1 \sin \theta$, 有 $\theta = \arcsin[(n_0/n_1) \sin \varphi]$, 代入式(3.37), 得到

$$\phi_m = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1} \sin \varphi\right) - \frac{2m-1}{2}\delta \tag{3.38}$$

式(3.38)说明, 当光线从圆锥形光纤的大端入射时, 由于反射角 ϕ_m 随反射次数的增加而不断减小, 所以全反射条件不满足的情况可能会出现。即总会在某一次反射后, 全反射条件不满足时, 光线就会从光纤的侧壁逃逸出去。另外, 即便锥角 δ 很小, 只要反射次数足够多, 也会在某一次反射后出现 $\phi_m < \phi_c$, 从而使全反射条件受到破坏。同理可分析光线从圆锥形光纤小端入射时光线的传输性质。

根据全反射条件, 要使入射光线都能从光纤另一端出射, 则应满足

$$\sin\left(\theta + \frac{\delta}{2}\right) \leq \frac{a_1}{a_2} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \tag{3.39}$$

式中, a_1, a_2 分别为光纤出射端(小端)和入射端(大端)的半径。若 $\cos(\delta/2) \approx 1$, 则由式(3.39)可得一般情况下圆锥形光纤聚光的条件为

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \frac{\frac{a_1}{a_2} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} - \sin \theta}{\cos \theta} \tag{3.40}$$

再利用关系式 $\sin(\delta/2) = (a_2 - a_1)/l$, 得到

$$l \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2(a_2 - a_1) \cos \theta}{\frac{a_1}{a_2} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} - \sin \theta} \tag{3.41}$$

式中, l 为光纤的长度。当光线平行于光纤轴入射时, 有 $\theta = 0$, 这时式(3.41)可简化为

$$l \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2(a_2 - a_1)}{\frac{a_1}{a_2} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} \tag{3.42}$$

式(3.41)和式(3.42)说明, 为使圆锥形光纤聚光, 光纤存在一个最小长度 l_0 , l_0 与圆锥形光纤两端的直径、纤芯及包层折射率有关。在一般情况下, l_0 还与光线的入射角有关。

另外, 圆锥形光纤两端孔径角不一样, 大端孔径角 ϕ_0 小, 小端孔径角 ϕ'_0 大, 二者满足如下关系式:

$$a_2 \sin \phi_0 = a_1 \sin \phi'_0 \tag{3.43}$$

式中,

$$\sin \phi'_0 = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{3.44a}$$

$$\sin \phi_0 = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{3.44b}$$

由此可见, 圆锥形光纤可改变孔径角, 因此可用于光场的耦合。

3.3 渐变光纤的光线理论分析

3.3.1 渐变光纤中的光线种类

这里的渐变光纤是指纤芯的折射率是渐变的,而包层的折射率是均匀的光纤。渐变型光纤的折射率分布一般表达式为

$$n(r) = \begin{cases} n_1 [1 - 2\Delta \cdot f(r/a)]^{\frac{1}{2}} & 0 \leq r \leq a \\ n_2 & a < r \leq b \end{cases} \quad (n_1 > n_2) \quad (3.45)$$

式中, n_1 是 $r=0$ 的折射率,函数 f 满足 $f(r/a) \leq f(1)=1$,一般可取 $f(r/a)=(r/a)^g$ 。 Δ 为光纤的相对折射率差, g 为折射率分布参数,它决定了折射率分布曲线的形状。当 $g=\infty$ 时,即为阶跃折射率分布光纤;当 $g=2$ 时,称为平方律分布(或抛物线分布)光纤,亦称聚焦光纤;当 $g=1$ 时,为三角分布光纤。 $n(r)$ 与 r 的关系曲线如图 3.10 所示。

在渐变光纤中亦存在子午光线和偏斜光线两类光线。但偏斜光线不会出现折线轨迹,而是一系列空间歪斜状轨迹。从光纤端面观察,空间歪斜光线是如图 3.11(a)所示的类椭圆轨迹。在特殊情况下,从光纤端面观察,可出现如图 3.11(b)所示的圆形轨迹,即螺旋光线(HR)。

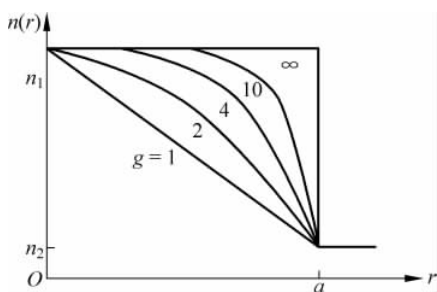


图 3.10 对不同的 g 值, 渐变光纤折射率 $n(r)$ 与 r 的关系曲线

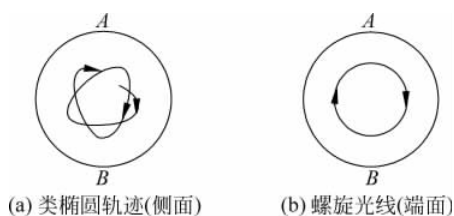


图 3.11 渐变光纤中的偏斜光线轨迹示意图

3.3.2 渐变光纤的光线方程

假定渐变光纤的折射率分布是轴对称的,即 $n=n(r)$, $dn/d\theta=0$, $dn/dz=0$ 。于是,由式(2.28c)直接积分得到 $n(dz/ds)=C$ (常数),令 $C=n(r_0)N_0$,则有

$$ds = \left[\frac{n(r)}{n(r_0)N_0} \right] dz \quad (3.46)$$

式中, N_0 为入射光方向余弦, $n(r_0)$ 是入射位置 r_0 处的折射率。由式(3.46)和式(2.28b)消去 n , 得到

$$\frac{dr}{ds} \cdot \frac{d\theta}{dz} + \frac{d}{ds} \left(r \frac{d\theta}{dz} \right) = 0 \quad (3.47)$$

由于上式可以改写为 $\frac{d}{ds} \left(r^2 \frac{d\theta}{dz} \right) = 0$ 。于是,根据入射位置的初始值,得到

$$r^2 \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{N_0} (x_0 M_0 - y_0 L_0) \quad (3.48)$$

现在,通过式(3.46)把式(2.28a)转换为关于 z 的微分,再利用式(3.48),则式(2.28a)可以积分成

$$z = \int_{r_0}^r \frac{N_0 dr}{\sqrt{\left[\frac{n(r)}{n(r_0)}\right]^2 + \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] (x_0 M_0 - y_0 L_0) - N_0^2}} \quad (3.49)$$

式(3.49)就是折射率分布为轴对称的渐变光纤的光线方程。于是,当折射率分布 $n(r)$ 和入射条件 L_0, M_0, N_0, r_0 (或者 x_0, y_0) 皆为已知时,可用式(3.49)计算出光线的轨迹,即得到 r 和 z 的关系式。

3.3.3 渐变光纤的子午光线分析

下面以子午光线为例,具体说明渐变光纤光线方程式(3.49)的应用。考查 $y_0 = M_0 = 0$, $x_0 = r_0$ 而不失一般性,式(3.49)可简化为

$$z = \int_{r_0}^r \frac{N_0 dr}{\sqrt{\left(\frac{n(r)}{n(r_0)}\right)^2 - N_0^2}} \quad (3.50)$$

作为折射率分布的一个例子,首先考虑 $n(r)$ 是平方分布的情形,即

$$n^2(r) = n_1^2 [1 - (\zeta r)^2] \quad (3.51)$$

式中, n_1, ζ 均为常数。将式(3.51)代入式(3.50),积分可得

$$r = A \sin\left(\frac{\zeta n_1 z}{n(r_0) N_0} + B\right) \quad (3.52)$$

式中, $A = \frac{1}{\zeta} \sqrt{1 - N_0^2 [1 - (\zeta r_0)^2]}$, B 为常数。

式(3.52)描述了子午光线在折射率分布为轴对称的渐变光纤中的光线轨迹,这是沿 z 轴弯曲前进的准正弦曲线。当 $[n(r_0) N_0]/n_1 \rightarrow 1$ 时,其准周期为

$$\Lambda \approx \frac{2\pi}{\zeta} \quad (3.53)$$

式(3.53)表明:子午光线的周期 Λ 近似由 ζ 决定,在一级近似条件下,可用式(3.53)表示。在严格的计算中,则应由入射条件 r_0 和 N_0 的函数给出。事实上,研究分析证明:对于相当接近平方律的折射率分布,其周期 Λ 将不依赖于入射条件成为一常数。这时,沿光纤轴向(z 轴)的光线平均速度将不依赖于入射条件而成为一常数。

在理想情况下,只考虑子午光线时给出零色散的理想折射率分布为

$$n^2(r) = n_1^2 \left[1 - (\zeta r)^2 + \frac{2}{3} (\zeta r)^4 + \cdots \right] = n_1^2 \cdot \sec^2 h^2(\zeta r) \quad (3.54)$$

将式(3.54)代入式(3.50),直接积分,即得

$$\text{sh}(\zeta r) = \left[\frac{\text{ch}^2(\zeta r_0)}{N_0} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \sin(\zeta z) + \text{sh}(\zeta r_0) \quad (3.55)$$

由式(3.55)易知, r 与 z 成周期函数关系,其周期为

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\zeta} \quad (3.56)$$

由式(3.56)可见, Δ 与入射条件无关。

3.3.4 渐变光纤的螺旋光线分析

本节考虑偏斜光线的特殊情形——渐变光纤中的螺旋光线。在这种情况下, 光纤的折射率分布以式(3.54)表示, 并可以给出最小的色散。

如图 3.12 所示, 考虑沿半径为 r 的圆柱面上与 z 轴成角度 θ 前进的螺旋光线。

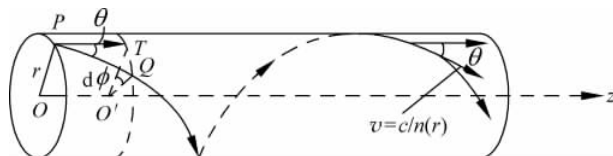


图 3.12 渐变光纤中的螺旋光线轨迹示意图

在光线方程式(2.26)中, 从一开始就假定光线只在 r 为一定的圆柱面上行进。考虑光线轨迹的曲线坐标 S , 若以 $\mathbf{r}(S)$ 表示光线轨迹上位置 S 的位置矢量, 则有 $d\mathbf{r}/dS = \hat{\mathbf{e}}_s$, 其中 $\hat{\mathbf{e}}_s$ 为沿着光线方向的单位矢量。于是, 得到

$$n(r) \frac{d\hat{\mathbf{e}}_s}{ds} = \frac{d}{ds}(n\hat{\mathbf{e}}_s) = \nabla n(r) \quad (3.57)$$

现在, 设 $\hat{\mathbf{e}}_s$ 增量的大小为 $|d\hat{\mathbf{e}}_s|$, 应用图 3.12 所示的记号, $|d\hat{\mathbf{e}}_s|$ 可以表示为

$$|d\hat{\mathbf{e}}_s| = \sin\theta d\phi \quad (3.58)$$

由图 3.12 中的“类三角形” PTQ 可得到如下关系式:

$$d\hat{\mathbf{e}}_s \cdot \sin\theta = \widehat{TQ} = r d\phi \quad (3.59)$$

根据折射率 $n=n(r)$ 呈轴对称性的性质, 有 $dn/d\theta=0, dn/dz=0$, 因此有 $\nabla n(r) = dn/dr$ 。于是, 由式(3.57)~式(3.59)可得

$$n(r) \frac{\sin^2\theta}{r} = - \frac{dn(r)}{dr} \quad (3.60)$$

式(3.60)给出了螺旋光线的半径 r 与扭转角 θ 之间的关系。

根据图 3.12 和式(3.60), z 轴方向的光速 v_z 可表示为

$$v_z(r) = \frac{\cos\theta}{n(r) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{n(r) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \sqrt{1 + \frac{r}{n(r)} \cdot \frac{dn(r)}{dr}} \quad (3.61)$$

由式(3.61)可以讨论色散为零的折射率的分布形式。令 $v_z(r)$ 为常数, 即

$$v_z(r) = \frac{1}{n_1 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = v_{z0}(\text{常数}) \quad (3.62)$$

则求解 $n(r)$ 的微分方程, 得到

$$\begin{aligned} n^2(r) &= \frac{n_1^2}{1 + (Ar)^2} \\ &= n_1^2 [1 - (Ar)^2 + (Ar)^4 - \dots] \end{aligned} \quad (3.63)$$

式中, n_1, A 均为常数。式(3.63)说明, 当所有的螺旋光线在 z 轴方向的速度完全一致时, 满足上述折射率分布形式的渐变光纤的色散为零。

小结

光线理论最大的优点在于表述光波传输物理过程的直观性和简单性。在尺寸远大于波长而折射率变化缓慢的空间,用光线理论分析光波的传输现象可以得到非常好的近似结果。

使用光线理论分析光纤需注意:用于分析多模均匀光纤时具有良好的精度,但纤芯与包层分界面上折射率跳跃变化时,光线理论不适用;用于分析 W 型多模光纤时误差较大,不能用于单模光纤分析。

均匀光纤和渐变光纤中均存在子午光线与偏斜光线,二者的子午光线性质相同但偏斜光线性质不同。子午光线在一个周期内和光纤中心轴相交两次,其轨迹是子午平面内的一系列折线,在光纤端面的投影形成一直线。均匀光纤的偏斜光线是一系列空间螺旋折线,可为左旋,亦可为右旋,其轨迹在光纤端面的投影形成一个多边形;渐变光纤的偏斜光线不会出现折线轨迹,而是一系列空间歪斜状轨迹,而且在光纤端面的投影会形成类椭圆轨迹(空间歪斜光线),特殊情况下亦可出现圆形轨迹(螺旋光线)。

渐变光纤具有自聚焦特点,经过特殊设计,可以得到具有零色散特性的渐变光纤。

估算法在科研工作中具有重要意义,常用于对某些可量化的参量进行初步估算,以便得到该参量的一般形式和数量级概念;几何法是一种严格的推证方法,在科研中常用于对某些可量化的参量进行精确推算。

思考与习题

- 3.1 子午光线和偏斜光线的轨迹及其在光纤端面的投影分别有什么特点?
- 3.2 根据图 3.5 画出 S_m 、 S_{m+1} 、 a_m 的矢量关系图,并推导式(3.13)。
- 3.3 试用估算法和几何法推导在长度为 L 的一段直光纤中偏斜光线总光路长度 $S_{斜}$ 和总反射次数 $R_{斜}$ 的关系式。
- 3.4 试用估算法和几何法推导在长度为 L 的一段弯曲光纤中子午光线传输的总光路长度 $S_{子}$ 和总反射次数 $R_{子}$ 的关系式。
- 3.5 多模光纤中多模色散产生的机理是什么? 怎样才能降低多模色散?
- 3.6 在光纤制造过程中,由于不可避免的因素而引入的光纤纵向非均匀性在一定程度上有助于减少多模光纤中的多模色散,试分析其原因。
- 3.7 推导弯曲光线在光纤中传输的总光路长度 $S_{弯}$ 及反射次数 $R_{弯}$,并和子午光线相比较。
- 3.8 光纤弯曲对光纤的传光性能有什么影响?
- 3.9 试推导斜端面光纤子午光线数值孔径的表达式。
- 3.10 光纤端面与其中心轴不垂直对光纤的传光性能有何影响?
- 3.11 描述圆锥形光纤的传光性能及其可能用途。
- 3.12 渐变光纤中光线的种类有哪些? 与均匀光纤相比有何特点?
- 3.13 证明折射率分布形式为 $n(r) = n(0) \operatorname{sech}(\sqrt{A}r)$ (A 为常数)的光纤对子午光线具有自聚焦特性(所谓自聚焦是指从一点光源发出的所有光线,通过光纤后都会

聚为一个光点,即所有光线有相同的光程,此条件可表示为 $\int_s n(r) ds = \text{const.}$ 。

- 3.14 证明折射率分布形式为 $n^2(r) = \frac{n^2(0)}{1+(Ar)^2}$ (A 为常数)的光纤对螺旋光线具有自聚焦特性(也可从等光程原理出发进行推证)。从理论上分析,理想的聚焦光纤存在吗?
- 3.15 试推导光纤在纤芯-包层界面发生全反射而产生的 Goos-Hänchen 相移表达式。
(1) $\varphi_{\perp}$ (电场向量与入射面垂直); (2) $\varphi_{//}$ (电场向量与入射面平行)。
- 3.16 试推导式(3.10a)和式(3.10b)。
- 3.17 证明式(3.13)。
- 3.18 证明式(3.14)。
- 3.19 试推导式(3.15)和式(3.16)。
- 3.20 证明式(3.39)。