高 等 代 数

徐乃楠　刘鹏飞　主　编
杜奕秋　张　敏　副主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

《高等代数》作为数学应用的基础，一直是数学学科的传统基础课程，也是大学数学各个专业的主干基础课程。其中的线性代数内容也是数学在其他学科应用的必需基础知识，是培养高等院校学生数学核心素养的必备课程。本书主要包括行列式、矩阵和向量理论、线性方程组、多项式、二次型、线性空间、欧式空间、线性变换及矩阵的标准型等内容。

本书编写过程中力求做到严谨规范、简洁易懂，注意到了初等代数与高等代数以及高等代数与其他后续专业课程的衔接。可作为综合性大学、师范院校数学系各专业的教材，还可以作为高等学校数学系教师的参考用书。

本书课件可通过网站 http://www.tupwk.com.cn/downpage 免费下载。

图书在版编目（CIP）数据

高等代数 / 徐乃楠，刘鹏飞　主编. —北京：清华大学出版社，2018

ISBN 978-7-302-47931-4

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①徐…　②刘…　Ⅲ. ①高等代数－高等学校－教材　Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 193502 号

责任编辑：王　定　程　琪
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：牛艳敏
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：13　　**字　　数**：283 千字
版　　次：2018 年 1 月第 1 版　　**印　　次**：2018 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：45.00 元

产品编号：071022-01

前　言

“高等代数”课程是高等学校数学类本科专业核心基础课程（代数、分析、几何）之一，它的主要任务是使本科生掌握基本的、系统的代数学知识，抽象的、严格的代数学方法以及广泛的、深刻的代数学思想，要求学生初步掌握行列式、矩阵、线性方程组、二次型、线性空间（变换）、欧氏空间、多项式等代数学基本理论和数学方法，为数学类专业后续课程的学习打下坚实的基础。

吉林师范大学数学学院前身是成立于1958年的四平师专数理科，“高等代数”作为专业基础课程从建校起就已经开设。1973年四平师专升格为四平师范学院，“高等代数”作为师范专业本科课程开设至今。六十年来，负责“高等代数”课程教学工作的许许多多任课教师，为了教好、建设好这门课程倾注了大量的心血和汗水，所选用过的教材多种多样，教学参考书更是不计其数。早期北大版《高等代数》一直被作为代数课程教材，但对于省属师范大学数学专业的学生而言无疑难度较大。

1998年，我系与东北师范大学数学系联合承担国家教育部本科教改项目，将高等代数与解析几何课程合并设课，从1998级学生开始使用东北师范大学王仁发牵头编写的《代数与解析几何》教材。同年“高等代数”被评为“吉林省优秀课程”，2003年顺利通过省教育厅专家组复查验收，2005年被评为“校级建设精品课程”，2006年被评为“校级网络课程”，2007年被评为“校级精品课程”和“吉林省省级精品课程”。

在“高等代数”课程讲授过程中，各位专任教师一直在探索出版一本更适合省属师范大学数学专业本科生学习的代数教材，本授课讲义也在这一过程中逐渐酝酿形成，并得到“吉林师大首届精品教材”立项资助。“高等代数”省级精品课程带头人张敏教授为此付出了辛勤的汗水，在张敏教授退休之后课程团队继续在教学实践中对讲义进行了修改和完善。感谢张力宏、杜奕秋两位教授对书稿的详细审读和所提建设性意见。感谢清华大学出版社王定、邵慧平两位编辑的辛勤付出。书中编入的一些相关教材内容和习题未能列出出处的，在此一并向作者表示感谢。欢迎“高等代数”教学战线的同行对本教材多多批评指正。

徐乃楠　刘鹏飞

2017年11月于吉林师范大学数学学院

目　录

第1章　行列式

行列式是高等代数中的一个基本概念，它不仅是讨论线性方程组的有力工具，而且也被广泛应用到数学中的其他分支学科、其他自然科学和工程技术领域，行列式已成为研究现代科学问题的有力数学工具。本章主要介绍行列式的定义、基本性质、计算方法以及求解非齐次线性方程组的克拉默法则.

1.1　排　列

定义 1.1.1　由 n 个不同的自然数组成的序数组称为 n 阶排列.

例如：2431 是 4 阶排列，45321 是 5 阶排列，$123\cdots n$ 是 n 阶排列，$n(n-1)\cdots 21$ 也是 n 阶排列．n 个数总共可做 $n!$ 个排列．只有 $123\cdots n$ 是按自然顺序递增排列的，其他排列都或多或少破坏了自然顺序.

定义 1.1.2　在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，称它们构成一个逆序．一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数，记作 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$.

例如：在排列 2431 中，数字 2 与 1、4 与 3、4 与 1、3 与 1 都构成逆序，则 $\tau(2431)=1+1+1+1=4$. 同理，$\tau(45321)=3+3+2+1=9$，$\tau(12\cdots n)=0$，$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义 1.1.3　逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如：2431 是偶排列；45321 是奇排列.

定理 1.1.1　交换一个排列中的任意两个数，其余数不动，则排列改变奇偶性.

证明：先看 n 阶排列

$$\cdots ij\cdots, \tag{1.1.1}$$

交换相邻 i 和 j 之后变为

$$\cdots ji\cdots, \tag{1.1.2}$$

显然，i，j 以外的任何一对数在(1.1.1)式和(1.1.2)式中是否构成逆序是相同的，只差 i 和 j 这对数，当 $i>j$ 时，则 $\tau(\cdots ij\cdots)=\tau(\cdots ji\cdots)+1$；当 $i<j$ 时，$\tau(\cdots ij\cdots)=\tau(\cdots ji\cdots)-1$. 总

之，(1.1.1)式和(1.1.2)式的奇偶性不同.

对一般情况，设排列

$$\cdots i k_1 k_2 \cdots k_s j \cdots \tag{1.1.3}$$

经过交换 i 和 j 得

$$\cdots j k_1 k_2 \cdots k_s i \cdots , \tag{1.1.4}$$

不难看出，这个对换可以看作是原排列经过一系列相邻两个数的对换来实现．首先原排列经过 $s+1$ 次相邻两数对换得到排列

$$\cdots k_1 k_2 \cdots k_s j i \cdots ,$$

然后，j 与 k_s，k_2，…，k_1 依次进行 s 次对换就得到(1.1.4)式，一共经过 $2s+1$ 次对换来实现. 由上面证明，排列共改变了 $2s+1$ 次奇偶性，因 $2s+1$ 是奇数，所以最终还是改变了排列的奇偶性.

推论 1.1.1　n 个数($n\geqslant 2$)的奇排列和偶排列的个数相等，各占一半，为$\frac{n!}{2}$.

证明：设 n 个数共有 p 个奇排列，q 个偶排列，则 $p+q=n!$，假设全部不同的偶排列为

$$i_1 i_2 \cdots i_n ,$$
$$j_1 j_2 \cdots j_n ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$k_1 k_2 \cdots k_n ,$$

交换所有这些偶排列的第一个和第二个数，得下列排列：

$$i_2 i_1 \cdots i_n ,$$
$$j_2 j_1 \cdots j_n ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$k_2 k_1 \cdots k_n .$$

显然，这些都是奇排列且互不相同，所以 n 个数的每个 n 级排列都做(i，j)对换的话，则每个偶排列都变成了奇排列，且不同的偶排列一定变成不同的奇排列，因此奇排列的个数大于等于偶排列的个数，即 $p\geqslant q$；同理，可证偶排列的个数大于等于奇排列的个数，即 $q\geqslant p$. 因此，$p=q=\frac{n!}{2}$.

1.2　n 阶行列式的定义

定义 1.2.1　由 n^2 个数排成的 n 行 n 列的表，在其两端各画一条竖线，定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

其中，$i_1 i_2 \cdots i_n$ 取遍 n 个数的所有排列（$\sum$ 表示对 $123\cdots n$ 的一切排列求和），称此式为 n 阶行列式．$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ 为行列式的项，a_{ij} 为第 i 行第 j 列的元素．定义表明 n 阶行列式是所有位于不同行不同列的 n 个元素的连乘积的代数和，称为行列式的值，即有如下特性：

（1）n 阶行列式共 $n!$ 项；

（2）每一项都是 n 个元素的连乘积；

（3）每一项的 n 个元素既位于不同行也位于不同列；

（4）每一项确定符号后再相加；

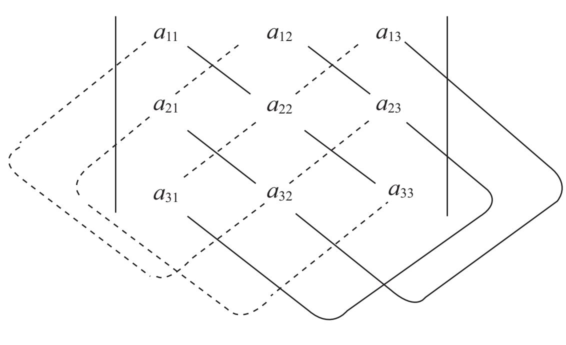
（5）行列式的结果是一个数.

例如：2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

例 1.2.1　求 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

解： 由于 3 个数的 3 阶排列共有 $3! = 6$ 个，即 123，132，213，231，312，321，所以 3 阶行列式结果为 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

显然 3 阶行列式有 $3!$ 项，且 3 项符号为正，3 项符号为负，3 阶行列式的计算公式可按照如下对角线法则进行记忆，即实线 3 个数字相乘为正号，虚线 3 个数字相乘为负号.



例 1.2.2 计算 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$ 和 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}$.

解： $|\boldsymbol{A}|=4-6=-2$，$|\boldsymbol{B}|=-4+32-6-24-4-8=-14$.

例 1.2.3 计算上三角形行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$.

解： 由行列式定义 $D=\sum\limits_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$，考查一般项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$，只有当 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 时，该项才可能不为 0，而 $\tau(12\cdots n)=0$，所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$(同理可证下三角形行列式和对角性行列式的值都等于 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$).

例 1.2.4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0\\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0\\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44}\end{vmatrix}$.

解： 由行列式定义 $D=\sum\limits_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}$，由于 $i_1 i_2 i_3 i_4$ 都分别有两种选择，当 $i_1=1$ 时则 $i_4=4$，所以 D 中含 a_{11} 且不为 0 的项只有两个 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，同理含 a_{14} 且不为 0 的项也只有两个 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$，最后确定各项符号，$D=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$.

例 1.2.5 求证行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0\\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0\\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$.

证明： 由行列式的定义 $D=\sum\limits_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}a_{5i_5}$，因为 $i_3 i_4 i_5$ 中至少有一个取 3 或 4 或 5(不可能都取 1，2)，所以 D 的每一项都是 0，因此 $D=0$.

例 1.2.6 确定下列乘积是否是行列式的项，如果是，请确定符号.

(1) 在 4 阶行列式中，$a_{13}a_{24}a_{33}a_{41}$，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

(2) 在 5 阶行列式中，$a_{13}a_{52}a_{41}a_{35}a_{24}$，$a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}a_{52}$.

解：(1) $a_{13}a_{24}a_{33}a_{41}$ 不是 4 阶行列式的项，该项中第 1 个元素和第 3 个元素同位于第 3 列；$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 是 4 阶行列式的项，且符号为负，由于 $\tau(4312)=5$.

(2) $a_{13}a_{52}a_{41}a_{35}a_{24}$，$a_{13}a_{24}a_{35}a_{41}a_{52}$ 都是 5 阶行列式的项，且符号都为正，由于 $\tau(34512)=6$.

行列式这个特殊符号表示的数产生于解线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. & (2) \end{cases}$$

用 a_{22} 乘(1)减去 a_{12} 乘(2)，消去 x_2 得 $(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$；同理，消去 x_1 得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$. 如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，于是，原方程组的唯一解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases}$$

读者可自行利用消元法，仿照上述方法写出三元一次方程组的求解公式，并用 3 阶行列式的这种记数的方法，使三元一次方程组的求解公式能更好地记忆和应用．为了解 n 元一次线性方程组，猜想它的求解公式可由 n 阶行列式的比值表示出来，所以我们有必要将高中学过的 2 阶、3 阶行列式推广至 n 阶行列式.

定理 1.2.1　令 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是 n 阶行列式的项，并设 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=s$，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=t$，则此项的符号为 $(-1)^{s+t}$.

证明： 由于将此项的某两个因子位置交换，相当于对此项的行标排列和列标排列，同时经过一个对换，因而行标排列和列标排列同时改变奇偶性，因此，总体说来并没有改变 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性．这样一来，我们总可经若干次交换，将此项的因子次序变为 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$，此时有 $\tau(12\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)$ 与 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性相同，因此，此项的符号为 $(-1)^{s+t}$.

由行列式的定义，确定此项的符号，需要把此项的各元素进行调动，使其行的下标数按自然顺序排列 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$，那么此项的符号为 $(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$. 综上所述，得

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{k_1j_1}a_{k_2j_2}\cdots a_{k_nj_n} \\ &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}. \end{aligned}$$

有时为了研究行列式的需要，行列式的行标和列标并不一定用前 n 个自然数来表示，例如 3 阶行列式 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}=\sum\limits_{i_1i_2i_3}(-1)^{\tau(i_1i_2i_3)}a_{2i_1}a_{3i_2}a_{5i_3}$，其中 $i_1i_2i_3$ 是 124 的排列.

1.3 行列式的性质

行列式的计算是一个十分重要的问题，但当行列式阶数 n 很大时，$n!$ 是一个相当大的数，按行列式定义去计算行列式的值往往很困难．本节将介绍行列式的性质，可以简化行列式的计算，便于行列式的应用.

设 n 阶行列式 D 和 D' 分别为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 D' 为行列式 D 的转置行列式．显然，D' 是 D 互换行和列的位置得到的行列式.

性质 1.3.1 一个行列式与它的转置行列式是相等的，即 $D=D'$.

证明： 由行列式的定义，行列式 D 的任意一项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$，其 n 个元素位于 D 的不同行不同列，所以就位于 D' 的不同列不同行，因而也是 D' 的一项，符号都是 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}$；反过来，$D'$ 中的任意一项也是 D 的一项．D' 与 D 的项数均为 $n!$，所以 D' 与 D 是带有相同符号的相同项的代数和，即 $D=D'$.

行列式的这条性质说明，行列式的行和列的地位是对称的，凡是有关于行的性质，对列也都成立；反之亦然。因此在下面所谈的行列式性质只针对行来说，对于列同样成立.

性质 1.3.2 互换行列式的两行，行列式改变符号.

证明： 设给定行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array},$$

交换 D 的第 i 行与第 j 行，得到新行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

由行列式的定义，有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{nk_n} \\ &=-\sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{nk_n} \\ &=-D. \end{aligned}$$

例如：$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}=-400.$

推论 1.3.1　行列式若有两行元素相同，行列式的值为 0.

证明：把相同的两行互换，行列式的值不变，于是有 $D=-D$，则 $D=0$.

性质 1.3.3　行列式某行有公因子 k，则 k 可提到行列式的符号外乘，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明：由行列式的定义得

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_i\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots(ka_{ik_i})\cdots a_{nk_n} \\ &=k\sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_i\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{nk_n} \\ &=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD. \end{aligned}$$

例如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 100 & 200 & 300 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

该性质也表明，用一个数 k 去乘行列式 D，等于用 k 去乘行列式 D 的任意一行的每个元素．

推论 1.3.2 若行列式的某行元素全为 0，则行列式的值为 0；若行列式某两行元素对应成比例，则行列式的值为 0.

例如：$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 21 & 24 & 27 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$

性质 1.3.4 行列式具有分行相加性，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= D_1 + D_2.$$

证明： 由行列式的定义得

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_i\cdots k_n)} a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots(b_{ik_i}+c_{ik_i})\cdots a_{nk_n} \\ &= \sum_{k_1k_2\cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_i\cdots k_n)} a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots b_{ik_i}\cdots a_{nk_n} + \sum_{k_1k_2\cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_i\cdots k_n)} a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots c_{ik_i}\cdots a_{nk_n} \\ &= D_1 + D_2. \end{aligned}$$

例如：$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7+1 & 8+2 & 9+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

性质 1.3.5 将行列式的某行的 λ 倍加到另一行上去，行列式的值不变，即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{B}|.$$

证明： 由性质 1.3.4 得

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \cdots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|.$$

性质 1.3.5 在计算行列式中非常重要，是因为它能造零.

例如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-24.$（把第 1 行的$-5$ 倍加到第 2 行上去）

下面利用行列式性质计算几个行列式，可以见到利用性质计算行列式的值较之利用行列式的定义要方便很多。

例 1.3.1 计算行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解： $\Delta=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}=40.$$

例 1.3.2 计算 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ c & d & a & b \\ c & b & a & d \end{vmatrix}$.

解: (方法一)将第 1 行的-1倍加到第 2 行，再将第 3 行的-1倍加到第 4 行，得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & d-b & 0 & b-d \\ c & d & a & b \\ 0 & b-d & 0 & d-b \end{vmatrix}=0.$$

(方法二)将第 3 列加到第 1 列，再将第 4 列加到第 2 列，得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a+c & b+d & c & d \\ a+c & b+d & c & b \\ a+c & b+d & a & b \\ a+c & b+d & a & d \end{vmatrix}=(a+c)(b+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c & d \\ 1 & 1 & c & b \\ 1 & 1 & a & b \\ 1 & 1 & a & d \end{vmatrix}=0.$$

例 1.3.3 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

解: (方法一)将第 2，3，…，n 列都加到第 1 列，得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\ &=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}. \end{aligned}$$

(方法二)将第 1 行的 -1 倍分别加到第 2，3，…，n 行上，再将第 2，3，…，n 列都加到第 1 列上，得

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

1.4 行列式按行(列)展开

一般地，计算行列式时阶数低的比阶数高的好计算，那么能否用低阶行列式来表示高阶行列式呢？本节所介绍的行列式按行(列)展开，实质上就是利用降阶的方法计算行列式，为此我们先引入子式、余子式和代数余子式的概念.

定义 1.4.1 在 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后余下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来位置所构成的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij}，称为 a_{ij} 的余子式．令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

例 1.4.1 设 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}$，求 A_{21}，A_{23}，A_{24}.

解：

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix}2&3&4\\-1&-1&0\\2&0&-5\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix}1&2&4\\3&-1&0\\1&2&-5\end{vmatrix}=-63,$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}M_{24}=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&-1&-1\\1&2&0\end{vmatrix}=21.$$

注意：(1)行列式的每一个元素都有代数余子式；(2)每一个代数余子式都是一个 $n-1$ 阶行列式；(3)每一元素的代数余子式与此元素的值无关，且与它所在的行和列的元素无关.

定理 1.4.1 在 n 阶行列式 D 中，如果第 i 行(或第 j 列)的元素除 a_{ij} 以外的元素全是零，则 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证明： 先证 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ 情形．由行列式的定义知

$$\begin{aligned}D&=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\\&=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{11}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\\&=a_{11}\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\\&=a_{11}A_{11}.\end{aligned}$$

下面看一般情况，设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们把行列式 D 的第 i 行按顺序依次与第 $i-1$，$i-2$，…，2，1 行交换，然后再把第 j 列按顺序依次与第 $j-1$，$j-2$，…，2，1 列交换，得到以下行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)j} & a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)j} & a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由于把 a_{ij} 移到 a_{11} 的位置，共经过 $(i-1)+(j-1)=i+j-2$ 次交换行和列的步骤，所以

$$D=(-1)^{i+j-2}D_1=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

定理 1.4.1 说明，如果行列式中的某一行只有一个元素不为 0，则此行列式可用 $n-1$ 阶行列式表示．事实上，任意一个 n 阶行列式都可用 $n-1$ 阶行列式表示.

定理 1.4.2 n 阶行列式 D 等于它的任意一行的元素与其代数余子式的乘积和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

证明： 利用行列式的性质可将 D 写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0 & a_{i2}+0 & \cdots & a_{in}+0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+D_1.$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0+0 & a_{i2}+0 & \cdots & a_{in}+0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i2}A_{i2}+D_2.$$

同理得 $D_2=a_{i3}A_{i3}+D_3$，依此类推，得 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i3}+\cdots+a_{in}A_{in}$.

例 1.4.2 计算 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

解： 由定理 1.4.2，得

$$|\boldsymbol{A}|=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}$$

$$=-\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-3-63+2\times 21$$

$$=-24.$$

例 1.4.2 中计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的方法，我们说 $|\boldsymbol{A}|$ 是按第 2 行展开的，显然计算 $|\boldsymbol{A}|$ 的值最好是按零多的行(列)展开计算比较简单．零如果不多，还可以利用行列式的性质造零．

按行展开计算行列式的方法对列也是成立的.

定理 1.4.3 n 阶行列式 D 等于它的任意一列的元素与其代数余子式的乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}.$$

证明方法与定理 1.4.2 证明方法相同.

例 1.4.3 计算 $D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

解： 按第 5 列展开，得

$$D=a_{25}A_{25}=2\times(-1)^{2+5}M_{25}=-2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=-2\times5\times\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-10\times(10-12+24+2+24+60)$$

$$=-1080.$$

例 1.4.4 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解： 将第 3 列的 -2 倍加到第 1 列，再将第 3 列加到第 4 列，得

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}=1\times(-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40.$$

定理 1.4.4 n 阶行列式 D 中的任一行(列)的元素与其他行(列)对应元的代数余子式的乘积之和为 0，即当 $i\neq j$ 时，有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0，a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=0.$$

证明： 做新的行列式 D_1 使其第 j 行的元素为 a_{i1}，a_{i2}，…，a_{in}，即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (i\ 行) \\ \\ (j\ 行) \\ \\ \\ \end{array},$$

则 D_1 的第 i 行元素的代数余子式与 D 的第 j 行元素的代数余子式 A_{j1}，A_{j2}，…，A_{jn} 是相同的. 又由于 D_1 有两行相同，则 $D_1=0$，再由定理 1.4.3，得

$$D_1=0=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}.$$

对列证明方法相同.

行列式按行(列)展开方法(降阶方法)，每次只能降一阶. 为了介绍更一般的降阶方法计算行列式(拉普拉斯定理)，我们有如下定义.

定义 1.4.2 在 n 阶行列式 D 中，任意取定 k 行和 k 列，位于这些行和列交叉处的元素所构成的 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 阶行列式 N，称它为 D 的一个 k 阶子式；在 D 中去掉 N 所在的 k 行和 k 列，余下的元素构成的 $n-k$ 阶行列式 M，称 M 为 N 的余子式.

定义 1.4.3 如果 M 是 N 的余子式，若 N 所在的行为 i_1，i_2，…，i_k，所在的列为 j_1，j_2，…，j_k，令 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}M=A$，称 A 为 N 的代数余子式. 行列式 D 的一阶子式就是 a_{ij} 元素本身，一阶子式 a_{ij} 的余子式和代数余子式就是前面介绍的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij}.

例 1.4.5 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$，求 D 的一个 3 阶子式.

解： 取第 1，2，4 行和第 2，3，5 列，有 $N=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$. 取第 1，2，3 行和第 1，2，3 列，有 $N_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. k 阶子式不唯一. $M=\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix}$ 是 N 的余子式，$(-1)^{1+2+4+2+3+5}M$ 为 N 的代数余子式.

定理 1.4.5(拉普拉斯定理) 在 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行(列)，$1\leqslant k<n$，位于这 k

行(列)中的一切 k 阶子式(共 C_n^k 个)与它们的代数余子式乘积之和等于行列式 D.

我们这里不做具体证明，显然定理 1.4.2 是拉普拉斯定理中当 $k=1$ 时的特殊情况.

例 1.4.6 利用拉普拉斯定理计算

(1) $|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&-1&3\\0&0&5&1\end{vmatrix}$；　(2) $|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}a&0&a&0&a\\b&0&c&0&d\\b^2&0&c^2&0&d^2\\0&ab&0&bc&0\\0&cd&0&da&0\end{vmatrix}$.

解：(1) 取第 1，2 行，应用拉普拉斯定理，得

$$|A_1|=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\times(-1)^{1+2+1+2}\times\begin{vmatrix}-1&3\\5&1\end{vmatrix}=(-2)\times(-16)=32.$$

(2) 取第 1，2，3 行，得

$$|A_2|=\begin{vmatrix}a&a&a\\b&c&d\\b^2&c^2&d^2\end{vmatrix}\times(-1)^{1+2+3+1+3+5}\times\begin{vmatrix}ab&bc\\cd&da\end{vmatrix}$$
$$=-abd(a^2-c^2)(c-b)(d-b)(d-c).$$

例 1.4.7 用拉普拉斯定理计算 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}$.

解：取第 1，2 行，则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\times(-1)^{1+2+1+2}\times\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}\times(-1)^{1+2+1+3}\times\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}$$
$$=3\times4+(-2)\times3=6.$$

例 1.4.8 计算 $D_6=\begin{vmatrix}a&0&0&0&0&b\\0&a&0&0&b&0\\0&0&a&b&0&0\\0&0&b&a&0&0\\0&b&0&0&a&0\\b&0&0&0&0&a\end{vmatrix}$.

解：取第 3，4 行，由拉普拉斯定理，得

$$D_6=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\times(-1)^{3+4+3+4}\times\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=(a^2-b^2)\times\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\times(-1)^{2+3+2+3}\times\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=(a^2-b^2)^3.$$

例 1.4.9 证明范德蒙行列式：

$$v(a_1a_2\cdots a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

其中，Π 是连乘号，右端表示下列各行的乘积：

$$\begin{aligned}&(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\cdots(a_n-a_1)\\ &\qquad(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)\\ &\qquad\qquad(a_4-a_3)\cdots(a_n-a_3)\\ &\qquad\qquad\qquad\ddots\quad\vdots\\ &\qquad\qquad\qquad(a_n-a_{n-1})\end{aligned}$$

证明：对行列式的阶数用数学归纳法．当 $n=2$ 时，$v(a_1a_2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1$，论断成立。今假设对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立，验证 n 阶范德蒙行列式也成立。在 $v(a_1a_2\cdots a_n)$中从末行起，每一行减去前一行的 a_1 倍，得

$$v(a_1a_2\cdots a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{1<j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

1.5 克拉默(Cramer)法则

行列式的概念起源于解线性方程组，行列式理论的建立反过来又推动了线性方程组理论的发展，本节作为行列式的应用给出克拉默法则.

定理 1.5.1 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq 0$，则此方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \cdots,\ D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

证明： 先证 $x_1=\frac{D_1}{D}$，$x_2=\frac{D_2}{D}$，$\cdots$，$x_n=\frac{D_n}{D}$是方程组的解.

$$\begin{aligned} & a_{j1}\frac{D_1}{D}+a_{j2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{jn}\frac{D_n}{D} \\ =&\frac{1}{D}(a_{j1}D_1+a_{j2}D_2+\cdots+a_{jn}D_n) \\ =&\frac{1}{D}[a_{j1}(b_1A_{11}+\cdots+b_jA_{j1}+\cdots+b_nA_{n1})+a_{j2}(b_1A_{12}+\cdots+b_jA_{j2}+\cdots+b_nA_{n2})+\cdots+a_{jn} \\ & (b_1A_{1n}+\cdots+b_jA_{jn}+\cdots+b_nA_{nn})] \\ =&\frac{1}{D}[b_1(a_{j1}A_{11}+a_{j2}A_{12}+\cdots+a_{jn}A_{1n})+\cdots+b_j(a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn})+\cdots+b_n \\ & (a_{j1}A_{n1}+a_{j2}A_{n2}+\cdots+a_{jn}A_{nn})] \\ =&\frac{1}{D}(b_jD)=b_j. \end{aligned}$$

下面再证唯一性. 假设 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$\cdots$，$x_n=c_n$ 是方程组的解，则代入有

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1 \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nn}c_n=b_n \end{cases}.$$

用 a_{11} 的代数余子式 A_{11} 乘第 1 个式子，用 A_{21} 乘第 2 个式子……用 A_{n1} 乘第 n 个等式，得

$$\begin{cases} a_{11}A_{11}c_1+a_{12}A_{11}c_2+\cdots+a_{1n}A_{11}c_n=b_1A_{11} \\ a_{21}A_{21}c_1+a_{22}A_{21}c_2+\cdots+a_{2n}A_{21}c_n=b_2A_{21} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}A_{n1}c_1+a_{n2}A_{n1}c_2+\cdots+a_{nn}A_{n1}c_n=b_nA_{n1} \end{cases}.$$

将等号两边相加，得 $DC_1=D_1$，即 $C_1=\dfrac{D_1}{D}$. 完全类似可得，$C_i=\dfrac{D_i}{D}(i=1, 2, \cdots, n)$.

例 1.5.1 解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$.

解： 因为 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27\neq 0$，可由克拉默法则得

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81，D_2=-108，D_3=-27，D_4=27，$$

所以此方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3，x=\frac{D_2}{D}=-4，x_3=\frac{D_3}{D}=-1，x=\frac{D_4}{D}=1.$$

应该注意，克拉默法则只适合 n 个未知量 n 个方程且系数行列式 $D\neq 0$，至于 $D=0$ 时其他类型的线性方程组在下面进行研究.

1.6　习　　题

1．求出 j，k，使得 $1274j56k9$ 为偶排列．

2．将排列 315462 实行一些对换变成 123456．

3．若 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=k$，求 $\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)$．

4．求 n 个数所有排列的反序数的总和．

5．证明：任意一个排列都可经与其反序数相同的次序数的对换变成自然排列．

6．计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$．

7．选择 k 和 l，使 $a_{12}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ 在 5 阶行列式中取正号，使 $a_{62}a_{k5}a_{33}a_{l4}a_{46}a_{21}$ 在 6 阶行列式中取负号．

8．写出 4 阶行列式 D 中所有带负号并且包含 a_{23} 的项．

9．计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$．

10．证明：在 n 阶行列式 D 中，若 0 的个数多于 n^2-n 个，则 $D_n=0$．

11. 用行列式定义计算 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 和 x^3 的系数，并说明理由.

12. 由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0$，证明:奇偶排列各占一半.

13. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1-x \end{vmatrix}$；$p(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$，

其中 a_1，a_2，…，a_n 是互不相同的数.

(1) 证明：$f(x)$，$p(x)$都是 $n-1$ 次多项式；

(2) 由行列式的性质，求 $f(x)$，$p(x)$的根.

14. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；

(6) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

15. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$；

(6) $\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$.

16. 证明下列等式成立：

(1) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (n+1);$$

(2) $$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix} = 3^{n+1} - 2^{n+1};$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right);$$

(5) $$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

17. 用克拉默法则解下列线性方程组：

(1) $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3, \\ 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = -1, \\ -3x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 10; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

18. 设 a_1，a_2，…，a_{n+1} 是 $n+1$ 个互不相同的数，b_1，b_2，…，b_{n+1} 是 $n+1$ 个不全为 0 的数，证明：存在唯一一个次数不超过 n 的多项式 $f(x)$，使 $f(a_i)=b_i(i=1, 2, \cdots, n+1)$.

19. 问 λ 取何值时，方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ 3x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$ 有唯一解.

20. 用 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}'|$，计算行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}$.

21. 判别正误：

(1) $n(n>1)$ 阶行列式的次数是偶数；　(　　)

(2) 若行列式 D 的每一个元素都是整数，则 D 是整数；　(　　)

(3) 若 n 阶行列式 D 中零元的个数多于 n^2-n 时，则 $D=0$；　(　　)

(4) 阶数不相同的行列式值一定不相等；　(　　)

(5) 用数 k 乘行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 等于求行列式的每一个元素 .　(　　)

22. 如果设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，求下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_n 1} & a_{i_n 2} & \cdots & a_{i_n n} \end{vmatrix}$.