

第1章 集合与简易逻辑



1.1 用两个集合相等来解题

题 1-1 (1) 已知复数 a, b, c, d 满足 $a+b=c+d \neq 0$, $a^3+b^3=c^3+d^3$, 求证 $(a-c)(a-b)=0$;

(2) 已知实数 a, b, c, d 满足 $a+b=c+d$, $a^4+b^4=c^4+d^4$, 求证 $(a-c)(a-d)=0$;

(3) 已知 $a, b, c, x, y, z \in \mathbf{R}$, x, y, z 中没有一个小于 a, b, c 中的最小者, x, y, z 中没有一个大于 a, b, c 中的最大者, 且 $x+y+z=a+b+c$, $xyz=abc$, 求证 $\{a, b, c\} = \{x, y, z\}$.

证明 (1) 由题设, 可得

$$\begin{aligned}a^2 - ab + b^2 &= c^2 - cd + d^2 \\(a+b)^2 - 3ab &= (c+d)^2 - 3cd \\ab &= cd\end{aligned}$$

所以可设 $\begin{cases} a+b=c+d=p \\ ab=cd=q \end{cases}$, 即 a, b 与 c, d 均是关于 x 的一元二次方程

$$x^2 - px + q = 0$$

的两个复数根, 所以 $\{a, b\} = \{c, d\}$ (这里集合的元素可以相同, 下同). 得 $a=c$ 或 $a=d$, 即欲证结论成立.

(2) 可设 $a+b=c+d=k$, 由 $a^4+b^4=c^4+d^4$ 可得

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 &= (c^2+d^2)^2 - 2c^2d^2 \\[(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2 &= [(c+d)^2 - 2cd]^2 - 2c^2d^2 \\-4abk^2 + 2a^2b^2 &= -4cdk^2 + 2c^2d^2 \\(ab+cd)(ab-cd) &= 2k^2(ab-cd)\end{aligned}$$

若 $ab \neq cd$, 得 $ab+cd=2k^2$.

由 $(a+b)^2 \geq 4ab$, $(c+d)^2 \geq 4cd$ 相加, 可得 $2k^2 \geq 4(ab+cd) = 4 \cdot 2k^2$, 则 $k=0$, 即 $a+b=c+d=0$.

再由 $a^4+b^4=c^4+d^4$, 得 $|a|=|c|$, $|b|=|d|$. 若 $a \neq c$, 得 $a=-c$, 再由 $c+d=0$, 得 $a=b$. 此时欲证结论成立!

若 $ab=cd$, 同(1)也可得欲证结论成立! 证毕.

(3) 由 $x+y+z=a+b+c$, $xyz=abc$, 可得

$$abc(ab+bc+ca-xy-yz-zx) = bc(x-a)(x-b)(x-c) = ab(x-c)(y-c)(z-c)$$

可不妨设 $x \geq y \geq z$, $a \geq b \geq c$, 得 $z \geq c$, $x \leq a$.

所以 $0 \geq bc(x-a)(x-b)(x-c) = ab(x-c)(y-c)(z-c) \geq 0$, 所以

$$\begin{aligned}abc(ab+bc+ca-xy-yz-zx) &= 0 \\xy+yz+zx &= ab+bc+ca\end{aligned}$$

可设 $x+y+z=a+b+c=p$, $xy+yz+xz=ab+bc+ac=q$, $xyz=abc=r$, 所以 x, y, z 与 a, b, c 均是关于 A 的一元三次方程

$$A^3 - pA^2 + qA - r = 0$$

的三个根, 所以 $\{a, b, c\} = \{x, y, z\}$.

题 1-2 (2008 年上海财经大学自主招生招生考试试题第 9 题) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$, 它具有下述性质: (1) 对任何 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x^3)=f^3(x)$; (2) 对任何 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则 $f(-1)+f(0)+f(1)=$ _____.

解 答案为 0. 分析如下:

在 (1) 中分别令 $x=-1, 0, 1$, 可得 $f(-1)=[f(-1)]^3$, $f(0)=[f(0)]^3$, $f(1)=[f(1)]^3$. 再由 (2) 知, $\{f(-1), f(0), f(1)\} = \{x | x = x^3\} = \{0, 1, -1\}$, 所以 $f(-1)+f(0)+f(1)=0+1-1=0$.

题 1-3 (2011 年全国高中数学联赛一试试题(A 卷)第 3 题) 设 a, b 为正实数, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}$, $(a-b)^2 = 4(ab)^3$, 则 $\log_a b =$ _____.

解 答案为 -1. 分析如下:

由 $(a-b)^2 = 4(ab)^3$, 得

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab = 4(ab)^3 + 4ab \geq 2\sqrt{4(ab)^3 \cdot 4ab} = 8(ab)^2$$

$$a+b \geq 2\sqrt{2ab} \text{ (当且仅当 } 4(ab)^3 = 4ab, \text{ 即 } \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = 1 \text{ 时取等号)}$$

由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}$, 得 $a+b \geq 2\sqrt{2ab}$ (当且仅当 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2\sqrt{2}$ 时取等号).

$$\text{所以 } a+b=2\sqrt{2ab} \text{ 且 } \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2\sqrt{2} \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = 1 \end{cases}.$$

所以 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ 是一元二次方程 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ 的两个根, 得 $\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\} = \left\{\sqrt{2}+1, \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right\}$, 所

以 $\{a, b\} = \left\{\sqrt{2}+1, \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right\}$, 得 $\log_a b = -1$.



1.2 把简单化为复杂来解题

等价转化是解数学题的一种基本思想, 通常是把所给的条件逐渐转化, 使之越来越简单, 该条件就好用了, 从而达到了解题的目的.

事物都是辩证的. 笔者发现, 有时, 在解题的局部过程中, 把简单的条件等价转化为复杂的条件来解题反而有助于解题. 下面兹举两例.

题 1-4 若“ $x > 1$ ”是“不等式 $2^x > a - x$ 成立”的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是().

A. $a > 3$

B. $a < 3$

C. $a > 4$

D. $a < 4$

解 答案为 A. 由 $x > 1 \Leftrightarrow 2^x + x > 3$, $2^x > a - x \Leftrightarrow 2^x + x > a$ 可得答案.

题 1-5 “ $a > b$ ”是“ $3^a > 2^b$ ”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

解 答案为 D. 因为 $a > b \Leftrightarrow 3^a > 3^b$, 所以设 $3^a = x (x > 0)$ 后, 得题意即“若 $x > 0$, 则 $x > 3^b$ 是 $x > 2^b$ 的什么条件”, 而 $3^b > 2^b, 3^b = 2^b, 3^b < 2^b$ 均有可能出现 (即 $\left(\frac{3}{2}\right)^2 > 1, \left(\frac{3}{2}\right)^b = 1, \left(\frac{3}{2}\right)^b < 1$ 均有可能出现: 分别在 $b > 0, b = 0, b < 0$ 时), 所以“若 $x > 0$, 则 $x > 3^b$ 是 $x > 2^b$ 的既不充分也不必要条件”, 进而可得本题的答案.

习题

- “ $A \subseteq B$ 或 $A \subseteq C$ ”是“ $A \subseteq (B \cup C)$ ”的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- “ $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$ ”是“ $A \subseteq (B \cap C)$ ”的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = ra_n + r (n \in \mathbb{N}^*, \text{实数 } r \text{ 是非零常数})$, 则“ $r = 1$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为等差数列”的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边长分别是 a, b, c , 则 $a < \frac{b+c}{2}$ 是 $A < \frac{B+C}{2}$ 的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 若“ $x > -1$ ”是“不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^x < a + x$ 成立”的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围是().
A. $a > 3$ B. $a < 3$ C. $a > 4$ D. $a < 4$
- 已知某校一间办公室有四位教师甲、乙、丙、丁. 在某天的某个时段, 他们每人各做一项工作, 一人在查资料, 一人在写教案, 一人在批改作业, 另一人在打印材料. 若下面 4 个说法都是正确的:
① 甲不在查资料, 也不在写教案;
② 乙不在打印材料, 也不在查资料;
③ 丙不在批改作业, 也不在打印材料;
④ 丁不在写教案, 也不在查资料.



此外还可确定: 如果甲不在打印材料, 那么丙不在查资料.

则根据以上信息可以判断().

- A. 甲在打印材料 B. 乙在批改作业
C. 丙在写教案 D. 丁在打印材料

7. (2015 年台湾地区数学学测第 10 题; 台湾地区每年大学入学考试数学科目包括学测和指考两种, 学测相当于大陆的高考, 指考相当于大陆的自主招生考试. 学测大多在每年的 1 月底进行, 有时为了配合春节也会提前. 学测的选择题共 10 道, 共 50 分(每道选择题的选项均为 5 个), 其中前 4 道是单选题, 后 6 道是多选题)某班共 45 位同学, 问卷调查有手机与有平板电脑的人数. 从统计资料显示此班 35 人有手机, 24 人有平板电脑. 设:

- A 为同时拥有手机与平板电脑的人数;
B 为有手机, 但没有平板电脑的人数;
C 为没有手机, 但有平板电脑的人数;
D 为没有手机, 也没有平板电脑的人数.

请选出恒成立的不等式选项.

- (1) $A > B$ (2) $A > C$ (3) $B > C$ (4) $B > D$ (5) $C > D$

8. (由日本第六届(2005 年)广中杯预赛试题第 II-(2)题改编)在下列肌肉的名称和相应的英文名称的对应关系中, 全部正确的一组是().

- ①胸锁乳突肌: sternocleidomastoid muscle 棘上肌: supraspinatus muscle
②大胸肌: pectoralis major muscle 三角肌: deltoid muscle
③僧帽肌: supraspinatus muscle 肩胛下肌: subscapularis muscle
④棘上肌: latissimus dorsi muscle 大胸肌: pectoralis major muscle
⑤三角肌: deltoid muscle 肩胛下肌: subscapularis muscle

- A. ①②③ B. ②③④ C. ③④⑤ D. ①②⑤

9. (2014 年高考北京卷理科第 8 题)学生的语文、数学成绩均被评定为三个等级, 依次为“优秀”“合格”“不合格”. 若学生甲的语文、数学成绩都不低于学生乙, 且其中至少有一门成绩高于乙, 则称“学生甲比学生乙成绩好”. 如果一组学生中没有哪位学生比另一位学生成绩好, 并且不存在语文成绩相同、数学成绩也相同的两位学生, 那么这组学生最多有().

- A. 2 人 B. 3 人 C. 4 人 D. 5 人

10. (2014 年高考天津卷理科第 7 题)设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a > b$ ”是“ $a|a| > b|b|$ ”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

11. (2013 年高考安徽卷理科第 4 题)“ $a \leq 0$ ”是“函数 $f(x) = |(ax - 1)x|$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

12. (2013 年高考福建卷理科第 10 题)设 S, T 是 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y = f(x)$ 满足: (i) $T = \{f(x) | x \in S\}$; (ii) 对任意 $x_1, x_2 \in S$ 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么称这两个集合“保序同构”. 以下集合对不是“保序同构”的是().

A. $A = \mathbf{N}^*, b = \mathbf{N}$

B. $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}, B = \{x | x = -8 \text{ 或 } 0 < x \leq 10\}$

C. $A = \{x | 0 < x < 1\}, B = \mathbf{R}$

D. $A = \mathbf{Z}, B = \mathbf{Q}$

13. (2012 年高考四川卷文科第 1 题) 设集合 $A = \{a, b\}, B = \{b, c, d\}$, 则 $A \cup B =$ ().

A. $\{b\}$

B. $\{b, c, d\}$

C. $\{a, c, d\}$

D. $\{a, b, c, d\}$

14. (2004 年高考江苏卷第 12 题) 设函数 $f(x) = -\frac{x}{1+|x|} (x \in \mathbf{R})$, 区间 $M = [a, b] (a < b)$,

集合 $N = \{y | y = f(x), x \in M\}$, 则使 $M = N$ 成立的实数对 (a, b) 有().

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 无数多个

15. (2005 年全国高中数学联赛第一试第 6 题) 记集合 $T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$M = \left\{ \frac{a_1}{7} + \frac{a_2}{7^2} + \frac{a_3}{7^3} + \frac{a_4}{7^4} \mid a_i \in T, i = 1, 2, 3, 4 \right\},$$

若将 M 中的元素按从大到小的顺序排列, 则第 2005 个数是().

A. $\frac{5}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{6}{7^3} + \frac{3}{7^4}$

B. $\frac{5}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{6}{7^3} + \frac{2}{7^4}$

C. $\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{0}{7^3} + \frac{4}{7^4}$

D. $\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{0}{7^3} + \frac{3}{7^4}$

16. 设数集 $M = \left[m, m + \frac{3}{4} \right], N = \left[n - \frac{1}{3}, n \right]$, M, N 都是区间 $[0, 1]$ 的子集. 若把 $b - a$ 叫作闭集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 的“长度”, 则集合 $M \cap N$ 的“长度”的最小值是_____.

17. 若 $x \in A$, 且 $\frac{1}{1-x} \in A$, 则称非空集合 A 为“和谐集”. 已知集合 $M = \left\{ -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2, 3 \right\}$, 则集合 M 的子集中的“和谐集”个数为_____.

18. 对于一个数集(其元素都是实数), 称其元素的最大值与最小值的和为该集合的特征数. 若 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2014\}$, 则 A 的特征数为 5 的子集的个数是_____, A 的所有非空子集的特征数的平均数为_____.

19. 集合 $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 的所有非空子集的所有元素之和是_____.

20. 若某网络机构公布某单位关于上网者使用网络浏览器 A, B 的信息:

① 316 人使用 A ;

② 478 人使用 B ;

③ 104 人同时使用 A 和 B ;

④ 567 人只使用 A, B 中的一种网络浏览器.

则这条信息为_____ (填“真”或“假”), 理由是_____.

21. 已知集合 $M = [1, 2, 3, \dots, 100]$, A 是集合 M 的非空子集. 若把集合 A 中的各元素之和记作 $S(A)$. 则: ① 满足 $S(A) = 8$ 的集合 A 的个数为_____; ② $S(A)$ 的所有不同取值的个数为_____.

22. 对于非空实数集合 A , 记 $A^* = \{y | \forall x \in A, y \leq x\}$, 设非空实数集合 P 满足条件

“若 $x < 1$, 则 $x \notin P$ ” 且 $M \subseteq P$, 给出下列命题:

- ① 若全集为实数集 $\mathbf{R}$, 对于任意非空实数集合 A , 必有: $\partial_{\mathbf{R}} A = A$
- ② 对于任意给定符合题设条件的集合 M, P , 必有 $P^* \subseteq M^*$;
- ③ 存在符合题设条件的集合 M, P , 使得 $M^* \cap P = \emptyset$;
- ④ 存在符合题设条件的集合 M, P , 使得 $M \cap P^* \neq \emptyset$.

其中所有正确命题的序号是_____.

23. 对于非空数集 A, B , 定义 $A+B = \{x+y | x \in A, y \in B\}$, 则下列命题中真命题的个数是_____:

- ① $A+B = B+A$;
- ② $(A+B)+C = A+(B+C)$;
- ③ 若 $A+A = B+B$, 则 $A=B$;
- ④ 若 $A+C = B+C$, 则 $A=B$.

24. 已知非空集合 A, B 满足以下四个条件:

- ① $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
- ② $A \cap B = \emptyset$;
- ③ A 中的元素个数不是 A 中的元素;
- ④ B 中的元素个数不是 B 中的元素.

- (1) 如果集合 A 中只有 1 个元素, 那么 $A =$ _____;
- (2) 有序集合对 (A, B) 的个数是_____.

25. (2016 年高考全国卷 II 理科第 15 题即文科第 16 题)有三张卡片, 分别写有 1 和 2、1 和 3、2 和 3. 甲、乙、丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片后说: “我与乙的卡片上相同的数字不是 2”, 乙看了丙的卡片后说: “我与丙的卡片上相同的数字不是 1”, 丙说: “我的卡片上的数字之和不是 5”, 则甲的卡片上的数字是_____.

26. (2016 年高考北京卷文科第 14 题)某网店统计了连续三天售出商品的种类情况: 第一天售出 19 种商品, 第二天售出 13 种商品, 第三天售出 18 种商品; 前两天都售出的商品有 3 种, 后两天都售出的商品有 4 种, 则该网店

- ① 第一天售出但第二天未售出的商品有_____种;
- ② 这三天售出的商品最少有_____种.

27. (2013 年高考湖南卷理科第 16 题)设函数 $f(x) = a^x + b^x - c^x$, 其中 $c > a > 0, c > b > 0$.

- (1) 记集合 $M = \{(a, b, c) | a, b, c \text{ 不能构成一个三角形的三条边长, 且 } a = b\}$, 则 $(a, b, c) \in M$ 所对应的 $f(x)$ 的零点的取值集合为_____;
- (2) 若 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长, 则下列结论正确的是_____.(写出所有正确结论的序号)

- ① $\forall x \in (-\infty, 1), f(x) > 0$;
- ② $\exists x \in \mathbf{R}$, 使 a^x, b^x, c^x 不能构成一个三角形的三条边长;
- ③ 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 则 $\exists x \in (1, 2)$, 使 $f(x) = 0$.

28. (2013 年高考福建卷文科第 16 题) 设 S, T 是 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y = f(x)$ 满足: (i) $T = \{f(x) | x \in S\}$; (ii) 对任意 $x_1, x_2 \in S$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$.

那么称这两个集合“保序同构”. 现给出以下 3 对集合:

- ① $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{N}^*$;

$$\textcircled{2} A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}, B = \{x | -8 \leq x \leq 10\};$$

$$\textcircled{3} A = \{x | 0 < x < 1\}, B = \mathbf{R}.$$

其中, “保序同构”的集合对的序号是_____. (写出所有“保序同构”的集合对的序号)

29. (2010 年高考四川卷理科第 16 题) 设非空集合 S 是复数集 $\mathbf{C}$ 的子集, 对任意 $x, y \in S$, 都有 $x+y, x-y, xy \in S$, 则定义集合 S 是 $\mathbf{C}$ 上的封闭集. 给出如下 4 个命题:

① $S = \{a+bi | a, b \in \mathbf{Z}, i \text{ 是虚数单位}\}$ 是封闭集;

② 若 S 是封闭集, 则 $0 \in S$;

③ 封闭集一定是无限集;

④ 若 S 是封闭集, 则满足 $S \subseteq T \subseteq \mathbf{C}$ 的任意集合 T 也是封闭的.

其中正确命题的序号有_____. (把你认为正确命题的序号都填上)

30. (2015 年北京大学博雅自主招生试题第 9 题) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点集 $M = \{(x, y) | \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \geq xy\}$ 所覆盖区域的面积为_____.

31. 已知 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 2x \cos \alpha + 2(1 + \sin \alpha)(1 - y) = 0, \alpha \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | y = kx + 3, k \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B$ 为单元素集, 求实数 k 的取值范围.

32. 一般来说, $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap D)$ 不成立. 请问: 若 $a < b, c < d$, 则 $\{x | x < a \text{ 或 } x > b\} \cap \{x | x < c \text{ 或 } x > d\} = \{x | x < \min\{a, c\} \text{ 或 } x > \max\{b, d\}\}$ 一定成立吗?

33. 写出下列命题的逆否命题:

(1) 若 $a = b$, 则 $\lg a = \lg b$;

(2) 若 $x = y$, 则 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$.

34. 为激发学生的学习兴趣, 兴趣小组组长在黑板上写出三个集合:

$$A = \left\{x \mid \frac{x-a}{ax} < 0\right\}, B = \{x | x^2 - 3x - 4 \leq 0\}, C = \{x | x^2 - 2x < 0\},$$

然后邀请甲、乙、丙三位同学到讲台上, 并将 a 的值告诉他们, 要求他们各用一句话来描述, 以便同学们能确定该数. 以下是甲、乙、丙三位同学的描述: 甲: 此数为小于 10 的正整数; 乙: A 是 B 成立的充分不必要条件; 丙: C 是 A 成立的必要不充分条件.

(1) 若甲和乙说的都对, 试写出 a 的一个可能的值;

(2) 若甲、乙和丙说的都对, 求 a 的值.

35. 请作出集合 $A = \{1, 2, \dots, 13\}$ 的 13 个子集, 使得每个子集均含 4 个元素, 每两个子集恰有一个公共元素, 且集合 A 的元素恰在其中的 4 个子集中出现.

36. 把同时满足下面两个条件的集合 S 称为“好”集合:

(i) $0, 1 \in S$;

(ii) 若 $x, y \in S$, 则 $x-y, \frac{1}{x} \in S$ (对于后者还应满足 $x \neq 0$).

求证: 若 $a, b \in S$, 则:

(1) $a+b \in S$;

(2) $ab \in S$.

37. 设集合 $P = \{1, 2, 3, \dots, n\} (n \geq 3)$, A, B 是 P 的两个非空子集, 记 a_n 为所有满足 A 中

的最大数小于 B 中的最小数的有序集合对 (A, B) 的对数.

(1) 求 a_3, a_4 ;

(2) 求 a_n .

38. (2015 年高考江苏卷第 23 题) 已知集合 $X=\{1,2,3\}$, $Y_n=\{1,2,3,\dots,n\}(n \in \mathbf{N}^*)$, 设 $S_n=\{(a,b)|a \text{ 整除 } b \text{ 或 } b \text{ 整除 } a, a \in X, b \in Y_n\}$. 令 $f(n)$ 表示集合 S_n 所含元素的个数.

(1) 写出 $f(6)$ 的值;

(2) 当 $n \geq 6$ 时, 写出 $f(n)$ 的表达式, 并用数学归纳法证明.

39. (2009 年高考北京卷理科第 20 题) 已知数集 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\} (1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 2)$ 具有性质 P : 对任意的 $i, j (1 \leq i \leq j \leq n), a_i a_j$

与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A .

(1) 分别判断数集 $\{1,3,4\}$ 与 $\{1,2,3,6\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由;

(2) 证明: $a_1=1$ 且 $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\dots+a_n^{-1}}=a_n$;

(3) 证明: 当 $n=5$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列.

40. (日本第 4 届(2007 年)初级广中杯决赛试题第 2(3)题) A, B, C, D, E 五个人进行了一场争论:

A : 我们都是老实人.

B : 不, 我们中只有一个人是骗子;

C : 非也, 我们中只有两个人是骗子;

D : 包括我在内, 五个人都是骗子;

E : 除我之外的四个人都是骗子.

请问哪些人是骗子? (用 $A \sim E$ 来表示)

41. (日本第 3 届(2006 年)初级广中杯预赛试题第 7 题) 在 A 和 B 中填入适当的数, 使得框中的描述符合逻辑:

如果数 x 恰好满足下面 5 个条件中的 $[A]$ 个, 则数 x 存在唯一的一种可能: $x=[B]$.

$$(1) \frac{1979}{418} \leq x \leq \frac{5963}{888};$$

$$(2) 3.14 \leq x \leq 3 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \frac{2}{243};$$

(3) x 为正整数;

$$(4) x - \frac{1799}{890} \leq \frac{4444}{567} \leq x;$$

$$(5) x \leq \left(\frac{3}{2}\right)^4.$$

42. (日本第 7 届(2006 年)广中杯预赛试题第 2(2)题)(只写出答案即可) 一家公司有 6 名员工, 其中有 1 名董事长、1 名副董事长、1 名主任、3 名普通员工(指不担任任何职务的员工). 有趣的是, 3 名有职务的员工的姓氏分别是木田、林田、森田; 3 名普通员工的姓氏

也分别是木田、林田、森田.在这家公司里,3名有职务的员工被称为“领导”,3名普通员工被称为“师傅”.根据下面的线索,请回答出董事长和副董事长的姓氏.

- A. 木田师傅住在东京都;
- B. 副董事长每天从长野县出发,坐新干线去上班;
- C. 林田师傅的年收入为700万日元;
- D. 3名普通员工中的1名和副董事长住得很近,其年收入恰好是副董事长的75%;
- E. 森田领导曾和主任大吵过一架;
- F. 和副董事长同姓的普通员工住在神奈川县.

43. (2014年华约自主招生试题第1题)设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 是正整数,任取其中四个求和后得到的集合是 $\{44, 45, 46, 47\}$,求这五个正整数.

44. (2010年清华大学等五校自主招生联考试题样题第6题)已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x < 0$ 时 $f(x)$ 单调递增, $f(-1) = 0$.设 $\varphi(x) = \sin^2 x + m \cos x - 2m$,集合 $M = \left\{ m \mid \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \varphi(x) < 0 \right\}, N = \left\{ m \mid \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], f(\varphi(x)) < 0 \right\}$,求 $M \cap N$.

45. (2010年浙江大学自主招生数学试题第1题)设 $M = \{x \mid f(x) = x\}, N = \{x \mid f(f(x)) = x\}$.

(1) 求证: $M \subseteq N$;

(2) $f(x)$ 为单调递增函数时,是否有 $M = N$?并证明.

46. (2009年浙江大学自主招生数学试题第4题)给出1,2,3,4,5五个数字,排列这五个数字,要求第一个到第 i 个位置($1 \leq i \leq 4$)不能由1,2,3,4,5的数字组成.如21534不可,因为第一位到第二位由1,2组成,同理32145也不可.求满足要求的所有可能的组合数.

47. (2008年浙江大学自主招生试题第4题) $A = \left\{ (x, y) \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq \frac{5}{4} \right\}$,

$B = \left\{ (x, y) \mid |x-1| + 2|y-2| \leq a \right\}, A \subseteq B$,求 a 的取值范围.

48. (2008年上海交通大学自主招生暨冬令营数学试题第二题第2题)已知 $f(x)$ 为二次函数,且集合 $A = \{x \mid f(x) = x, x \in \mathbf{R}\}, B = \{x \mid f(f(x)) = x, x \in \mathbf{R}\}$.若 $A = \emptyset$,是否有 $B = \emptyset$?并证明你的结论.

49. (2003年复旦大学自主招生暨保送生考试数学试题第17题)定义闭集合 S ,若 $a, b \in S$,则 $a+b \in S, a-b \in S$.

(1) 举一例,真包含于 $\mathbf{R}$ 的无限闭集合;

(2) 求证:对任意两个闭集合 $S_1, S_2, S_1 \subseteq \mathbf{R}, S_2 \subseteq \mathbf{R}$,存在 $c \in \mathbf{R}$,但 $c \notin S_1 \cap S_2$.