第 1 章　矢量与张量

1.1　矢量及其代数运算公式

1.1.1　矢量

在三维 Euclidean 空间中，矢量是具有大小与方向且满足一定规则的实体，用黑体字母表示，例如 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 等。它们所对应矢量的大小（称为模、值）分别用 $|\boldsymbol{u}|$，$|\boldsymbol{v}|$，$|\boldsymbol{w}|$ 表示。称模为零的矢量为零矢量，用 $\mathbf{0}$ 表示。称与矢量 $\boldsymbol{u}$ 模相等而方向相反的矢量为 $\boldsymbol{u}$ 的负矢量，用 $-\boldsymbol{u}$ 表示。矢量满足以下规则：

（1）相等：两个矢量具有相同的模和方向，则称这两个矢量相等。即，一个矢量做平行于其自身的移动则这个矢量不变。

（2）矢量和：按照平行四边形法则定义矢量和，同一空间中两个矢量之和仍是该空间的矢量。如图 1.1 所示。

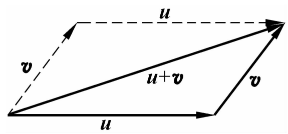

图 1.1　矢量和的平行四边形法则

矢量和满足以下规则：

交换律：
$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \tag{1.1.1}$$

结合律：
$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \tag{1.1.2}$$

由矢量和与负矢量还可以定义矢量差：

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{v}) \tag{1.1.3}$$

并且有

$$\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0} \tag{1.1.4}$$

（3）数乘矢量：设 a，b 等为实数，矢量 $\boldsymbol{u}$ 乘实数 a 仍是同一空间的矢量，记作 $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{u}$。其含义是：$\boldsymbol{v}$ 是与 $\boldsymbol{u}$ 共线且模为 $\boldsymbol{u}$ 的 a 倍，当 a 为正值时 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 同向，a 为负值时 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 反向，a 为零时 $\boldsymbol{v}$ 为零矢量。数乘矢量满足以下规则：

分配律：
$$(a+b)\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{u} \tag{1.1.5a}$$

$$a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v} \tag{1.1.5b}$$

结合律：
$$a(b\boldsymbol{u})=ab\boldsymbol{u} \tag{1.1.6}$$

由矢量关于求和与数乘两种运算的封闭性可知，属于同一空间的矢量组 $\boldsymbol{u}_i(i=1,2,\cdots,I)$ 的线性组合 $\sum_{i=1}^{I} a_i\boldsymbol{u}_i$ 仍为该空间的矢量，此处 a_i 是实数。**矢量组 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_I$ 线性相关**是指存在一组不全为零的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_I$，使得

$$\sum_{i=1}^{I} a_i\boldsymbol{u}_i=\mathbf{0}$$

线性无关：若有矢量组 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_J$，当且仅当 $a_j=0(j=1,2,\cdots,J)$时，才有 $\sum\limits_{j=1}^{J}a_j\boldsymbol{u}_j=\boldsymbol{0}$，则称这组 J 个矢量是**线性无关**的。

维数：一个矢量空间所包含的最大线性无关矢量的数目称为该矢量空间的**维数**。显然，三维空间最多有3个线性无关的矢量，平面最多有2个线性无关的矢量。在 n 维空间中，可以根据解决物理问题的需要选择 n 个线性无关的基矢量，而任一矢量可用 n 个基矢量的线性组合来表示。

在三维空间的笛卡儿坐标系 x,y,z 中，选择一组正交标准化基 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，分别为沿 x,y,z 轴的单位矢量。任一矢量 v 可以表示为这组正交标准化基的线性组合：

$$v=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1.1.7}$$

许多物理量都是矢量，满足前述定义和式(1.1.1)～(1.1.6)的规则。例如速度、加速度、力、电矩、磁感应强度等。

1.1.2 点积

定义两个矢量 $\boldsymbol{F}$ 与 v 的点积(也称为内积)

$$\boldsymbol{F}\cdot v=|\boldsymbol{F}||v|\cos(\boldsymbol{F},v) \tag{1.1.8}$$

式中$(\boldsymbol{F},v)$表示 $\boldsymbol{F}$ 与 v 的夹角，如图1.2所示。

如果 $\boldsymbol{F},v$ 方向的单位矢量分别为 $\boldsymbol{e}_f$ 和 $\boldsymbol{e}_v$，则由(1.1.8)式知，$\boldsymbol{F}$ 在 v 上的投影是 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_v$，而$v$ 在 $\boldsymbol{F}$ 上的投影是 $v\cdot\boldsymbol{e}_f$，所以

$$\boldsymbol{F}\cdot v=|v|(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_v)=|\boldsymbol{F}|(v\cdot\boldsymbol{e}_f)$$

由(1.1.8)式与基矢量的正交性可知

$$\boldsymbol{F}\cdot v=F_xv_x+F_yv_y+F_zv_z \tag{1.1.9}$$

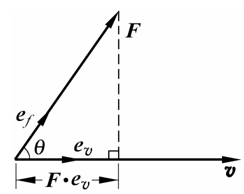

图1.2 两个矢量的点积

例如，当 $\boldsymbol{F}$ 表示力，v 表示位移(速度)时，$\boldsymbol{F}\cdot v$ 表示功(功率)。

两个矢量的点积服从以下规则：

交换律 $\boldsymbol{u}\cdot v=v\cdot\boldsymbol{u}$ (1.1.10)

分配律 $\boldsymbol{F}\cdot(v+\boldsymbol{u})=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}\cdot v$ (1.1.11)

正定性 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\geqslant 0$ (1.1.12)

且 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$

Schwartz 不等式 $|\boldsymbol{u}\cdot v|\leqslant|\boldsymbol{u}||v|$ (1.1.13)

1.1.3 叉积

两个矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 v 的叉积(也称为矢积，外积)是垂直于 $\boldsymbol{u},v$ 构成的平面的另一个矢量。定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}&=\boldsymbol{u}\times v\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\u_x&u_y&u_z\\v_x&v_y&v_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

$\boldsymbol{w}$ 为垂直于 $\boldsymbol{u}$,v 所在平面的矢量,其方向符合右手规则,如图 1.3 所示。

叉积的模为

$$|\boldsymbol{u}\times v| = |\boldsymbol{u}||v|\sin(\boldsymbol{u},v) \tag{1.1.15}$$

式中 $\sin(\boldsymbol{u},v)\geqslant 0$。交换叉积的顺序,则叉积反号

$$\boldsymbol{u}\times v = -v\times\boldsymbol{u} \tag{1.1.16}$$

叉积也满足分配律

$$\boldsymbol{F}\times(\boldsymbol{u}+v) = \boldsymbol{F}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}\times v \tag{1.1.17}$$

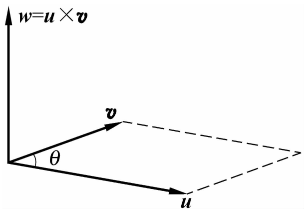

图 1.3　两个矢量的叉积

叉积的几何意义是:其模等于以两个矢量为边构成的平行四边形的面积,其方向垂直于该平行四边形所在平面(见图 1.3)。

三个矢量的二重叉积满足以下恒等式

$$\boldsymbol{u}\times(v\times\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})v-(\boldsymbol{u}\cdot v)\boldsymbol{w} \tag{1.1.18}$$

$$(\boldsymbol{u}\times v)\times\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})v-(\boldsymbol{w}\cdot v)\boldsymbol{u}$$

由式(1.1.18)可证叉积不满足结合律

$$\boldsymbol{u}\times(v\times\boldsymbol{w})\neq(\boldsymbol{u}\times v)\times\boldsymbol{w}$$

例 1.1　电磁学中的洛伦兹力(Lorentz force)定律　叉积在物理学中的例子是:电荷量为 q(单位:库仑,C)的点电荷(正电荷)以速度 $\boldsymbol{v}$(m/s)在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$(定义其正方向自北极指向南极,单位:斯特拉,T=1N·s/(C·m))的磁场中运动,所受到的磁力称为洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$(N),满足以下规律:

$$\boldsymbol{F} = qv\times\boldsymbol{B}$$

洛仑兹力的方向按右手规则垂直于速度矢量和磁感应强度矢量所构成的平面。

1.1.4　混合积

定义三个矢量 $\boldsymbol{u}$,v,$\boldsymbol{w}$ 的混合积是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u}\quad v\quad \boldsymbol{w}] &= (\boldsymbol{u}\times v)\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\cdot(v\times\boldsymbol{w})\\ &= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x\\ u_y & v_y & w_y\\ u_z & v_z & w_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

若更换三个矢量在混合积中的次序,应满足

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u}\quad v\quad \boldsymbol{w}] &= [v\quad \boldsymbol{w}\quad \boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{w}\quad \boldsymbol{u}\quad v]\\ &= -[v\quad \boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{w}] = -[\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{w}\quad v] = -[\boldsymbol{w}\quad v\quad \boldsymbol{u}]\end{aligned} \tag{1.1.20}$$

可以证明,混合积的几何意义是以 $\boldsymbol{u}$,v,$\boldsymbol{w}$ 为三个棱边所围成的平行六面体的体积。(1.1.19)式与(1.1.20)式还决定了当 $\boldsymbol{u}$,v,$\boldsymbol{w}$ 构成右手系时,该平行六面体的体积为正号。

利用(1.1.9)式与(1.1.19)式还可以证明,由三个矢量的两两点积所构成的行列式等于三个矢量所构成的体积的平方。即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot v & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}\\ v\cdot\boldsymbol{u} & v\cdot v & v\cdot\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{w}\cdot v & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\end{vmatrix} = [\boldsymbol{u}\quad v\quad \boldsymbol{w}]^2 \tag{1.1.21}$$

用同样方法可以证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}' \end{vmatrix} = [\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}][\boldsymbol{u}'\quad\boldsymbol{v}'\quad\boldsymbol{w}'] \tag{1.1.22}$$

式中 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{u}'$,$\boldsymbol{v}'$,$\boldsymbol{w}'$都是任意矢量。

利用(1.1.18)式和(1.1.20)式可证明:

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}]^2 \tag{1.1.23}$$

证明 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}]\boldsymbol{v}-[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}]\boldsymbol{w}=[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}]\boldsymbol{v}$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}) &= [(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}]\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}) \\ &= [\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}][\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}\quad\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}]^2\end{aligned}$$

利用(1.1.19)式第一行混合积中符号"×"与"·"可以对换的性质,还可证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{1.1.24}$$

另一证明见 1.44 题。

例 1.2 利用矢量方法求证平面几何中的余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

证明 用矢量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 表示三角形的三条边 BC,CA,BA;A,B,C 表示三角形的三个顶角,如图 1.4 所示。则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \\ c^2 &= \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ &= a^2+b^2+2ab\cos(\pi-C) \\ &= a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}$$

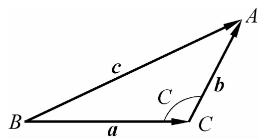

图 1.4 平面几何中的余弦定理

例 1.3 求证球面三角形中的余弦定理:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

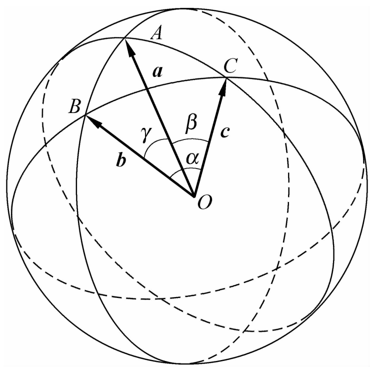

图 1.5 球面三角形中的余弦定理

式中 α,β,γ 分别为大圆弧$\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{CA}$,$\overset{\frown}{AB}$所对应的圆心角,A 为大圆弧$\overset{\frown}{BA}$与$\overset{\frown}{CA}$所在平面的夹角,如图 1.5 所示。

证明 设球心 O 至半径为 1 的球面上 3 点 A,B,C 的矢径为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$;$\cos\alpha=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,$\cos\beta=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,$\cos\gamma=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,过 AC 大圆所在平面的法向单位矢量为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})/\sin\beta$,过 AB 大圆所在平面的法向单位矢量为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})/\sin\gamma$,它们之间的夹角等于 A 角。故

$$\cos A = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\sin\gamma}\cdot\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{\sin\beta}$$

因而

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) = \sin\gamma\sin\beta\cos A$$

又
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})] = \boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}] \\ &= (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) = \cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma\end{aligned}$$

故
$$\sin\beta\sin\gamma\cos A = \cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma$$

即
$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$$

例 1.4　以角速度ω绕定轴转动的刚体上每一点都绕着该轴做圆周运动，单位时间内转动的角度为 ω。如图 1.6 所示。求用矢量叉积表示刚体上任一点 P 处的线速度 v 。

解　将坐标原点 O 设在旋转轴上，由 O 点至 P 点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 可以描述刚体上任一点 P 的位置。用矢量ω 表示角速度，其大小等于 ω，方向沿旋转轴且与旋转方向之间满足右手定则。P 点到定轴的距离为 d。

过 P 点作垂直于定轴的平面，与轴交点为 C，则 P 点做该平面内绕 C 的圆周运动，速度 v 的方向为 P 点处沿该圆周的切线方向。即

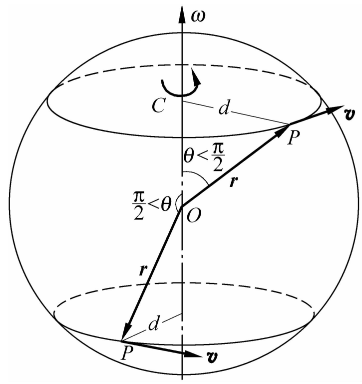

图 1.6　绕定轴转动的刚体

$$v\cdot\omega=0,\ v\cdot\boldsymbol{r}=0\qquad(v\perp\omega,v\perp\boldsymbol{r})$$

v 的大小为 ωd

$$|v|=\omega r\sin\theta=\omega d$$

因此

$$v=\omega\times\boldsymbol{r}$$

1.2　斜角直线坐标系的基矢量与矢量分量

为便于定量求解某个物理问题，人们常需要选择不同的坐标系描述物理量及其服从的客观规律。除熟悉的笛卡儿坐标系外，还可以选择非正交的或非直线坐标系；我们将介绍更一般的坐标系以及矢量与张量的非笛卡儿分量。本节将先介绍斜角直线坐标系。

1.2.1　平面内的斜角直线坐标系

图 1.7 示出平面内直线坐标系 x^1，x^2，坐标线互不正交，夹角为 $\varphi(\varphi<\pi)$。若选沿 x^1 与 x^2 坐标线的参考矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$（它们可以不是单位矢量），则任意矢量 $\boldsymbol{P}$ 可以用它对 $\boldsymbol{g}_1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 分解的分矢量 $P^1\boldsymbol{g}_1$ 与 $P^2\boldsymbol{g}_2$ 之和表示：

$$\boldsymbol{P}=P^1\boldsymbol{g}_1+P^2\boldsymbol{g}_2=\sum_{\alpha=1}^{2}P^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha=P^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha\tag{1.2.1}$$

式中 P^1 与 P^2 称为矢量 $\boldsymbol{P}$ 的分量。上式中最后的表达式省略了求和号，即采用了爱因斯坦(Einstein)求和约定。其中 α 称为**哑指标**，满足以下规则。

哑指标规则：

(1) 在同一项中，以一个上指标与一个下指标成对地出现，表示遍历其取值范围求和。在本书中，规定希文字母指标（如 α，β 等）用于二维问题，取值 1 与 2；而拉丁文字母指标（如 i，j 等）用于三维问题，取值 1，2，3。

(2) 每一对哑指标的字母可以用相同取值范围的另一对字母任意代换，其意义不变。如

$$\boldsymbol{P}=P^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha=P^\beta\boldsymbol{g}_\beta\tag{1.2.1a}$$

当选定参考矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 后，用初等代数的方法可以确定任意矢量的分量 P^1 与 P^2。设引入沿 x^1 与 x^2 的单位矢量 $\boldsymbol{i}_1$ 与 $\boldsymbol{i}_2$，则有

$$\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_2=1,\qquad\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_1=\cos\varphi\neq0\tag{1.2.2a}$$

$$\boldsymbol{g}_1 = |\boldsymbol{g}_1|\boldsymbol{i}_1, \qquad \boldsymbol{g}_2 = |\boldsymbol{g}_2|\boldsymbol{i}_2 \tag{1.2.2b}$$

与笛卡儿坐标系不同,因 $\boldsymbol{g}_1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 不是单位矢量且不正交,故矢量 $\boldsymbol{P}$ 在 $\boldsymbol{g}_\alpha(\alpha=1,2)$ 上的投影不等于它的分量:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{i}_1 &= P^1|\boldsymbol{g}_1| + P^2|\boldsymbol{g}_2|\cos\varphi \\ \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{i}_2 &= P^1|\boldsymbol{g}_1|\cos\varphi + P^2|\boldsymbol{g}_2|\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

由 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{i}_1$ 与 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{i}_2$ 表述 P^1 与 P^2 的表示式需通过解联立代数方程(1.2.3)式得到,显然是不方便的。为此,引入一对与 $\boldsymbol{g}_\alpha(\alpha=1,2)$ 对偶的参考矢量 $\boldsymbol{g}^\alpha(\alpha=1,2)$,满足:

$$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_1 = 0 \tag{1.2.4a}$$

$$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_2 = 1 \tag{1.2.4b}$$

上式表示 $\boldsymbol{g}^1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$,$\boldsymbol{g}^2$ 与 $\boldsymbol{g}_1$ 分别互相正交。而由图1.7知,$\boldsymbol{g}^1$ 与 $\boldsymbol{g}_1$,$\boldsymbol{g}^2$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 的夹角都是锐角,且为 $\pi/2-\varphi$(当 φ 为锐角)或 $\varphi-\pi/2$(当 φ 为钝角),故

$$|\boldsymbol{g}^1| = \frac{1}{|\boldsymbol{g}_1|\sin\varphi}, \qquad |\boldsymbol{g}^2| = \frac{1}{|\boldsymbol{g}_2|\sin\varphi} \tag{1.2.5}$$

称参考矢量 $\boldsymbol{g}_\alpha$ 为**协变基矢量**,与其对偶的参考矢量 $\boldsymbol{g}^\beta(\beta=1,2)$ 为**逆变基矢量**。它们之间所满足的关系式(1.2.4a,b)可以统一写成**对偶条件**

$$\boldsymbol{g}^\beta\cdot\boldsymbol{g}_\alpha = \delta_\alpha^\beta \qquad (\alpha,\beta=1,2) \tag{1.2.4}$$

式中 δ_α^β 称为 Kronecker δ,其值为

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases}1, & \alpha=\beta \\ 0, & \alpha\neq\beta\end{cases} \tag{1.2.6}$$

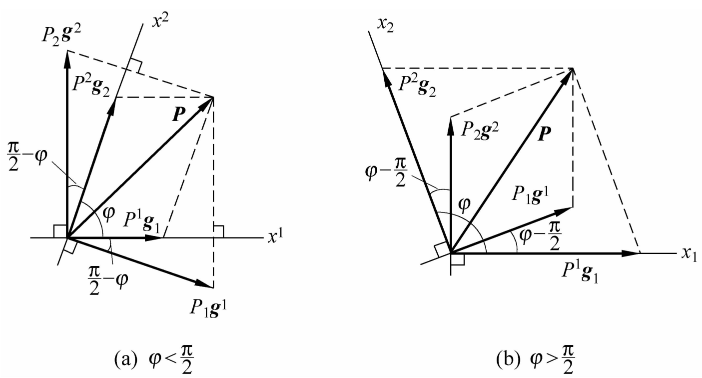

图1.7 平面内的斜角直线坐标系

由(1.2.4)式可以从协变基矢量唯一地确定逆变基矢量,反之亦然。以后对于每个坐标系都将引入这两组互为对偶的基矢量,并且用下标与上标区别协变与逆变指标。利用它们及对偶关系式(1.2.4)可以方便地求矢量的分量,不再需要求解方程组(1.2.3)。如(1.2.1)式中矢量对协变基矢量 $\boldsymbol{g}_\alpha$ 分解的分量 P^α(称为**矢量 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量**):

$$P^1 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^1, \qquad P^2 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^2$$

或统一写成

$$P^\alpha = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^\alpha \qquad (\alpha=1,2) \tag{1.2.7}$$

矢量 $\boldsymbol{P}$ 还可以对逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^\beta$ 分解:

$$\boldsymbol{P} = P_1\boldsymbol{g}^1 + P_2\boldsymbol{g}^2 = P_\beta\boldsymbol{g}^\beta \tag{1.2.8}$$

P_β 称为**矢量 $\boldsymbol{P}$ 的协变分量**。将上式左右点积协变基矢量 $\boldsymbol{g}_\alpha(\alpha=1,2)$，并利用对偶关系(1.2.4)可以方便地求得矢量的协变分量：

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}_\alpha = P_\alpha \qquad (\alpha = 1,2) \tag{1.2.9}$$

自由指标　在(1.2.4)式、(1.2.7)式、(1.2.9)式中出现的指标符号满足以下规则，称为**自由指标**：

(1) 一个指标在表达式的各项中都在同一水平上出现并且只出现一次，或者全为上标，或者全为下标。表示该表达式在该自由指标的 n 维取值范围内都成立，即代表了 n 个表达式。

(2) 一个表达式中的某个自由指标可以全体地换用相同取值范围的其他字母，意义不变。

本小节中定义的哑指标、自由指标及指标符号规则同样适用于三维问题，并且贯穿于全书。读者应熟练掌握指标符号表达的公式与不用指标符号表达的公式之间的互换关系。

还应指出的是，在笛卡儿坐标系中，基矢量是正交标准化基，一组协变基矢量 $\boldsymbol{e}_\alpha$ 与对应的逆变基矢量 $\boldsymbol{e}^\alpha$ 完全重合，不需要区分上下指标。此时，并且只有在此时，哑指标可以不分上下。例如在笛卡儿系中可以写成 $\boldsymbol{P}=P_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$，还可以将 δ_α^β 写成 $\delta_{\alpha\beta}$ 等。

1.2.2　三维空间中的斜角直线坐标系

1.2.2.1　斜角直线坐标系

在图 1.8 所示斜角直线坐标系(x^1,x^2,x^3)中，三维空间每一点以(x^1,x^2,x^3)表示。x^i 面为给定常数的各点的集合，是互相平行的坐标平面；$i=1,2,3$ 时分别为三族平行的坐标平面，它们互相之间是斜交的。仅仅 x^1 变化，x^2,x^3 分别取一系列确定值的各点的集合是一族互相平行的直线，称为 x^1 坐标线，x^2,x^3 坐标线也以同样的方法定义。三族坐标线是斜交的。

三维空间点的位置可以用坐标原点至该点的矢径 $\boldsymbol{r}(x^1,x^2,x^3)$ 表示。对于直线坐标系，$\boldsymbol{r}$ 与坐标成线性关系：

$$\boldsymbol{r} = x^1\boldsymbol{g}_1 + x^2\boldsymbol{g}_2 + x^3\boldsymbol{g}_3 = x^i\boldsymbol{g}_i \tag{1.2.10}$$

上式中 $\boldsymbol{g}_i(i=1,2,3)$ 分别是沿三个坐标线的参考矢量，在直线坐标系中，它们的大小与方向都不随空间点的位置变化。

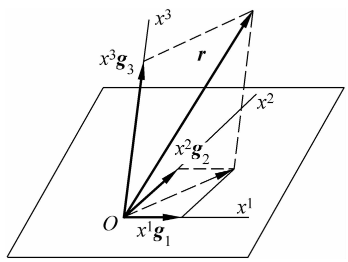

图 1.8　三维空间中的斜角直线坐标系

1.2.2.2　协变基矢量

由(1.2.10)式求矢径对坐标的微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i \tag{1.2.11}$$

将矢径对坐标的偏导数定义为**协变基矢量** $\boldsymbol{g}_i$，称为**自然基矢量**。即

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i} \tag{1.2.12}$$

协变基矢量的方向沿坐标线正方向，其大小等于当坐标 x^i 有 1 单位增量时两点之间的距离。因三个坐标线非共面，故

$$[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3] = \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3) \neq 0$$

即 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 线性无关。当 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 构成右手系时,混合积为正值,记

$$[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3] = \sqrt{g} \tag{1.2.13}$$

式中 g 是一个正实数。

1.2.2.3 逆变基矢量

定义一组3个与协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 互为对偶的**逆变基矢量** $\boldsymbol{g}^j$,满足对偶条件:

$$\boldsymbol{g}^j \cdot \boldsymbol{g}_i = \delta_i^j \qquad (i,j=1,2,3) \tag{1.2.14}$$

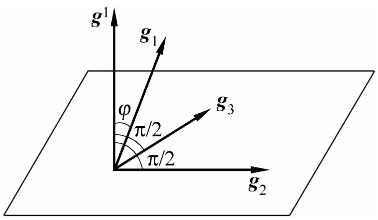

图1.9 逆变基矢量与协变基矢量的几何关系

式中 $\delta_i^j(i,j=1,2,3)$ 为三维的 Kronecker δ,其定义参考(1.2.6)式。δ_i^j 构成 3×3 的单位矩阵。

逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^j$ 与协变基矢量的关系如图1.9所示(图中设 $j=1$),其方向垂直于另两个协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i(i\neq j)$,并与 $\boldsymbol{g}_j$ 有夹角 $\varphi(\varphi<\pi/2)$,其模为

$$|\boldsymbol{g}^j| = \frac{1}{|\boldsymbol{g}^j|\cos\varphi} \tag{1.2.15}$$

今后可以证明,逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^j$ 实际上是垂直于坐标 x^j 的等值面(即坐标面)的梯度。

$$\boldsymbol{g}^j = \mathrm{grad}x^j = \nabla x^j \tag{1.2.16}$$

1.2.2.4 由协变基矢量求逆变基矢量

逆变基矢量根据对偶条件(1.2.14)由协变基矢量唯一地确定。具体计算方法有以下两种:

法1 因 $\boldsymbol{g}^1$ 垂直于 $\boldsymbol{g}_2$ 与 $\boldsymbol{g}_3$,即 $\boldsymbol{g}^1$ 平行于 $\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3$,可令 $\boldsymbol{g}^1=a\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3$,利用(1.2.13)式与(1.2.14)式:

$$1 = \boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}_1 = a(\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3)\cdot \boldsymbol{g}_1 = a\sqrt{g}$$

可求得 a。故

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}^1 = \dfrac{1}{\sqrt{g}}(\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3) \\ \boldsymbol{g}^2 = \dfrac{1}{\sqrt{g}}(\boldsymbol{g}_3 \times \boldsymbol{g}_1) \\ \boldsymbol{g}^3 = \dfrac{1}{\sqrt{g}}(\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2) \end{cases} \tag{1.2.17}$$

法2 将逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i(i=1,2,3)$ 作为矢量对协变基 $\boldsymbol{g}_j$ 分解:

$$\boldsymbol{g}^i = g^{ij}\boldsymbol{g}_j \qquad (i=1,2,3) \tag{1.2.18}$$

上式中的系数 g^{ij} 构成 3×3 矩阵,由式(1.2.18)和式(1.2.14)知

$$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j = g^{ik}\boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}^j = g^{ik}\delta_k^j = g^{ij} \qquad (i,j=1,2,3) \tag{1.2.19}$$

同样地,协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 也可以对逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^j$ 分解:

$$\boldsymbol{g}_i = g_{ij}\boldsymbol{g}^j \qquad (i=1,2,3) \tag{1.2.20}$$

且有

$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = g_{ij} \qquad (i,j=1,2,3) \tag{1.2.21}$$

由(1.2.19)式与(1.2.21)式还可以证明

$$g_{ij} = g_{ji}, \qquad g^{ij} = g^{ji} \tag{1.2.22}$$

所以 g_{ij} 与 g^{ij} 各自构成 3×3 的对称矩阵。由对偶条件易证 g_{ij} 与 g^{ij} 的矩阵互逆，只有 6 个独立分量：

$$\delta_i^j = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = g_{ik}\boldsymbol{g}^k \cdot \boldsymbol{g}^j = g_{ik}g^{kj} \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{1.2.23a}$$

上式写成矩阵形式为

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} \tag{1.2.23b}$$

此处，本书中以[ ]表示矩阵，矩阵元素的前指标表示行号，后指标表示列号。

已知坐标系后，可由(1.2.12)式求协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$，再由(1.2.21)式求 g_{ij}，由(1.2.23b)式求 g^{ij}，最后由(1.2.18)式求逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$。称 g_{ij} 为**度量张量的协变分量**，g^{ij} 为**度量张量的逆变分量**。其名称的由来见下节。

g_{ij} 的行列式值可由(1.1.21)式求得：

$$\det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_3 \\ \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_3 \\ \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_3 \end{vmatrix} = [\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3]^2 = g \tag{1.2.24}$$

由(1.1.22)式与对偶关系(1.2.14)式知

$$1 = \det(\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j) = [\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3][\boldsymbol{g}^1 \quad \boldsymbol{g}^2 \quad \boldsymbol{g}^3]$$

如果协变基矢量构成右手系，$[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3]$为正值，则由上式可知

$$[\boldsymbol{g}^1 \quad \boldsymbol{g}^2 \quad \boldsymbol{g}^3] = \frac{1}{[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3]} = \frac{1}{\sqrt{g}} \tag{1.2.25}$$

$[\boldsymbol{g}^1 \quad \boldsymbol{g}^2 \quad \boldsymbol{g}^3]$ 也为正值，故 $\boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2, \boldsymbol{g}^3$ 也构成右手系。

在笛卡儿坐标系中，指标不分上下，有

$$g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij} \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{1.2.26}$$

利用(1.2.25)式与对偶关系(1.2.14)式，与证明(1.2.17)式相类似地可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_1 = \sqrt{g}(\boldsymbol{g}^2 \times \boldsymbol{g}^3) \\ \boldsymbol{g}_2 = \sqrt{g}(\boldsymbol{g}^3 \times \boldsymbol{g}^1) \\ \boldsymbol{g}_3 = \sqrt{g}(\boldsymbol{g}^1 \times \boldsymbol{g}^2) \end{cases} \tag{1.2.27}$$

1.2.2.5　指标升降关系

与二维问题相同，矢量 $\boldsymbol{P}$ 既可对协变基、又可对逆变基分解

$$\boldsymbol{P} = P^i\boldsymbol{g}_i = P_j\boldsymbol{g}^j \tag{1.2.28}$$

且有

$$P^i = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}^i = P_k\boldsymbol{g}^k \cdot \boldsymbol{g}^i = P_k g^{ki} \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.2.29a}$$

$$P_j = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}_j = P^k\boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}_j = P^k g_{kj} \qquad (j = 1,2,3) \tag{1.2.29b}$$

(1.2.29)的两式称为矢量分量的**指标升降关系**。回顾(1.2.18)式与(1.2.20)式，可以发现基矢量也有类似的指标升降关系，而起升指标作用的是度量张量的逆变分量 g^{ij}，起降指标作用的是度量张量的协变分量 g_{ij}。

利用指标升降关系可以表示斜角直线坐标系中两个矢量的点积：

$$\boldsymbol{u} \cdot v = u^i v_i = u_i v^i = u_i v_j g^{ij} = u^i v^j g_{ij} \tag{1.2.30}$$

以及

$$|\boldsymbol{u}|^2 = u^i u_i = g_{ij}u^i u^j = g^{ij}u_i u_j \tag{1.2.31}$$

$$\cos(\boldsymbol{u}\cdot v) = \frac{\boldsymbol{u}\cdot v}{|\boldsymbol{u}|\,|v|} = \frac{u^i v_i}{\sqrt{u^j u_j}\ \sqrt{v^k v_k}} \tag{1.2.32}$$

1.3 曲线坐标系

1.3.1 曲线坐标系的定义

许多物理问题的定义域常涉及曲线或曲面边界,为便于求解经常引入曲线坐标系。

三维空间中任意点 P 的位置用固定点 O 至该点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 表示,矢径 $\boldsymbol{r}$ 可以由三个独立参量 $x^i(i=1,2,3)$确定

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1, x^2, x^3) \tag{1.3.1}$$

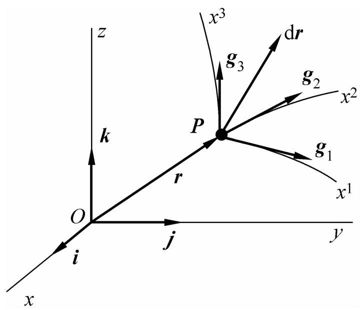

图 1.10 曲线坐标系

参量 x^i 的选择要求:在 x^1, x^2, x^3 的定义域内,x^i 与空间所有的点能够一一对应,x^i 就称为**曲线坐标**。具体表达时,往往借助于一参考的笛卡儿系 x, y, z 及相应的正交标准化基 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$,并设其坐标原点取在 O 点,如图 1.10 所示。此时,(1.3.1)式可写作:

$$\boldsymbol{r} = x(x^1,x^2,x^3)\boldsymbol{i} + y(x^1,x^2,x^3)\boldsymbol{j} + z(x^1,x^2,x^3)\boldsymbol{k} \tag{1.3.2}$$

上式还可以写成分量形式:

$$x^{k'} = x^{k'}(x^1,x^2,x^3) = x^{k'}(x^i) \qquad (k'=1,2,3) \tag{1.3.3}$$

式中 $x^{k'}$ 表示笛卡儿坐标 x,y,z;x^i 表示曲线坐标 x^1,x^2,x^3;k' 是自由指标,本书中括号里自变量的指标 i 既非自由指标也非哑指标,只表示在其取值范围内逐一取值。曲线坐标 x^i 与空间点一一对应的条件,即要求函数 $x^{k'}(x^i)$ 在 x^i 的定义域内单值、连续光滑且可逆;换言之,应满足

$$\begin{cases} \det\left(\dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) \neq 0 \\[2ex] \det\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right) \neq 0 \end{cases} \tag{1.3.4}$$

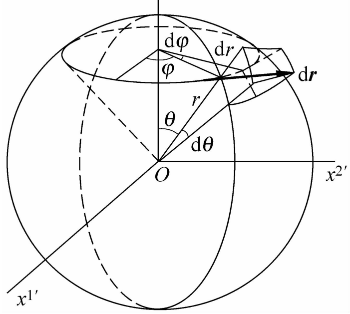

图 1.11 球坐标系

矩阵 $\left[\dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right]$,$\left[\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right]$称为 Jacobian 矩阵,其行列式称为 Jacobian 行列式。

在曲线坐标系中,当一个坐标 x^i 保持常数时,空间各点的集合构成的坐标面一般是曲面;只有一个坐标 x^i 变化,另两个坐标不变的空间各点的轨迹形成的坐标线(称为 x^i 线)一般是曲线。通过空间一个点有 3 根坐标线,不同点处坐标线的方向一般是变化的。曲线坐标的选择可以不是长度的量纲,而矢径与坐标之间一般不满足线性关系。

例如,图 1.11 所示球坐标系,$x^1=r, x^2=\theta, x^3=\varphi$,其