第 1 章

随机事件及其概率

1.1 本章知识要点

一、随机现象和随机事件

1. 随机现象

在个别试验中呈现不确定性，而在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象称为随机现象.

2. 随机试验

若试验（观察或实验过程）满足下述条件，则该试验称为随机试验（记为 E）.

(1) 试验可以在相同条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但能事先明确所有可能的结果，并且每次试验仅有其中一个结果出现；

(3) 进行一次试验之前，不能断言哪个结果会出现.

3. 基本结果

随机试验 E 的每一个不可再分解的结果称为基本结果（记为 ω），它将是统计中的基本单元，故又称**样本点**.

4. 样本空间

随机试验 E 的所有基本结果的全体称为样本空间（记为 Ω）.

5. 随机事件

随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的随机事件，简称**事件**，通常用大写字母 A，B，C，…表示. 由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**. 每次试验中必定要发生的事件称为**必然事件**，记为 Ω，每次试验中不可能发生的事件称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$.

二、事件的关系及其运算（A，B 和 A_k，$k=1,2,\cdots$ 为 Ω 的子集）

1. 包含关系

$A\subset B$，若 A 发生则必有 B 发生.

2. 相等关系

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

3. 和事件

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k=\{x\mid x\in A_1 \text{ 或 } x\in A_2,\cdots,\text{或 } x\in A_n\}.$$

4. 积事件

$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$，也记为 AB；

$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k=\{x\mid x\in A_1 \text{ 且 } x\in A_2,\cdots,\text{且 } x\in A_n\}$，也记为 $A_1A_2\cdots A_n$.

5. 差事件

$$A-B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

6. 互不相容(互斥)事件

$$A\cap B=\varnothing,\quad \text{或}\quad AB=\varnothing.$$

7. 对立事件

$$A\cup B=\Omega \quad \text{且}\quad AB=\varnothing.$$

记为 $B=\overline{A}$，$A=\overline{B}$，$\overline{A}=\Omega-A$.

8. 事件的运算律

与集合的运算律相似，事件的运算有交换律、结合律、分配律和德摩根律等.

三、概率的定义和性质

1. 古典概率

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，$n$ 为有限的正整数，且每个样本点 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 出现的可能性相等，则事件 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}$ 出现的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数 } m}{\text{基本事件的总数 } n}.$$

2. 几何概率

向某一可度量的区域 G 内投一点，若所投点落在 G 中任一区域 g 内的可能性的大小与 g 的度量成正比，而与 g 的位置和形状无关，则把具有这种特征的随机试验称为几何概型. 其点投中区域 g 的概率为

$$P=\frac{g \text{ 的度量}}{G \text{ 的度量}}.$$

3. 统计概率

在相同条件下，独立重复作 n 次试验，当试验次数 n 很大时，如果某事件 A 的频率 $f_n(A)$ 稳定地在 $[0,1]$ 上的某一个数值 p 附近摆动，而且随着试验次数的增多，这种摆动的

幅度会越来越小，则称数值 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$.

4. 概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于 E 的每一个随机事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，如果它满足下列三条公理，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率：

(1) $P(A)\geqslant 0$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

5. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)$ 或 $P(A)+P(\overline{A})=1$；

(3) 设 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A)\leqslant P(B)$；

(4) 设 A,B 为任意两个事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

四、概率的有关计算公式

1. 条件概率

设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 已发生的条件下，事件 B 发生的条件概率.

2. 乘法定理

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A),\quad P(A)>0,$$
$$P(AB)=P(B)P(A\mid B),\quad P(B)>0,$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1}).$$

3. 全概率公式

设 $B_iB_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j,P(B_j)\neq 0,\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i=\Omega$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A\mid B_i).$$

4. 贝叶斯公式(逆概率公式)

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j)P(A\mid B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

5. 事件的独立性

设 A,B 是两事件,如果 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称 A,B 相互独立.

若 A,B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 各对事件均相互独立.

6. 独立试验序列概型——伯努利概型

设事件 A 在每次试验中发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 次独立的重复试验中,事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P(\text{“}A\text{ 恰好发生 }k\text{ 次”}) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1-p, k = 1,2,\cdots,n.$$

五、重点与难点

1. 重点

概率的定义、性质、概率计算及事件的独立性.

2. 难点

判别事件概率的类型、条件概率、全概率公式及贝叶斯公式的应用.

1.2 典型习题解析

1. 填空题

(1) 同时掷两颗骰子,记录两颗骰子出现的点数之和,则随机试验的样本空间为________.

解 $\Omega=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

(2) 将一根单位长的细棍任意分为两段,记录各段的长度,则随机试验的样本空间为________.

解 记 x 为第一段长度,y 为第二段长度,则

$$\Omega=\{(x,y)\mid x+y=1,\text{ 且 } 0<x<1,0<y<1\}.$$

(3) 若 A,B,C 为 3 个事件,则 A,B 同时发生,而 C 不发生,可表示为________;A,B,C 最多有一个发生,可表示为________________.

解 A,B 同时发生,而 C 不发生,可表示为 $AB\overline{C}$;A,B,C 最多有一个发生,可表示为 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

(4) 掷一枚硬币,令 A_i 表示“第 i 次为正面朝上”,$i=1,2,3$. 则 $A_1A_2A_3$ 表示________;$\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3$ 表示________;$A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示________________.

解 $A_1A_2A_3$表示“三次均为正面朝上”;$\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3$ 表示“三次均为反面朝上”;$A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示“三次中至少有一次正面朝上”.

(5) 若 A,B 为互不相容的事件,且 $P(A)=0.2,P(B)=0.6$,则 $P(A\cup B)=$________;$P(AB)=$________;$P(A\cup\overline{B})=$________;$P(A\overline{B})=$________;$P(\overline{A}\overline{B})=$________.

解 因为 A,B 互不相容,所以 $AB=\varnothing$,$A\overline{B}=A-AB=A$,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.2+0.6-0=0.8;$$
$$P(AB)=0;$$
$$P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})=P(\bar{B})=1-P(B)=0.4;$$
$$P(A\bar{B})=P(A)=0.2;$$
$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.2.$$

(6) 若 A,B 为两个相互独立的事件，且 $P(A)=0.3,P(B)=0.4$，则 $P(AB)=$________；$P(A\cup B)=$________；$P(\bar{A}\cap\bar{B})=$________；$P(\bar{A}B)=$________；$P(A|\bar{B})=$________.

解　因为 A、B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B),\bar{A}B=B-AB$，则

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.12;$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.4-0.12=0.58;$$
$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.58=0.42;$$
$$P(\bar{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=0.4-0.12=0.28;$$
$$P(A\mid\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\bar{B})}=\frac{0.18}{0.6}=0.3.$$

(7) 设 A,B 为两事件，$P(A)=0.7,P(B)=0.6,A\supset B$，则 $P(AB)=$________；$P(A\cup B)=$________；$P(A\bar{B})=$________；$P(A|\bar{B})=$________；$P(A|B)=$________.

解　$P(AB)=P(B)=0.6$；

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(B)=0.7;$$
$$P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(B)=0.1;$$
$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\bar{B})}=\frac{0.1}{0.4}=0.25;$$
$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.6}{0.6}=1.$$

(8) 已知 $P(A)=0.5,P(B)=0.6,P(B|A)=0.8$，则 $P(\bar{A}\bar{B})=$________.

解　因为 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.8$，所以 $P(AB)=0.4$，则

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=0.3.$$

(9) 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=P(AC)=0,P(BC)=\dfrac{1}{8}$，则 A,B,C 至少有一个发生的概率为 ________.

解　因为 $P(AB)=P(AC)=0$，所以 $P(ABC)=0$，则

$$\begin{aligned}P(A,B,C\text{ 至少有一个发生})&=P(A\cup B\cup C)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&\quad-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-0-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

(10) 一批产品由45件正品、5件次品组成，现从中任取3件产品，其中恰有1件次品的概率为________.

解 基本事件总数为 $n=C_{50}^3$，所涉事件数为 $m=C_5^1C_{45}^2$，从而所求概率为

$$p=\frac{m}{n}=\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}=0.2526.$$

2. 单项选择题

(1) 某人射击3次，事件 A_i 表示第 i 次击中($i=1,2,3$)，则表示恰好击中一次的是(　　).

A. $A_1\cup A_2\cup A_3$　　B. $\Omega-\overline{A_1A_2A_3}$

C. $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$　　D. $\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

解 $A_1\cup A_2\cup A_3$，$\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 都表示至少击中一次，$\Omega-\overline{A_1A_2A_3}=A_1A_2A_3$ 表示都击中，$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 表示恰好击中一次，故选C.

(2) 若事件 A,B 满足 $A\subset B$，则(　　).

A. A 与 B 同时发生　　B. A 发生时则 B 必发生

C. B 发生时则 A 必发生　　D. A 不发生则 B 总不发生

解 由事件包含关系的定义易知应选B.

(3) 设 A,B,C 是三个事件，与事件 A 互斥的事件是(　　).

A. $\overline{A}B\cup A\overline{C}$　　B. $\overline{A(B\cup C)}$　　C. $\overline{ABC}$　　D. $\overline{A\cup B\cup C}$

解 $(\overline{A}B\cup A\overline{C})A=\overline{A}BA\cup A\overline{C}A=\varnothing\cup A\overline{C}=A\overline{C}$；

$\overline{A(B\cup C)}A=(\overline{A}\cup(\overline{B\cup C}))A=\overline{A}A\cup(\overline{B\cup C})A=(\overline{B\cup C})A=\overline{B}\overline{C}A$；

$\overline{ABC}A=(\overline{A}\cup\overline{BC})A=\overline{A}A\cup\overline{BC}A=\overline{BC}A$；

$(\overline{A\cup B\cup C})A=(\overline{A}\overline{B}\overline{C})A=\varnothing$，

仅有选项D与事件 A 的交集一定是空集，故选D.

(4) 设 A,B 为任意两个事件，则 $P(A-B)$ 等于(　　).

A. $P(B)-P(AB)$　　B. $P(A)-P(B)+P(AB)$

C. $P(A)-P(AB)$　　D. $P(A)-P(B)-P(AB)$

解 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，故选C.

(5) 设事件 A 与 B 的概率大于零，且 A 与 B 为对立事件，则不成立的是(　　).

A. A 与 B 互不相容　　B. A 与 B 相互独立

C. A 与 B 互不独立　　D. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容

解 A 与 B 为对立事件，$A\cup B=\Omega$，且 $AB=\varnothing$，因此 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$，所以 A 与 B 互不相容，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容，又 $P(AB)=0$，$P(A)P(B)>0$，$P(AB)\neq P(A)P(B)$，则 A 与 B 互不独立，故选B.

(6) 设 A,B 为任意两个事件，则下列关系式成立的是(　　).

A. $(A\cup B)-B=A$　　B. $(A\cup B)-B\supset A$

C. $(A\cup B)-B\subset A$　　D. $(A-B)\cup B=A$

解　$(A\cup B)-B=A-B\subset A$,$(A-B)\cup B=A\cup B$,故选 C.

(7) 设 A 与 B 为两个事件,$P(A)\neq P(B)>0$,且 $A\supset B$,则一定成立的关系式是(　　).

A. $P(A|B)=1$　　B. $P(B|A)=1$　　C. $P(B|\bar{A})=1$　　D. $P(A|\bar{B})=1$

解　因为 $P(A)\neq P(B)>0$,且 $A\supset B$,所以 $P(A)>P(B)$,则

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1,\quad P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}<1,$$

$$P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=0,\quad P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(B)}{1-P(B)}\leqslant 1,$$

故选 A.

(8) 设 A,B 是两个事件,$P(A)>0$,$P(B)>0$,则当下面的条件(　　)成立时,A 与 B 一定独立.

A. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$　　B. $P(B|A)=0$

C. $P(A|B)=P(B)$　　D. $P(A|B)=P(\bar{A})$

解　若 $P(B|A)=0$,则 $P(AB)=0\neq P(A)P(B)$,不独立;

若 $P(A|B)=P(B)$,则 $P(AB)=P(B)P(B)$,不独立;

若 $P(A|B)=P(\bar{A})$,则 $P(AB)=P(B)P(\bar{A})$,也不独立.

由独立性等价定理可知 A 选项是正确的.

(9) 若 A,B 是两个任意事件,且 $P(AB)=0$,则(　　).

A. A 与 B 互不相容　　B. AB 是不可能事件

C. $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$　　D. AB 未必是不可能事件

解　概率为 0 的事件,不一定不发生,因此 A,B 选项错误,正确选项为 D.

(10) 设随机事件 A,B,C 两两互斥,且 $P(A)=0.2$,$P(B)=0.3$,$P(C)=0.4$,则 $P(A\cup B-C)=$(　　).

A. 0.5　　B. 0.1　　C. 0.44　　D. 0.3

解　A,C 互斥,B,C 互斥,所以 $A\cup B$ 与 C 互斥,则

$$P(A\cup B-C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.5,$$

故选 A.

(11) 设 A,B 为两事件,则 $(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})$ 表示(　　).

A. 必然事件　　B. 不可能事件

C. A 与 B 恰有一个发生　　D. A 与 B 不同时发生

解　$(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})=(A\cup B)(\overline{AB})=(A\cup B)(\Omega-AB)=(A\cup B)-AB=A\bar{B}\cup\bar{A}B$,故选 C.

(12) 若 $P(A)=0.5$,$P(B)=0.4$,$P(A-B)=0.3$,则 $P(A\cup B)=$(　　).

A. 0.5　　B. 0.6　　C. 0.7　　D. 0.8

解 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3, P(AB)=0.2$,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7,$$

故选 C.

(13) 设 A,B 为任意两个随机事件,且 $A\subset B, P(B)>0$,则下列选项必然成立的是(　　).

A. $P(A)<P(A|B)$　　B. $P(A)\leqslant P(A|B)$

C. $P(A)>P(A|B)$　　D. $P(A)\geqslant P(A|B)$

解 $0<P(B)\leqslant 1, P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}\geqslant P(A)$,故选 B.

(14) 设 $P(A)=0.8, P(B)=0.7, P(A|B)=0.8$,则下列结论成立的是(　　).

A. A 与 B 独立　　B. A 与 B 互不相容

C. $B\supset A$　　D. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

解 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=0.8, P(AB)=0.56$,则 B,D 错误,而 $P(A)>P(B)$,故 C 错误,又 $P(AB)=P(A)P(B)=0.56$,故选 A.

(15) 每次试验失败的概率为 $p(0<p<1)$,则在 3 次独立的重复试验中至少成功一次的概率为(　　).

A. $3(1-p)$　　B. $(1-p)^3$　　C. $1-p^3$　　D. $C_3^1(1-p)p^2$

解 $A_i=$"第 i 次试验失败"$(i=1,2,3)$, $P(A_i)=p$,则至少成功一次的概率为

$$P(\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3)=P(\overline{A_1A_2A_3})=1-P(A_1A_2A_3)=1-p^3,$$

故选 C.

(16) 某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第 4 次射击恰好是第 2 次命中目标的概率为(　　).

A. $3p(1-p)^2$　　B. $6p(1-p)^2$

C. $3p^2(1-p)^2$　　D. $6p^2(1-p)^2$

解 $P\{$前 3 次恰有 1 次击中目标,第 4 次击中目标$\}=C_3^1p(1-p)^2p=3p^2(1-p)^2$,选 C.

(17) 掷两颗骰子,出现点数之和是 3 的概率为(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{18}$　　D. $\dfrac{1}{36}$

解 基本事件总数为 $m=36$,所涉事件数为 $n=2$,从而所求概率为 $p=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$,故选 C.

(18) 已知 A,B 两事件的概率都是 $\dfrac{1}{2}$,则下列结论成立的是(　　).

A. $P(A\cup B)=1$　　B. $P(\overline{A}\overline{B})=1$

C. $P(\overline{A}\overline{B})=P(AB)$　　D. $P(AB)=\dfrac{1}{2}$

解　题中 $P(A)=P(B)=0.5$，但没有条件 $AB=\varnothing$，不能认为是对立事件，又

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=P(AB),$$

故选 C.

(19) 设 A,B 和 C 为三个随机事件，$P(AB)>0$ 且有 $P(C|AB)=1$，则下列结论正确的是(　　).

A. $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　B. $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

C. $P(C)=P(AB)$　　D. $P(C)=P(A\cup B)$

解　由 $P(C|AB)=1$，有 $C\supset AB$，$P(C)\geqslant P(AB)$，又

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\quad 且\quad P(A\cup B)\leqslant 1,$$

故 $P(C)\geqslant P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$，选 B.

(20) A,B,C 为相互独立事件，$0<P(C)<1$，则下列 4 对事件中不相互独立的是(　　).

A. $\overline{A\cup B}$与 C　　B. $\overline{A-B}$与 C　　C. $\overline{AB}$与 C　　D. $\overline{AC}$与 $\overline{C}$

解　由 A,B,C 为相互独立事件，故其中任意两个事件的和、差、交、并、逆与另一个事件或其逆是相互独立的，故选 D.

3. 设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$，$C=\{5,6,7,8\}$，求：(1)$AB$；(2)$\overline{A}\cup\overline{B}$；(3)$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$；(4)$\overline{A\,\overline{BC}}$；(5)$\overline{A\overline{B}\,\overline{C}}$；(6)$(A\cup B)C$；(7)$\overline{A(B\cup C)}$；(8)$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}}$.

解　(1) $AB=\{1,3\}$；

(2) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,4,5,6,7,8,9,10\}$；

(3) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\{1,2,3,4,5,7,9\}$；

(4) $\overline{A\,\overline{BC}}=\{5,6,7,8,9,10\}$；

(5) $\overline{A\overline{B}\,\overline{C}}=\{1,3,5,6,7,8,9,10\}$；

(6) $(A\cup B)C=\{5,7\}$；

(7) $\overline{A(B\cup C)}=\{2,4,5,6,7,8,9,10\}$；

(8) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}}=ABC=\varnothing$.

4. 如图 1.1，令 A_i 表示“第 i 个开关闭合”，$i=1,2,\cdots,6$，试用 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 表示下列事件：

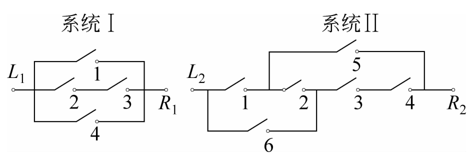

图　1.1

(1)“系统Ⅰ为通路”；

(2)“系统Ⅱ为通路”.

解　(1) $A_1\cup A_2A_3\cup A_4$；

(2) $A_1A_5\cup A_1A_2A_3A_4\cup A_6A_3A_4\cup A_6A_2A_5$.

5. 若 $P(A)=\alpha$，$P(B)=\beta$，$P(\overline{A}\cup\overline{B})=\gamma$. 求：(1)$P(AB)$；(2)$P(\overline{A}B)$；(3)$P(\overline{A}\cup B)$；(4)$P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 (1) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=\gamma, P(AB)=1-\gamma$;

(2) $P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\beta-1+\gamma$;

(3) $P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)=1-\alpha+\beta-(\beta-1+\gamma)=2-\alpha-\gamma$;

(4) $P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=2-\alpha-\beta-\gamma$.

6. 从一副 52 张的扑克牌中任取 4 张，求下列事件的概率：(1)4 张中恰有 2 张“K”；(2)至少有 2 张“K”；(3)4 张牌花色各不相同.

解 基本事件总数为 $n=C_{52}^4$.

(1) 所涉事件是 4 张牌中恰有 2 张“K”，总数为 $m=C_4^2\cdot C_{48}^2$，所以 $p_1=\dfrac{C_4^2C_{48}^2}{C_{52}^4}$；

(2) 所涉事件是 4 张牌中至少有 2 张“K”，包含 2 张、3 张、4 张的可能性，其总数为 $m=C_4^2C_{48}^2+C_4^3C_{48}^1+C_4^4C_{48}^0$，所以 $p_2=\dfrac{C_4^2C_{48}^2+C_4^3C_{48}^1+C_4^4}{C_{52}^4}$；

(3) 设想分步骤依次抽取“黑桃”“红心”“草花”“方片”，由乘法原理，有 $m=C_{13}^1\cdot C_{13}^1\cdot C_{13}^1\cdot C_{13}^1$，所以 $p_3=\dfrac{(C_{13}^1)^4}{C_{52}^4}$.

7. 在桥牌比赛中，把 52 张牌任意地分发给东、南、西、北四家，求北家的 13 张牌中：

(1)恰有 A，K，Q，J 各一张，其余全为小牌的概率；(2)四张牌 A 全在北家的概率.

解 设事件 A 表示“北家的 13 张牌中恰有 A，K，Q，J 各一张，其余为小牌”，事件 B 表示“四张 A 全在北家”，则有

基本事件总数 $n=C_{52}^{13}$；

事件 A 所含的基本事件数为 $m_1=C_4^1\times C_4^1\times C_4^1\times C_4^1\times C_{36}^9$；

事件 B 所含的基本事件数 $m_2=C_4^4\times C_{48}^9$，

故所求的概率为

$$P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{C_4^1\times C_4^1\times C_4^1\times C_4^1\times C_{36}^9}{C_{52}^{13}}\approx 0.038,$$

$$P(B)=\frac{m_2}{n}=\frac{C_4^4\times C_{48}^9}{C_{52}^{13}}\approx 0.0026.$$

8. 在 40 件产品中有 3 件次品，从中任取 2 件，求：(1)“恰有一件次品”的概率；(2)“全是次品”的概率；(3)“至少有一件次品”的概率；(4)“无次品”的概率.

解 基本事件总数为 $n=C_{40}^2$.

(1) m(恰有一件次品)$=C_{37}^1\cdot C_3^1$，所以 $p_1=\dfrac{C_{37}^1C_3^1}{C_{40}^2}=\dfrac{37\times3\times2}{40\times39}=\dfrac{37}{260}$；

(2) m(全是次品)$=C_3^2$，所以 $p_2=\dfrac{C_3^2}{C_{40}^2}=\dfrac{3\times2}{40\times39}=\dfrac{1}{260}$；

(3) m(至少有一件次品)$=C_{37}^1\cdot C_3^1+C_3^2$，所以 $p_3=\dfrac{C_{37}^1C_3^1+C_3^2}{C_{40}^2}=\dfrac{37+1}{260}=\dfrac{19}{130}$；

(4) 事件“无次品”与事件“至少有一件次品”对立，故 $p_4=1-\frac{19}{130}=\frac{111}{130}$.

9. 甲袋中有 3 只白球、7 只红球、15 只黑球，乙袋中有 10 只白球、6 只红球、9 只黑球，从两袋中分别任取一球，求两球颜色相同的概率.

解　记 A_1,A_2,A_3 分别是“从甲袋中取出白球、红球、黑球”，则

$$P(A_1)=\frac{3}{25},\quad P(A_2)=\frac{7}{25},\quad P(A_3)=\frac{15}{25}.$$

另记 B_1,B_2,B_3 分别是“从乙袋中取出白球、红球、黑球”，则

$$P(B_1)=\frac{10}{25},\quad P(B_2)=\frac{6}{25},\quad P(B_3)=\frac{9}{25}.$$

显然 A_1,A_2,A_3 互不相容，B_1,B_2,B_3 互不相容，所以有

$$\begin{aligned}P(\text{“两球颜色相同”})&=P(A_1B_1\cup A_2B_2\cup A_3B_3)\\&=P(A_1B_1)+P(A_2B_2)+P(A_3B_3)\\&=\frac{3}{25}\cdot\frac{10}{25}+\frac{7}{25}\cdot\frac{6}{25}+\frac{15}{25}\cdot\frac{9}{25}=\frac{207}{625}.\end{aligned}$$

10. 某地铁车站每 5 分钟有一趟列车到站，乘客到达车站的时刻是任意的，求一乘客候车时间不超过 3 分钟的概率.

解　几何概型问题. 设 x 表示候车时间，则 x 可取 $[0,5]$ 内的任意值，故总的可能区域 G 的度量为 5，令 A 表示乘客候车时间不超过 3 分钟，则所涉事件中 $0\leqslant x\leqslant 3$，其 A 的度量为 3，所以有乘客候车时间不超过 3 分钟的概率 $p=\frac{3}{5}=0.6$.

11. 在 $(0,1)$ 中任取两个数，求下列事件的概率：(1) 两数和小于 1.5；(2) 两数积小于 0.25；(3) 两数中最大者小于 0.5；(4) 两数中最小者小于 0.5.

解　令 x,y 分别表示任取的两个数，则 $0<x<1,0<y<1$，样本空间为 $\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，其度量如图 1.2 中正方形区域.

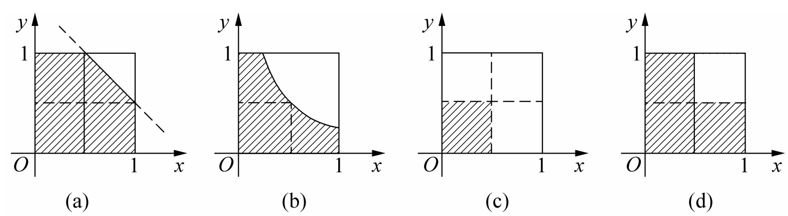

图　1.2

(1) 令 A 表示“$x+y<1.5$”，则 A 的面积如图 1.2(a) 中阴影部分，所以

$$P(A)=\frac{7}{8}=0.875;$$

(2) 令 B 表示“$xy<0.25$”，则 B 的面积如图 1.2(b) 中阴影部分，所以

$$P(B)=\frac{1\times 0.25+\int_{0.25}^{1}\frac{0.25}{x}\mathrm{d}x}{1\times 1}\approx 0.5966;$$

(3) 令 C 表示“$\max\{x,y\}<0.5$”,则 C 的面积如图 1.2(c)中阴影部分,所以

$$P(C)=\frac{1}{4}=0.25;$$

(4)令 D 表示“$\min\{x,y\}<0.5$”,则 D 的面积如图 1.2(d)中阴影部分,所以

$$P(D)=\frac{3}{4}=0.75.$$

12. 将长度为 a 的棒任折为 3 段,求它们能构成三角形的概率.

解 取此棒长为数轴,折断点的坐标为 x,y,则必有 $0<x<a,0<y<a$.这相当于 xy 平面中的点(x,y)落于边长为 a 的正方形中,故所有基本事件可以用此正方形 $\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<a,0<y<a\}$的面积来表示.

所谓能构成三角形,即任意两边之和应大于第三边,所以所涉事件的度量为 $|x-y|<\frac{a}{2}$,即 $y-\frac{a}{2}<x<y+\frac{a}{2}$,注意两种可能性:①$x<\frac{a}{2}\Rightarrow y>\frac{a}{2}$,②$y<\frac{a}{2}\Rightarrow x>\frac{a}{2}$,故事件“能构成三角形”的实际度量如图 1.3 中阴影部分,所以 $p=\frac{2}{8}=0.25$.

另解 设三段长度分别为 $x,y,a-x-y$,

则 $\Omega=\{(x,y)\mid x>0,y>0,0<x+y<a\}$. 所涉事件取值 $\begin{cases}x+y>a-x-y,\\x+a-x-y>y,\\y+a-x-y>x\end{cases}\Rightarrow$ $\begin{cases}x+y>a/2,\\y<a/2,\\x<a/2,\end{cases}$ 其实际度量如图 1.4 中阴影部分,故事件“能构成三角形”的概率为 $p=\frac{1}{4}=0.25$.

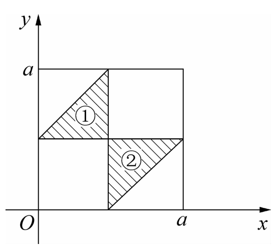

图 1.3

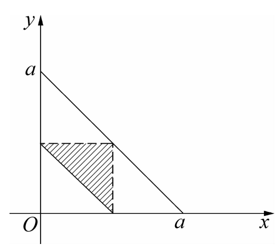

图 1.4

13. 某元件使用到 2000 小时还能正常工作的概率为 0.94,使用到 3000 小时还能正常工作的概率为 0.87,求已经工作了 2000 小时的元件还能继续工作到 3000 小时的概率.

解 设 A 表示"使用到 2000 小时还能正常工作"，B 表示"使用到 3000 小时还能正常工作"，则显然有 $B\subset A$，且 $P(A)=0.94$，$P(B)=0.87$，$P(AB)=P(B)=0.87$，故所求概率为 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}=\dfrac{0.87}{0.94}\approx 0.9255$.

14. 若在 100 个零件中有 10 个次品，每次从中任取一个(不放回)，求直到第 4 次才取到正品的概率.

解 设 A_i 表示"第 i 次取到正品"，则"第 4 次才取到正品"可表示为 $\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3A_4$，所以

$$P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3A_4)=P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3)P(A_4\mid\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3)=\frac{\mathrm{C}_{10}^3}{\mathrm{C}_{100}^3}\frac{\mathrm{C}_{90}^1}{\mathrm{C}_{97}^1}\approx 0.000\,689.$$

15. 球赛规定：5 局比赛中先胜 3 局者为胜. 设甲、乙两人在每局中获胜的概率分别是 0.6 和 0.4，若比赛进行了两局，甲以 2∶0 领先，求最终甲为胜者的概率.

解 设 A_i 表示"甲胜第 i 次局"，B_i 表示"乙胜第 i 次局"，则事件"最终甲为胜者"可表示为 $C=A_3\cup B_3A_4\cup B_3B_4A_5$，且 A_3，B_3A_4，$B_3B_4A_5$ 是互不相容的，则最终甲获胜的概率为

$$P(C)=P(A_3)+P(B_3A_4)+P(B_3B_4A_5)=0.6+0.4\times 0.6+0.4\times 0.4\times 0.6=0.936.$$

16. 工厂仓库中存放有规格相同的产品，其中甲车间生产的占 70%，乙车间生产的占 30%. 甲车间生产的产品的次品率为 $\frac{1}{10}$，乙车间生产的产品的次品率为 $\frac{2}{15}$. 现从这些产品中任取一件进行检验，求：(1)取出的这件产品是次品的概率；(2)若取出的是次品，该次品是甲车间生产的概率.

解 设 A 表示取出的这件产品是甲车间生产，B 表示取出的这件产品是次品，则有

$$P(A)=0.7,\quad P(\overline{A})=0.3,\quad P(B|A)=\frac{1}{10},\quad P(B|\overline{A})=\frac{2}{15}.$$

(1) 由全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.7\times\frac{1}{10}+0.3\times\frac{2}{15}=0.11;$$

(2) 由贝叶斯公式及(1)的结果得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{0.7\times\frac{1}{10}}{0.11}\approx 0.636.$$

17. 盒中共 12 个球，为 9 个新球、3 个旧球，若第 1 次比赛从中任取 3 个，使用后仍放回，第 2 次比赛再从中任取 3 个. (1)求第 2 次取到的 3 个均为新球的概率；(2)若第 2 次取到的 3 个均为新球，求第 1 次取的 3 个也是新球的概率.

解 设 A_i 表示"第 1 次比赛用 i 个新球"，B_i 表示"第 2 次比赛用 i 个新球"，则有

(1) 由全概率公式得：

$$P(B_3)=P(A_0)P(B_3\mid A_0)+P(A_1)P(B_3\mid A_1)+P(A_2)P(B_3\mid A_2)+P(A_3)P(B_3\mid A_3)$$

$$=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_9^3}{C_{12}^3}+\frac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_8^3}{C_{12}^3}+\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_7^3}{C_{12}^3}+\frac{C_9^3}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_{12}^3}\approx 0.146;$$

(2) 由贝叶斯公式及(1)的结果得：

$$P(A_3\mid B_3)=\frac{P(A_3B_3)}{P(B_3)}=\frac{P(A_3)P(B_3\mid A_3)}{P(B_3)}\approx 0.238.$$

18. 某商店销售一批彩电，共有 10 台，其中 3 台为进口元件组装，7 台为进口原装，包装外观均相同，现已售出了两台，求从剩下的彩电里面任取一台为原装的概率.

解 设 A_i 表示“卖出去 i 台原装彩电”，$i=0,1,2$，B 表示“取得原装彩电”. 则由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_0)P(B\mid A_0)+P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)\\&=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_7^1}{C_8^1}+\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_6^1}{C_8^1}+\frac{C_7^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{C_5^1}{C_8^1}=0.7.\end{aligned}$$

19. 设甲袋中有 n_1 个白球和 n_2 个黑球，乙袋中有 m_1 个白球和 m_2 个黑球，若先从甲袋中任取一球放入乙袋，然后再从乙袋中任取一球，求从乙袋中取到白球的概率.

解 乙袋中的白球数与从甲袋中取出的球有关，故设 A 表示“从甲袋中取出的是白球”，B 表示“从甲袋中取出的是黑球”，C 表示“从乙袋中取出的是白球”，则

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)\\&=\frac{n_1}{n_1+n_2}\cdot\frac{m_1+1}{m_1+m_2+1}+\frac{n_2}{n_1+n_2}\cdot\frac{m_1}{m_1+m_2+1}\\&=\frac{m_1(n_1+n_2)+n_1}{(n_1+n_2)(m_1+m_2+1)}.\end{aligned}$$

20. 验收 100 件产品，从中随机地取 3 件，若 3 件中有一件不合格就拒收这批产品，设一件不合格产品经测试被查出的概率为 0.95，而一件合格产品在测试中被误认为不合格的概率为 0.01，当 100 件产品中有 4 件不合格时，这批产品被接收的概率是多少？

解 产品被接收时，也有可能在 3 件产品中含有不合格品，而没被查出.

设 A_k 表示“取出的 3 件产品中含 k 件不合格品”，B_k 表示“取出 k 件合格品”，C 表示“这批产品被接受”，则事件 A_kB_{3-k} 表示“取出的 3 件产品中含 k 件不合格品，$3-k$ 件合格品”，且 $P(A_kB_{3-k})=\dfrac{C_4^kC_{96}^{3-k}}{C_{100}^3}$，在此情况下被接受的概率为 $P(C|A_kB_{3-k})=(0.05)^k(0.99)^{3-k}$. 从而，由全概率公式可得

$$P(C)=\sum_{k=0}^{3}P(A_kB_{3-k})P(C\mid A_kB_{3-k})=\sum_{k=0}^{3}\frac{C_4^kC_{96}^{3-k}}{C_{100}^3}(0.05)^k(0.99)^{3-k}.$$

21. 一位工人看管 3 台机器，在 1 小时内 3 台机器不用工人照管的概率分别为 0.9，0.8 和 0.7，求在 1 小时内 3 台机器最多有一台需要照管的概率.

解 设 A,B,C 分别表示“3 台机器各自不需要工人照管”，由题意可知

$$P(A)=0.9,\quad P(B)=0.8,\quad P(C)=0.7.$$

事件“3 台机器最多有一台需要照管”可表示为 $ABC\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$，注意到 ABC，$\overline{A}BC$，$A\overline{B}C$，$AB\overline{C}$ 之间是互不相容的，且 3 台机器是否需要照管应该是相互独立的，故有

$$\begin{aligned}P(ABC\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C})&=P(A)P(B)P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)\\&\quad+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})\\&=0.9\times0.8\times0.7+0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7\\&\quad+0.9\times0.8\times0.3=0.902.\end{aligned}$$

22. 某种灯泡使用 1000 小时以上的概率为 0.2，求 3 只灯泡使用 1000 小时后，最多有一只损坏的概率.

解　设 A_i 表示“3 只灯泡使用 1000 小时后有 i 只损坏”，则

$$P(A_0)=(0.2)^3=0.008,\quad P(A_1)=C_3^1(0.8)^1(0.2)^2=0.096.$$

注意 A_0，A_1 互不相容，所以有

$$P(\text{最多有一只损坏})=P(A_0\cup A_1)=P(A_0)+P(A_1)=0.008+0.096=0.104.$$

23. 一电路由元件 A 与两个并联元件 B 和 C 相串联而成，元件 A，B，C 损坏的概率分别为 0.3，0.2，0.2，求电路发生断路的概率.

解　连接如图 1.5，在可靠性问题中，一般假设元件损坏与否是相互独立的.

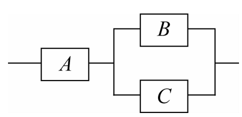

图 1.5

$$\begin{aligned}P(\text{电路发生断路})&=P(A\cup(BC))=P(A)+P(BC)-P(ABC)\\&=0.3+0.2\times0.2-0.3\times0.2\times0.2=0.328.\end{aligned}$$

24. 设在 4 次独立试验中，某事件 A 出现的概率相等. 若已知 4 次试验中 A 至少发生一次的概率为 $\dfrac{65}{81}$，求事件 A 在一次试验中发生的概率.

解　设 B 表示“4 次试验中 A 至少发生一次”，则 $\overline{B}$ 表示“4 次试验中 A 均不发生”，且

$$P(B)=\frac{65}{81},\quad P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{65}{81}=\frac{16}{81}=\left(\frac{2}{3}\right)^4.$$

因为 4 次试验中 A 不发生，相当于连续 4 次发生 $\overline{A}$，故由独立性，可得

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4=P(\overline{B})=P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A})=[P(\overline{A})]^4=[1-P(A)]^4,$$

从而 $1-P(A)=\dfrac{2}{3}\Rightarrow P(A)=\dfrac{1}{3}$.

25. 设射手每次命中目标的概率为 0.2，要进行多少次独立射击才能使该射手至少击中目标一次的概率不小于 0.9？

解　设 A 表示“独立射击 n 次至少命中目标一次”，则 $\overline{A}$ 表示“一次也不命中目标”. 要求 $P(A)\geqslant0.9$，即 $P(\overline{A})<0.1$，而 $P(\overline{A})=C_n^n(0.8)^n=(0.8)^n<0.1$，可取 $n=11$.（当 $n=10$ 时，$P(\overline{A})=(0.8)^{10}\approx0.1074$；当 $n=11$ 时，$P(\overline{A})=(0.8)^{11}\approx0.0859$.）

26. 某元件的次品率为 0.01，现从总产品中任取 4 件，求下列事件的概率：(1)“无次品”；(2)“恰有一件次品”；(3)“恰有 2 件次品”；(4)“恰有 3 件次品”；(5)“均为次品”.

解 任取 4 件，可认为是独立作 4 次抽取，而每次抽得次品的概率均为 0.01.

设 A_i 表示"4 件中恰有 i 件次品"，则由独立试验序列可知

(1) $P(A_0)=(0.99)^4\approx 0.961$;

(2) $P(A_1)=\mathrm{C}_4^1(0.01)(0.99)^3\approx 0.039$;

(3) $P(A_2)=\mathrm{C}_4^2(0.01)^2(0.99)^2\approx 0.0006$;

(4) $P(A_3)=\mathrm{C}_4^3(0.01)^3(0.99)^1\approx 0.000\,004$;

(5) $P(A_4)=\mathrm{C}_4^4(0.01)^4\approx 0.000\,000\,01$.

27. 甲、乙两人轮流射击，甲的命中率为 0.3，乙的命中率为 0.4，若甲先开始射击，求各人先命中目标的概率.

解 设 A 表示"甲命中目标"，B 表示"乙命中目标"，则"甲先命中目标"这个事件等价于 $C=A\cup\overline{A}\overline{B}A\cup\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}A\cup\cdots$，由每次射击的独立性，可得

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A)+(P(\overline{A})P(\overline{B}))P(A)+(P(\overline{A})P(\overline{B}))^2P(A)+(P(\overline{A})P(\overline{B}))^3P(A)+\cdots\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{P(A)(1-(P(\overline{A})P(\overline{B}))^n)}{1-P(\overline{A})P(\overline{B})}=\frac{P(A)}{1-P(\overline{A})P(\overline{B})}=\frac{0.3}{1-0.7\times 0.6}\approx 0.517.\end{aligned}$$

同理，设 D 表示"乙先命中目标"，则

$$\begin{aligned}P(D)&=P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B}\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}B)+\cdots\\&=P(\overline{A})P(B)+(P(\overline{A})P(\overline{B}))P(\overline{A})P(B)+(P(\overline{A})P(\overline{B}))^2P(\overline{A})P(B)\\&\quad+(P(\overline{A})P(\overline{B}))^3P(\overline{A})P(B)+\cdots\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{P(\overline{A})P(B)(1-(P(\overline{A})P(\overline{B}))^n)}{1-P(\overline{A})P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A})P(B)}{1-P(\overline{A})P(\overline{B})}\\&=\frac{0.7\times 0.4}{1-0.7\times 0.6}\approx 0.483.\end{aligned}$$

28. 设事件 A 在每次试验中发生的概率为 0.3，当 A 发生次数大于 2 时，指示灯发出信号. 进行 5 次独立试验，求指示灯发出信号的概率.

解 设 B_i 表示"5 次试验中，A 发生了 i 次"，则 $P(B_i)=\mathrm{C}_5^i\,(0.3)^i\,(0.7)^{5-i}$，所以

$$\begin{aligned}P(\text{指示灯发出信号})&=P(B_3\cup B_4\cup B_5)=P(B_3)+P(B_4)+P(B_5)\\&=\mathrm{C}_5^3\,(0.3)^3\,(0.7)^2+\mathrm{C}_5^4\,(0.3)^4\,(0.7)^1+\mathrm{C}_5^5\,(0.3)^5\approx 0.163.\end{aligned}$$

29. 掷一枚均匀硬币，直到出现 3 次正面朝上为止，若正好在第 6 次后停止，求第 5 次也是正面朝上的概率.

解 设 A 表示"第 5 枚硬币正面朝上"，B 表示"第 6 枚硬币正面朝上"，则

$$P(B)=\mathrm{C}_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}\quad\text{（只需考虑前 5 次恰有 2 次正面朝上）},$$

而

$$P(AB)=\mathrm{C}_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{16}\quad\text{（只需考虑前 4 次恰有 1 次正面朝上）},$$

所以

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{16}}{\frac{5}{16}}=\frac{2}{5}.$$

30. 三人独立破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$. 求：(1)三人中至少有一人能将此密码译出的概率；(2)三人都将此密码译出的概率.

解　设 A_i 表示第 i 人能破译密码($i=1,2,3$)，则有

$$P(A_1)=\frac{1}{2},\quad P(A_2)=\frac{1}{3},\quad P(A_3)=\frac{1}{4}.$$

(1) 三人中至少有一人能将此密码译出的概率为

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})\\&=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{6}{24}=\frac{18}{24}=0.75;\end{aligned}$$

(2) 三人都将此密码译出的概率

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}\approx 0.042.$$

31. 试证：$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A)+P(B)-2P(AB)$.

证明　$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)-P(A\overline{B}\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$

$=P(A-AB)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-2P(AB)$.

32. 设 $P(A)=a$，$P(B)=b(b>0)$，证明：$\frac{a}{b}\geqslant P(A|B)\geqslant\frac{a+b-1}{b}$.

证明　$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，由于 $P(AB)\leqslant P(A)$，且 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1$，从而有

$$\frac{a}{b}=\frac{P(A)}{P(B)}\geqslant P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\geqslant\frac{P(A)+P(B)-1}{P(B)}=\frac{a+b-1}{b}.$$

33. (1) 设 A，C 独立，B，C 独立，A，B 互不相容，证明：$A\cup B$ 与 C 独立；

(2) 设 A，B，C 独立，证明：$A\cup B$ 与 $\overline{C}$ 独立.

证明　(1) 因为 A，B 互不相容，则 AC，BC 也互不相容，所以有

$$\begin{aligned}P((A\cup B)C)&=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ACBC)\\&=P(A)P(C)+P(B)P(C)=(P(A)+P(B))P(C)\\&=P(A\cup B)P(C),\end{aligned}$$

所以 $A\cup B$ 与 C 独立.

(2) 因为 A，B，C 独立，则 A，B，$\overline{C}$ 也独立，

$$\begin{aligned}P((A\cup B)\overline{C})&=P(A\overline{C}\cup B\overline{C})=P(A\overline{C})+P(B\overline{C})-P(A\overline{C}B\overline{C})\\&=P(A)P(\overline{C})+P(B)P(\overline{C})-P(A)P(B)P(\overline{C})\end{aligned}$$

$$= (P(A)+P(B)-P(A)P(B))P(\bar{C}) = P(A \cup B)P(\bar{C}),$$

所以 $A\cup B$ 与 $\bar{C}$ 独立.

34. 若 $P(A)>0,P(B)>0$,且 $P(A|B)>P(A)$,试证: $P(B|A)>P(B)$.

证明 因为

$$P(B)P(A|B) = P(AB) = P(A)P(B|A),$$

所以有

$$\frac{P(B|A)}{P(B)}=\frac{P(A|B)}{P(A)}>1\Rightarrow P(B|A)>P(B).$$

1.3 自测题及解答

一、自测题

1. 填空题

(1) 掷一颗骰子两次,记录两次出现的点数,则随机试验的样本空间为________.

(2) 设 A,B,C 为 3 事件,则这 3 事件中恰有 2 个事件发生可表示为________.

(3) 若 A,B 为两个互不相容事件,且 $P(A)=0.3,P(B)=0.4$,则 $P(\bar{A}\cap\bar{B})=$________;$P(\bar{A}\cup\bar{B})=$________;$P(\bar{A}B)=$________;$P(B|A)=$________;$P(B|\bar{A})=$________.

(4) 设事件 A,B 相互独立且互不相容,则 $\min\{P(A),P(B)\}=$________.

(5) 假设每个人在 12 个月份的每个月出生为等可能,则 12 个人的生日在不同月份的概率为________.

2. 单项选择题

(1) 设 $P(A)=a,P(B)=b,P(A\cup B)=c$,则 $P(A\bar{B})=($ $)$.

A. $a-b$ B. $c-b$ C. $a(1-b)$ D. $b-a$

(2) 设 A,B,C 是三个两两不相容的事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=a$,则 a 的最大值为( ).

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

(3) 若 $A\supset B,A\supset C,P(A)=0.9,P(\bar{B}\cup\bar{C})=0.8$,则 $P(A-BC)=($ $)$.

A. 0.4 B. 0.6 C. 0.7 D. 0.8

(4) 一种零件的加工由两道工序组成,第一道工序的废品率为 p_1,第二道工序的废品率为 p_2,则该零件加工的成品率为( ).

A. $1-p_1-p_2$ B. $1-p_1p_2$

C. $1-p_1-p_2+p_1p_2$ D. $2-p_1-p_2$

(5) 设两个元件的寿命分别为 T_1,T_2,并联成一个系统,只要有一个元件正常工作则系统能正常工作,事件“系统的寿命超过 t”可表示为( ).

A. $\{T_1+T_2>t\}$　　B. $\{T_1T_2>t\}$

C. $\{\min\{T_1,T_2\}>t\}$　　D. $\{\max\{T_1,T_2\}>t\}$

3. 从 13 张黑桃扑克牌中任取一张，观看后放回，连取 3 次，求下列事件的概率：(1)“没有同号”；(2)“有同号”；(3)“最多有两张同号”.

4. 罐中有 12 颗围棋子，其中有 8 颗白子、4 颗黑子，若从中任取 3 颗，求：

(1) 取到的都是白子的概率；

(2) 取到两颗白子、一颗黑子的概率；

(3) 取到三颗棋子中至少有一颗黑子的概率；

(4) 取到三颗棋子颜色相同的概率.

5. 在桥牌比赛中，把 52 张牌任意地分发给东、南、西、北四家，已知定约方共有 9 张黑桃主牌的条件下，求其余 4 张黑桃在防守方手中各种分配的概率：

(1)“2—2”分配的概率；

(2)“1—3”或“3—1”分配的概率；

(3)“0—4”或“4—0”分配的概率.

6. 某课程必须通过上机考试和笔试两种考试才能结业，某生通过上机考试和笔试的概率均为 0.8，至少通过一种测试的概率为 0.95，问该生该课程能结业的概率有多大？

7. 从 1～1000 这 1000 个数中随机地取一个数，问：取到的数不能被 6 或 8 整除的概率是多少？

8. 10 个考签有 4 个难签，3 人参加抽签考试，不重复地抽取，每人一次，甲先抽，乙次之，丙最后，求：(1)丙抽到难签的概率；(2)甲、乙、丙都抽到难签的概率.

9. 试卷中有一道选择题，共有 4 个答案可供选择，其中只有一个是正确的，任一考生如果会解这道题，则一定能选取正确答案；如果他不会解这道题，则不妨任选一个答案. 设考生会解这道题的概率为 0.8，求：(1)考生选出正确答案的概率；(2)已知某考生所选答案是正确的，则他确实会解这道题的概率.

10. 甲、乙两运动员的投篮命中率分别为 0.7 和 0.6，每人各投 3 次，求两人进球数相等的概率.

11. 设 $0<P(B)<1$，证明 A,B 相互独立的充分必要条件是 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$.

二、自测题解答

1. 填空题

(1) **解**　$\Omega=\{(i,j)\,|\,i,j=1,2,3,4,5,6\}$.

(2) **解**　$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

(3) **解**　因为 A,B 互不相容，所以 $AB=\varnothing$，$\overline{A}B=B-AB=B$，则

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B))=0.3;$$

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1;$$

$$P(\overline{A}B)=P(B)=0.4;$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0;\quad P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{0.4}{0.7}=\frac{4}{7}.$$

(4) **解** 因为 A,B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$，又 A,B 互不相容，所以 $P(AB)=P(\varnothing)=0$，$P(A)P(B)=0$，而 $0\leqslant P(A)$，$P(B)\leqslant 1$，故 $\min\{P(A),P(B)\}=0$.

(5) **解** 因为每人都有 12 种可能性，所以基本事件总数为 $n=12^{12}$，而所求的是 12 个人的生日在不同月份，所以所涉事件总数为 $m=12!$，从而所求概率为 $p=\frac{m}{n}=\frac{12!}{12^{12}}$.

2. 单项选择题

(1) **解** 因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=a+b-P(AB)=c$，所以 $P(AB)=a+b-c$，故 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=a-(a+b-c)=c-b$，故选 B.

(2) **解** 因为 A,B,C 是三个两两不相容的事件，且要求 a 达到最大，则 $A\cup B\cup C=\Omega$，又 $P(A)=P(B)=P(C)=a$，所以 $a=\frac{1}{3}$，故选 C.

(3) **解** $P(\overline{B}\cup\overline{C})=P(\overline{BC})=1-P(BC)=0.8$，$P(BC)=0.2$，又 $A\supset B$，$A\supset C$，所以 $A\supset BC$，故 $P(A-BC)=P(A)-P(BC)=0.9-0.2=0.7$，选 C.

(4) **解** $A_i=$“第 i 道工序为废品”$(i=1,2)$，$P(A_i)=p_i$，$\overline{A_1}\,\overline{A_2}=$“零件加工为成品”，$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(A_1\cup A_2)$，故选 C.

(5) **解** $\max\{T_1,T_2\}$表示并联系统中，系统能正常工作的时间，故选 D.

3. **解** 本题是放回抽样，基本事件总数为 $n=(C_{13}^1)^3$.

(1)“没有同号”，$m=C_{13}^1\cdot C_{12}^1\cdot C_{11}^1$，所以 $p_1=\frac{C_{13}^1C_{12}^1C_{11}^1}{(C_{13}^1)^3}=\frac{12\times 11}{13\times 13}=\frac{132}{169}$；

(2) 事件“有同号”与事件“没有同号”是对立事件，所以 $p_2=1-p_1=1-\frac{132}{169}=\frac{37}{169}$；

(3) 事件“最多有两张同号”与事件“三张同号”是对立事件，而 $P(\text{“三张同号”})=\frac{1}{169}$，所以 $p_3=1-\frac{1}{169}=\frac{168}{169}$.

4. **解**

(1) 设 $A=\{$取到的都是白子$\}$，则 $P(A)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{14}{55}\approx 0.255$；

(2) 设 $B=\{$取到两颗白子、一颗黑子$\}$，则 $P(B)=\frac{C_8^2C_4^1}{C_{12}^3}\approx 0.509$；

(3) 设 $C=\{$取三颗子中至少的一颗黑子$\}$，则 $P(C)=1-P(A)\approx 0.745$；

(4) 设 $D=\{$取到三颗子颜色相同$\}$，则 $P(D)=\frac{C_8^3+C_4^3}{C_{12}^3}\approx 0.273$.

5. **解** 设事件 A 表示“2—2”分配，B 表示“1—3”或“3—1”分配，C 表示“4—0”或“0—4”