第3章 均匀各向同性湍流

从本章开始，将由浅入深、由简单到复杂研究各种类型的湍流运动，研究它们的运动学、动力学性质和湍流统计方程的封闭方法。

首先研究均匀各向同性湍流，它是一种最简单的湍流。简单地说，各阶湍流统计特性在空间处处是相同的属于均匀湍流；各阶湍流统计不随坐标系的刚体转动而改变的属于各向同性湍流。由于湍流统计特性是张量，它的均匀性和各向同性的概念需要有精确的定义，才能对它们进行分析和运算。下面我们用几何图像阐明湍流的均匀性和各向同性的概念。设有 n 点脉动速度的相关函数 $R_{ij\cdots pq}=\langle u_i(\boldsymbol{x}_1)u_j(\boldsymbol{x}_2)\cdots u_p(\boldsymbol{x}_{n-1})u_q(\boldsymbol{x}_n)\rangle$，一般情况下，它和空间 n 点的位置有关，即 $R_{ij\cdots pq}=R_{ij\cdots pq}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1},\boldsymbol{x}_n)$。空间 n 个点 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-1},\boldsymbol{x}_n$ 构成 n 边空间多边形，称为**几何构形**，如图 3-1 所示（本章中 u_i 均表示脉动速度）。为简明起见，以空间四边形为几何构形。

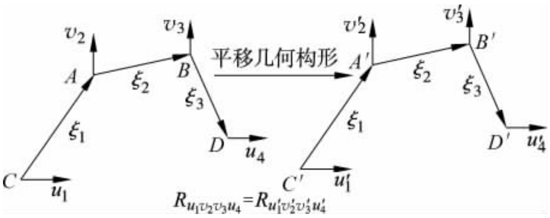

图 3-1 均匀湍流场中统计相关的平移不变性

在几何构形的节点上（图 3-1 中 A,B,C,D）的脉动速度可以构成 4 阶相关函数，现在将（A,B,C,D）构形平移到空间任意位置（A',B',C',D'），如果在（A',B',C',D'）构形上的 4 阶相关函数和（A,B,C,D）构形上的 4 阶相关函数完全相等，则该湍流场是均匀的。一般来说，空间四边形构形上的 4 阶相关应既是 4 个坐标点 $\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_C,\boldsymbol{x}_D$ 的函数，又是几何构形相对位移（图 3-1 中 ξ_1,ξ_2,ξ_3）的函数。几何构形平移时相对位移（ξ_1,ξ_2,ξ_3）是不变的。于是，有以下的严格定义。

定义：如果任意 n 点空间几何构形在空间中平移时，脉动速度任意 n 阶统计相关函数的值不变（或任意 n 点联合概率密度不变），则称该湍流场是均匀的，即有

$$R_{ij\cdots pq}=R_{ij\cdots pq}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}) \tag{3.1}$$

如果任意 n 点统计相关函数不仅和几何构形的平移无关，而且和几何构形的

刚体转动或对任意坐标面反演无关，则称该湍流场是均匀各向同性的。假如图 3-1 中的几何构形(包括速度向量)既作平移又作刚体转动，则在各向同性湍流场中任意阶脉动速度的统计相关函数值不变，图 3-2 示意均匀各向同性湍流(表示 4 点间的 4 阶相关)。于是，有下述定义。

定义：如果任意 n 点空间几何构形在空间中平移，或绕原点转动或对任意坐标平面反演时，脉动速度的任意 n 阶统计相关函数的值不变(或任意 n 点联合概率密度不变)，则称该湍流场是均匀各向同性的。

由于几何构形在固定坐标系中平移加转动等同于几何构形固定而坐标系平移加转动，或坐标反演，因此，均匀湍流又可表述为**脉动速度的任意阶统计相关(或任意阶联合概率密度)和坐标系的平移无关**；均匀各向同性湍流可表述为**脉动速度的任意阶统计相关(或任意阶联合概率密度)和坐标系的平移、刚体转动和反演无关**。

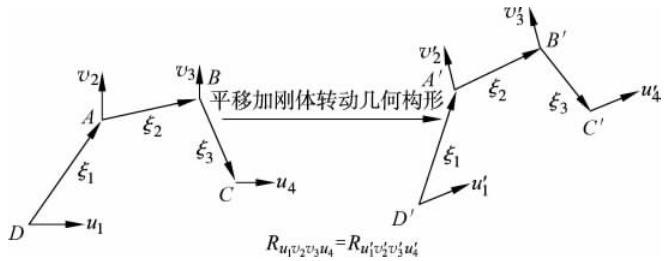

图 3-2　均匀各向同性湍流场中统计相关量的平移和刚体转动不变性

从物理直观上来看，所谓均匀湍流场，就是不论在流场中哪一个区域来观察，它们的随机特性都是相同的。理论上来说，这种湍流只有在无界的流场中才有可能存在。因为在固壁处，流体速度必须满足无滑移条件，湍流脉动受到固壁约束，它和远离固壁处的脉动具有不同的随机特性，因此固壁附近湍流场不可能是均匀的。各向同性湍流，首先应是均匀的，因此也只能在无界的流场中才能存在。

严格意义上的各向同性湍流几乎不存在，但是研究各向同性湍流有两个方面的意义。第一，各向同性湍流具有湍流场质量、能量输运的基本属性，这些性质对于研究一般湍流也是有用的；第二，一般复杂湍流的局部子区域中的湍流可能存在各向同性的特性。例如，远离地面的大气以及远离海面、海岸和海底的浩瀚海洋中的湍流可以近似为各向同性的，大气和海洋科学家常常应用各向同性湍流的研究结果。最早在实验室中模拟各向同性湍流的是英国科学家 G. I. Taylor (1935)，在风洞试验段的均匀气流中设置一排或几排规则的格栅，均匀气流垂直流过格栅时产生不规则扰动。这种不规则扰动向下游运动过程中，由于没有外界干扰，逐渐演化为各向同性湍流。在流向距离大于格栅尺度的 30～40 倍以后，风洞试验段中心区的均匀气流中湍流接近各向同性。由于各向同性湍流既简单又有实验验证的手段，自 20 世纪 30 年代起，它一直是研究湍流理论的重要对象。20 世纪 40 年代苏联科学家 Kolmogorov (1941)提出**局部各向同性湍流**概念和局部各向同性湍流的普适湍动能谱，开创了小尺度湍流脉动一般性质的研究。他的基本思想和近代非线性动力系统理论相结合，构成了近代各向同性湍流理论的基础(Frisch，1995)。本章将介绍各向同性湍流的研究方法、各向同性湍流中湍流输运过程和一些重要的理论。

3.1 均匀湍流场的相关函数和谱张量

第1章已定义了一般的湍流相关张量和谱张量,下面进一步研究均匀湍流场中相关张量和谱张量的性质。主要讨论2阶相关函数,至于高阶相关张量的性质,可以用同样的方法导出。

(1) 均匀湍流场中2阶两点速度互相关张量下标交换时有以下的反对称性:

$$R_{i,j}(\boldsymbol{\xi}) = \langle u_i(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle = \langle u_i(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{\xi})u_j(\boldsymbol{x}')\rangle = R_{j,i}(-\boldsymbol{\xi}) \tag{3.2}$$

(2) 均匀湍流场中一点2阶自相关总是大于两点2阶自相关函数,即有

$$R_{ii}(\boldsymbol{\xi}) \leqslant R_{ii}(0) \tag{3.3}$$

对于一般2阶相关 $R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})=\langle u_i(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle$ 应用 Schwartz 不等式,应有

$$R_{i,j}(\boldsymbol{\xi}) = \langle u_i(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle \leqslant \langle u_i^2(\boldsymbol{x})\rangle^{1/2}\langle u_j^2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle^{1/2} = [R_{ii}(0)R_{jj}(0)]^{1/2}$$

(重复下标不求和)

令 $i=j$ 就得式(3.3)。式(3.3)表明,均匀湍流场中自相关函数的最大值一定在 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$ 处。

(3) 不可压缩均匀湍流场中,2阶两点速度相关满足以下等式:

$$\frac{\partial R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} = \frac{\partial\langle u_i(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle}{\partial \xi_j} = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} = \frac{\partial\langle u_i(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle}{\partial \xi_i} = 0 \tag{3.5}$$

导出以上公式和后面一些均匀湍流特性时,常常用到以下导数公式:

$$\frac{\partial f(x+y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+y)}{\partial y} = \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} = -\frac{\partial f(x-y)}{\partial y} = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}$$

式中 $\xi=x+y$,$\eta=x-y$。2阶两点速度相关的导数公式中,位置向量 $\boldsymbol{x}$ 和相关距离向量 $\boldsymbol{\xi}$ 是两个独立的自变量,并定义新的变量 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}$:

$$\frac{\partial R_{i,j}}{\partial \xi_p} = \frac{\partial\langle u_i(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle}{\partial \xi_p} = \left\langle u_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_p}\right\rangle = \left\langle u_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}')}{\partial x'_p}\right\rangle$$

和

$$\frac{\partial R_{i,j}}{\partial \xi_p} = \langle u_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})u_j(\boldsymbol{x})\rangle = \left\langle u_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_p}\right\rangle = -\left\langle u_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x}')}{\partial x'_p}\right\rangle$$

在上面第一式中令 $p=j$,因有不可压缩流体的连续性方程:$\partial u_j(\boldsymbol{x})/\partial x_j=0$,于是式(3.4)得证。同理,在上面第二式中,令 $p=i$,可以证明式(3.5)成立。

(4) 不可压缩均匀湍流场中2阶速度谱张量有以下等式:

$$k_i S_{ij}(\boldsymbol{k}) = 0 \quad 和 \quad k_j S_{ij}(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{3.6}$$

2阶谱张量的定义(式(1.31))是

$$S_{ij}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

对式(3.4) $\partial R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})/\partial \xi_j=0$ 做 Fourier 积分变换,应有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=0$$

而等式左边等于：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial \xi_j}[R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})\exp p(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})]\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial \xi_j}[\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})]\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

第一项积分结果中有 $R_{i,j}(\pm\infty,\xi_2,\xi_3)\exp(\pm\mathrm{i}\infty,\mathrm{i}k_2\xi_2,\mathrm{i}k_3\xi_3)$等各项，由于$|\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})|\leqslant 1$，以及 $R_{i,j}(\pm\infty,\xi_2,\xi_3)=R_{i,j}(\xi_1,\pm\infty,\xi_3)=R_{i,j}(\xi_1,\xi_3,\pm\infty)=0$（参见第 1 章），于是有

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial \xi_j}[\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})]\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\mathrm{i}k_j\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$
$$=\mathrm{i}k_jS_{ij}(\boldsymbol{k})=0$$

同理可证明式(3.6)的第二式。以上推导过程，应用了在 Fourier 积分变换中的常用公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}[\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})]\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\mathrm{i}k_j\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

利用上式还可以证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j\partial \xi_j}[\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})]\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=-k^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

请读者自己推导该式。

（5）均匀湍流场中 2 阶速度谱张量是 Hermit 张量。

2 阶速度谱张量是复函数，它有以下性质：

$$S_{ij}(\boldsymbol{k})=S_{ji}^{*}(\boldsymbol{k})\tag{3.7}$$

式中上标 * 号表示复共轭，即 2 阶速度谱张量等于它的转置张量的复共轭。对式(3.2)做 Fourier 变换计算 $S_{ij}(\boldsymbol{k})$，因 $R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})=R_{j,i}(-\boldsymbol{\xi})$，有

$$S_{ij}(\boldsymbol{k})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{i,j}(\boldsymbol{\xi})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{j,i}(-\boldsymbol{\xi})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

等式右边做变量替换，$\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{\eta}$，得

$$S_{ij}(\boldsymbol{k})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{j,i}(-\boldsymbol{\xi})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=-\int_{+\infty}^{-\infty}\int_{+\infty}^{-\infty}\int_{+\infty}^{-\infty}R_{j,i}(\boldsymbol{\eta})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\eta})\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{j,i}(\boldsymbol{\eta})\exp(\mathrm{i}(\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{\eta}))\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$$

另一方面：

$$S_{ji}(\boldsymbol{k})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{j,i}(\boldsymbol{\eta})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\eta})\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$$

由于相关函数 $R_{j,i}(\eta)$和变量 η 是实数，上式的共轭等于：

$$S_{ji}^{*}(\boldsymbol{k})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{j,i}(\boldsymbol{\eta})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\eta})\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$$

于是式(3.7)得证。进一步可以证明：对于任意复值向量 X，$\Phi=X_iX_j^{*}S_{ij}(\boldsymbol{k})$必是实数。设 $S_{11}(\boldsymbol{k})$，$S_{22}(\boldsymbol{k})$，$S_{33}(\boldsymbol{k})$是谱张量 $S_{ij}(\boldsymbol{k})$三个主轴方向的谱，它们分别是主轴方向速度分量的动能谱，都是恒大于零的实数，因此

$$\Phi=X_iX_j^{*}S_{ij}(\boldsymbol{k})=X_1X_1^{*}S_{11}(\boldsymbol{k})+X_2X_2^{*}S_{22}(\boldsymbol{k})+X_3X_3^{*}S_{33}(\boldsymbol{k})\geqslant 0\tag{3.8}$$

式(3.7)和式(3.8)一起，说明 2 阶速度谱张量是 Hermit 张量，即 $S_{ij}(\boldsymbol{k})$是正定的 2 阶复共

轭对称张量。

(6) 均匀湍流场中脉动涡量的 2 阶相关函数和谱张量

脉动涡量是脉动速度的旋度,即

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{u} \quad 或 \quad \omega_i(\boldsymbol{x})=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

因此 2 阶涡量相关等于:

$$R_{\omega_i\omega_j}=\langle\omega_i(\boldsymbol{x})\omega_j(\boldsymbol{x}')\rangle=\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}\left\langle\frac{\partial u_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_m}\frac{\partial u_q(\boldsymbol{x}')}{\partial x'_p}\right\rangle$$

在张量代数运算中有以下等式:

$$\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}=(\delta_{ij}\delta_{mp}\delta_{nq}+\delta_{ip}\delta_{mq}\delta_{nj}+\delta_{iq}\delta_{mj}\delta_{np}-\delta_{ij}\delta_{mq}\delta_{np}-\delta_{ip}\delta_{mj}\delta_{nq}-\delta_{iq}\delta_{mp}\delta_{nj})$$

此外,

$$\left\langle\frac{\partial u_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_m}\frac{\partial u_q(\boldsymbol{x}')}{\partial x'_p}\right\rangle=\frac{\partial^2\langle u_n(\boldsymbol{x})u_q(\boldsymbol{x}')\rangle}{\partial x_m\partial x'_p}=\frac{\partial^2 R_{nq}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})}{\partial x_m\partial x'_p}=-\frac{\partial^2 R_{nq}(\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_m\partial\xi_p}$$

式中$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}$,于是均匀湍流场中涡量的 2 阶相关函数为

$$R_{\omega_i\omega_j}=-(\delta_{ij}\delta_{mp}\delta_{nq}+\delta_{ip}\delta_{mq}\delta_{nj}+\delta_{iq}\delta_{mj}\delta_{np}-\delta_{ij}\delta_{mq}\delta_{np}-\delta_{ip}\delta_{mj}\delta_{nq}-\delta_{iq}\delta_{mp}\delta_{nj})\frac{\partial^2 R_{nq}(\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_m\partial\xi_p} \tag{3.9}$$

不可压缩均匀湍流场中有$\partial R_{ij}/\partial\xi_j=\partial R_{ij}/\partial\xi_i=0$,因此,式(3.9)可以进一步简化为

$$R_{\omega_i\omega_j}(\boldsymbol{\xi})=-\delta_{ij}\nabla^2 R_{mm}(\boldsymbol{\xi})+\frac{\partial^2 R_{mm}(\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_i\partial\xi_j}+\nabla^2 R_{ji}(\boldsymbol{\xi}) \tag{3.10}$$

式(3.9)和式(3.10)表明均匀湍流场中脉动涡量的相关函数可以由脉动速度的相关函数求得。

(7) 不可压缩均匀湍流场中脉动涡量的 2 阶谱张量

对式(3.10)做 Fourier 变换,很容易导出脉动涡量场的 2 阶谱张量如下:

$$S_{\omega_i\omega_j}(\boldsymbol{k})=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\omega_i\omega_j}(\boldsymbol{\xi})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=(\delta_{ij}k^2-k_ik_j)S_{mm}(\boldsymbol{k})-k^2S_{ji}(\boldsymbol{k}) \tag{3.11}$$

式中 $S_{ji}(\boldsymbol{k})$是脉动速度的 2 阶相关谱张量。对张量进行收缩,可得拟涡能谱和动能谱间的关系式:

$$S_{\omega_i\omega_i}(\boldsymbol{k})=k^2S_{ii}(\boldsymbol{k}) \tag{3.12}$$

式(3.12)中的乘子 k^2 表明高波数的拟涡能谱远远大于相同波数的湍动能谱。或者说,对比湍动能谱的峰值,拟涡能谱的峰值向高波数方向移动。一般来说,不规则函数的导数运算相当于高通滤波,因此脉动量导数的能谱中,高波数成分增大。拟涡能谱的式(3.12)反映了这一规律。

(8) 均匀不可压缩湍流场中的湍动能耗散谱

第 2 章已导出雷诺应力耗散张量 $E_{ij}=2\nu\langle\partial u_i/\partial x_k\partial u_j/\partial x_k\rangle$,我们也可将耗散张量用波谱展开,以考察湍流耗散在各个尺度间的分布。首先构造速度梯度的 2 阶相关函数 $\langle\partial u_i(\boldsymbol{x})/\partial x_k\partial u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})/\partial x'_k\rangle$,注意到:$x'_k=x_k+\xi_k$ 和 x_k 是相互独立的变量,因此,在均匀

湍流场中速度梯度的 2 阶相关可以简化为

$$\left\langle \frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_k} \frac{\partial u_j(\boldsymbol{x}')}{\partial x'_k} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x'_k}\left(u_j(\boldsymbol{x}') \frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_k} \right) \right\rangle = \frac{\partial^2 \langle u_j(\boldsymbol{x}') u_i(\boldsymbol{x}) \rangle}{\partial x'_k \partial x_k}$$

$$= \frac{\partial^2 R_{ij}(\boldsymbol{\xi})}{\partial x'_k \partial x_k} = -\frac{\partial^2 R_{ij}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \tag{3.13}$$

推导上面最后一个等式时，用到$\partial/\partial x_k = -\partial/\partial \xi_k$，$\partial/\partial x'_k = +\partial/\partial \xi_k$。式(3.13)中令$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$得均匀湍流中雷诺应力耗散张量：

$$E_{ij} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_k} \frac{\partial u_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_k} \right\rangle = -2\nu \left[\frac{\partial^2 R_{ij}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \right]_{\boldsymbol{\xi}=0} \tag{3.14a}$$

同理，湍动能耗散率的表达式为

$$\varepsilon_{ii} = \nu \left\langle \frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_k} \frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_k} \right\rangle = -\nu \left[\frac{\partial^2 R_{ii}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \right]_{\boldsymbol{\xi}=0} \tag{3.14b}$$

进一步考察雷诺应力耗散和湍动能耗散在谱空间中的分布。相关函数和谱张量间的关系式如下：

$$R_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{ij}(\boldsymbol{k}) \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}\boldsymbol{k}$$

因此有

$$\left[\frac{\partial^2 R_{ij}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k \partial \xi_k} \right]_{\boldsymbol{\xi}=0} = -\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 S_{ij}(\boldsymbol{k}) \mathrm{d}\boldsymbol{k}$$

将上式代入式(3.14a)和式(3.14b)，就有湍流耗散张量和湍动能耗散的积分表达式：

$$E_{ij} = 2\nu \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 S_{ij}(\boldsymbol{k}) \mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{3.15a}$$

$$\varepsilon = \nu \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 S_{ii}(\boldsymbol{k}) \mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{3.15b}$$

利用拟涡能表达式(3.12)，还可以将式(3.15b)写成：

$$\varepsilon = \nu \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\omega_i \omega_i}(\boldsymbol{k}) \mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{3.15c}$$

式(3.15a)、(3.15b)表明：无论是雷诺应力耗散张量还是湍动能耗散率，它们在谱空间的分布都正比于波数的平方，就是说，在耗散率的谱分布中，高波数成分的脉动有较大贡献。式(3.15c)则表示，在均匀湍流场中湍动能耗散在波数空间中的分布正比于拟涡能的谱。

3.2　均匀各向同性湍流场的相关函数和谱张量

3.2.1　张量的不变量和张量函数

1. 张量不变量的概念

3.1 节讨论了均匀湍流场的相关函数和谱的性质，下面讨论均匀各向同性湍流场的相关函数和谱的性质。前面已经定义：各向同性湍流场中各阶统计相关与坐标系的平移和刚体转动无关。下面应用张量性质来导出在坐标系刚体转动时张量函数不变性的表示方法，

然后导出各向同性湍流的相关函数表达式。本书所有张量都用直角坐标系中表达式。

首先考察在坐标系变换时张量分量的变换式。假设张量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标基($\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$)中的分量为 $A_{ij\cdots pq}$,它在坐标基($\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$)中的分量 $A_{i'j'\cdots p'q'}$ 应等于:

$$A_{i'j'\cdots p'q'} = A_{ij\cdots pq}\alpha_{ii'}\alpha_{jj'}\cdots\alpha_{pp'}\alpha_{qq'} \tag{3.16}$$

式中 $\alpha_{ii'}$ 是坐标基$\{\boldsymbol{e}_i\}$和$\{\boldsymbol{e}_i'\}$间的方向余弦,在直角坐标基中有以下关系式:

$$\alpha_{ii'}\alpha_{ji'} = \delta_{ij} \quad \text{和} \quad \alpha_{i'i}\alpha_{i'j} = \delta_{ij} \tag{3.17}$$

δ_{ij} 是 Kronecker delta,当 $i=j$ 时,$\delta_{ij}=1$;当 $i\neq j$ 时,$\delta_{ij}=0$。很容易证明在任意直角坐标系中 $\delta_{i'j'}$ 满足式(3.16),因此它是张量,称它为单位张量或各向同性张量。坐标基之间方向余弦 $\alpha_{ij'}$ 由表 3.1 定义。

表 3.1 坐标基之间的方向余弦

	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1'$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\boldsymbol{e}_2'$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\boldsymbol{e}_3'$	α_{31}	α_{32}	α_{33}

在直角坐标系中张量可以用并矢表示,$\boldsymbol{ab}=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$,$a_ib_j$ 是张量。和坐标系变换无关的量称为标量,也称零阶张量,向量可表示为 $\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$,称为一阶张量,可以用 n 个并矢表示的张量,称 n 阶张量。在直角坐标系中张量的分量按式(3.16)的规则变换,或者说,张量的分量值随坐标系变化,它们不具有坐标变换的不变性,但是,张量具有一组和坐标系无关的标量不变量。举例来说,向量 $\boldsymbol{X}$ 的三个分量$\{X_i\}$的数值和坐标系的转动有关,但是它的长度 $|\boldsymbol{X}|=X_iX_i$ 和坐标系转动无关,是不变量;它和任意向量$\boldsymbol{Y}=\{Y_i\}$的点积 $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}=X_iY_i$ 也是不变量。对于 2 阶张量 A_{ij},容易证明它的主对角线和(又称张量的迹)是不变量,因为 $A_{ii}=A_{i'j'}\alpha_{ii'}\alpha_{ij'}=A_{i'j'}\delta_{i'j'}=A_{i'i'}$。一般来说,张量 $A_{ij\cdots pq}$ 的收缩是不变量,例如 $A_{ii\cdots ii}$ 或 $A_{ij\cdots pq}B_iC_j\cdots F_pG_q$($B_i,C_j,\cdots,F_p,G_q$ 等是向量)等都是与坐标系的转动无关的标量不变量。任意一个张量,可以通过张量的代数运算,如乘方、收缩等构成无数个不变量,例如张量 A_{ij} 有不变量 A_{ii};张量 A_{ij} 平方的迹 $A_{ij}A_{ji}$ 以及它的立方迹 $A_{ip}A_{pq}A_{qi}$ 等也是不变量。可以证明有限阶张量只有有限个独立不变量,例如,应用 **Cayley-Hamilton 定理**可证明:2 阶张量只有三个独立不变量,即 2 阶张量的迹以及它的平方和立方的迹是三个独立不变量,2 阶张量的高阶幂函数的迹可以由以上三个独立不变量算出。有关张量的代数运算和它们的性质,可参见《张量分析》(第 2 版)(黄克智,2003)。

2. 张量函数的坐标不变性

上面讨论了张量,进一步研究张量函数。

任何物理定律或定理,不论它是用标量表示还是用张量表示,都应当和坐标系的平移、刚体转动无关。设在坐标基$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$中有张量函数的表达式 $A_{ij\cdots pq}=f_{ij\cdots pq}(a,x_i,b_{ij},\cdots)$,自变量中既有标量(如 a)又有张量(如 x_i,b_{ij} 等),则在任意坐标基$\{\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\}$中,仍然应有 $A_{i'j'\cdots p'q'}=f_{i'j'\cdots p'q'}(a,x_{i'},b_{i'j'},\cdots)$。$A_{i'j'\cdots p'q'}$,$x_{i'}$,$b_{i'j'}$ 等是 $A_{ij\cdots pq}$,x_i,b_{ij} 在坐标基$\{\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\}$中的值;而且,用式(3.16)计算的变换结果代入 $A_{i'j'\cdots p'q'}=f_{i'j'\cdots p'q'}(a,x_{i'},b_{i'j'},\cdots)$后,应当回复到 $A_{ij\cdots pq}=f_{ij\cdots pq}(a,x_i,b_{ij},\cdots)$,这是物理规律的坐标不变性。就是说,为了符合物理规律,

函数 $f_{i'j'\cdots p'q'}(a, x_{i'}, b_{i'j'}, \cdots)$必须满足一定条件。

利用张量不变量原理可以导出满足坐标不变性的张量函数表达式。基本思想如下：**张量函数不变量必须是它的自变量不变量的函数**。具体做法是，用代数运算将张量方程左边构造一个张量不变量，则方程右边必须是不变量的标量函数，否则，张量等式就不成立。

下面通过具体运算来导出满足坐标不变性的张量函数形式(Lumley，1976)。首先，用 n 个任意向量 $B_i, C_j, \cdots$ 和 n 阶张量函数 $A_{ij\cdots pq}$ 点乘构成不变量，函数式左边是 $B_iC_j\cdots E_pF_qA_{ij\cdots pq}$，这时函数式右边的不变量应当由原来的自变量和 $B_i, C_j, \cdots, b_{ij}, x_i$ 等构成，即自变量应是以下形式：

$$B_iB_i, B_iC_i, C_iC_i, x_iB_i, x_iC_i, x_ix_i, b_{ij}B_iC_j, I, II, III, \cdots$$

其中 I, II, III 是张量 b_{ij} 的三个不变量。张量不变量函数是向量 $B_i, C_j, \cdots$ 的线性乘积，因此在不变量的函数式中不能有 B_i, C_i 等的高次幂函数。简言之，用 n 个向量的线性乘积构造张量函数不变量时，函数式中只能有 n 个向量的线性积。有了这一具体运算规则就可以导出张量函数具体表达式。下面以具体例子来说明。

例 3.1　自变量是标量的张量函数

设张量函数为 $A_{ij\cdots pq} = f_{ij\cdots pq}(a)$，自变量 a 是标量。用 n 个向量 $B_i, C_j, \cdots$ 点乘张量函数表达式，方程左边构成不变量 $A_{ij\cdots pq}B_iC_j\cdots E_pF_q$，右边应是不变量 $a, B_iC_i, B_iC_iD_jE_j$ 等的标量函数。由向量构成标量不变量必须是一对向量的点乘，因此只有偶数个任意向量才可以构成不变量，奇数个任意向量不可能构成不变量。于是有**结论：只有偶数阶的张量才能是标量的函数；奇数阶张量不可能是标量的函数，除非等于零**。

对于偶数阶张量，用偶数个任意向量构成张量不变量函数的唯一可能是：

$$A_{ij\cdots pq}B_iC_j\cdots E_pF_q = f(a)B_iC_i\cdots E_pF_p + g(a)B_iE_i\cdots C_pF_p + \cdots$$

$B_i, C_i, \cdots, E_i, F_i$ 等是偶数个向量。以 2 阶张量为例，应有

$$A_{ij}B_iC_j = f(a)B_iC_i = f(a)B_iC_j\delta_{ij}$$

向量 B_i, C_i 是任意的，于是必有

$$A_{ij} = f(a)\delta_{ij} \tag{3.18}$$

就是说，2 阶张量的标量函数必是 2 阶各向同性张量。对于 4 阶张量的标量函数，用上面的方法，可导出如下的不变量函数式：

$$\begin{aligned} A_{ijpq}B_iC_jE_pF_q &= f(a)B_iC_iE_pF_p + g(a)B_iE_iC_pF_p + h(a)B_iF_iC_pE_p \\ &= [f(a)\delta_{ij}\delta_{pq} + g(a)\delta_{ip}\delta_{jq} + h(a)\delta_{iq}\delta_{jp}]B_iC_jE_pF_q \end{aligned}$$

由于构成不变量的向量是任意的，故 4 阶张量的标量函数必有如下形式：

$$A_{ijpq} = f(a)\delta_{ij}\delta_{pq} + g(a)\delta_{ip}\delta_{jq} + h(a)\delta_{iq}\delta_{jp} \tag{3.19}$$

例 3.2　自变量是向量的张量函数

设张量函数为 $A_{ij\cdots pq} = f_{ij\cdots pq}(x_i)$，自变量 x_i 是向量。用 n 个向量 $B_i, C_j, \cdots$ 点乘张量函数构成不变量函数，应有

$$A_{ij\cdots pq}B_iC_j\cdots E_pF_q = f(x_ix_i, x_iB_i, \cdots)$$

首先，讨论向量函数 $A_i(x_j)$，这时不变量函数式应是

$$A_iB_i = f(x_ix_i, x_iB_i)$$

等式右边必须是任意向量的线性函数，它的唯一形式是

$$A_iB_i = f(x_ix_i)x_iB_i$$

对于任意向量 B_i 都应成立的函数关系式是

$$A_i = f(x_i x_i) x_i \tag{3.20}$$

上式表明,如果一个向量是另一个向量的函数,则两个向量必共线。

现在考察2阶张量函数 $A_{ij}(x_k)$,它的不变量方程的形式为

$$A_{ij} B_i C_j = f(x_i x_i, x_i B_i, x_i C_i, B_i C_i, \cdots)$$

上式右端必须是 $B_i C_i$ 二次式的唯一形式:

$$A_{ij} B_i C_j = f(x_i x_i) x_i x_j B_i C_j + g(x_i x_i) B_i C_j \delta_{ij}$$

对于任意一对向量,上式都应成立的函数关系式为

$$A_{ij}(\boldsymbol{x}) = f(x_i x_i) x_i x_j + g(x_i x_i) \delta_{ij} \tag{3.21}$$

很容易证明,2阶张量的向量函数是对称张量,并且是自变量的偶函数,将 $-\boldsymbol{x}$ 代入式(3.21),即可证明:

$$A_{ij}(\boldsymbol{x}) = A_{ij}(-\boldsymbol{x}) \tag{3.22}$$

同理,如果2阶张量是两个向量自变量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的函数,则可导出其函数关系式应为

$$A_{ij} = f x_i x_j + g y_i y_j + h x_i y_j + j y_i x_j + q \delta_{ij}$$

式中 f,g,h,j,q 等是不变量 $x_i x_i, y_i y_i, x_i y_i$ 的函数。用同样的方法还可导出3阶张量的向量函数的一般表达式是(读者自己证明):

$$A_{ijk}(\boldsymbol{x}) = f(x_i x_i) x_i x_j x_k + g(x_i x_i) x_i \delta_{jk} + h(x_i x_i) x_j \delta_{ik} + p(x_i x_i) x_k \delta_{ij} \tag{3.23}$$

很容易证明:表示3阶张量的向量函数是自变量的奇函数,将 $-\boldsymbol{x}$ 代入式(3.23),即可证明

$$A_{ijk}(\boldsymbol{x}) = -A_{ijk}(-\boldsymbol{x}) \tag{3.24}$$

应用上述方法,可以导出任意张量函数在坐标系刚体转动时具有不变性的函数形式。

3.2.2 各向同性湍流的相关张量函数及其性质

前面已经指出各向同性湍流场中,n 点的相关张量函数只和 n 点的几何构形有关。n 点几何构形由 $n-1$ 个位移向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 完全确定,因此各向同性湍流场中 n 阶相关的表达式必为

$$R_{i_1 i_2 \cdots i_n} = R_{i_1 i_2 \cdots i_n}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1})$$

根据各向同性湍流的定义,我们要求相关张量函数在坐标系转动时具有不变性。应用上节原理,我们可以导出各向同性湍流场中各阶相关函数的表达式。

1. 各向同性湍流场中两点2阶速度相关函数的表达式

均匀湍流场中两点2阶速度相关函数是 $R_{ij} = \langle u_i(\boldsymbol{x}) u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle = R_{ij}(\boldsymbol{\xi})$。对于各向同性湍流,2阶速度相关函数应和坐标系刚体转动无关,应用例3.2函数表达式,各向同性湍流场中2阶速度相关函数必有以下的函数式:

$$R_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = f(\xi_i \xi_i) \xi_i \xi_j + g(\xi_i \xi_i) \delta_{ij} \tag{3.25}$$

式(3.25)表明,各向同性湍流场中2阶速度相关函数只有两个独立函数。通常,选定两个特定几何构形的相关:纵向相关(用 R_{ll} 表示)和横向相关(用 R_{nn} 表示),它们的定义如图3-3所示。

定义:沿相对位移 $\boldsymbol{\xi}$ 方向的脉动速度分量的2阶相关称作两点纵向相关 $\boldsymbol{R_{ll}}(\boldsymbol{\xi})$。

定义:垂直于相对位移方向脉动速度分量的2阶相关称作两点横向相关 $\boldsymbol{R_{nn}}(\boldsymbol{\xi})$。

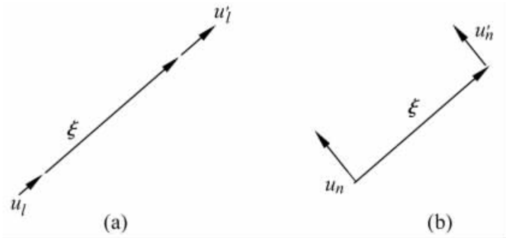

图 3-3　2 阶速度纵向和横向相关示意图
(a) 2 阶纵向相关；(b) 2 阶横向相关

按纵向相关和横向相关的定义代入各向同性湍流 2 阶速度相关的一般表达式(3.25)，就有(在相对位移方向 $\xi_i\xi_i=\xi^2$，在垂直相对位移方向，ξ 的投影等于零，因此 $\xi_i\xi_j=0$)：

$$R_{ll}(\xi)=\xi^2 f(\xi)+g(\xi)$$

$$R_{nn}(\xi)=g(\xi)$$

也就是有：$f(\xi)=(R_{ll}(\xi)-R_{nn}(\xi))/\xi^2$ 和 $g(\xi)=R_{nn}(\xi)$。于是各向同性湍流的 2 阶相关的一般表达式可写作(ξ 是 2 点相关的距离)：

$$R_{ij}(\boldsymbol{\xi})=[R_{ll}(\xi)-R_{nn}(\xi)]\frac{\xi_i\xi_j}{\xi^2}+R_{nn}(\xi)\delta_{ij} \tag{3.26}$$

图 3-4 是典型的各向同性湍流的 2 阶相关函数。

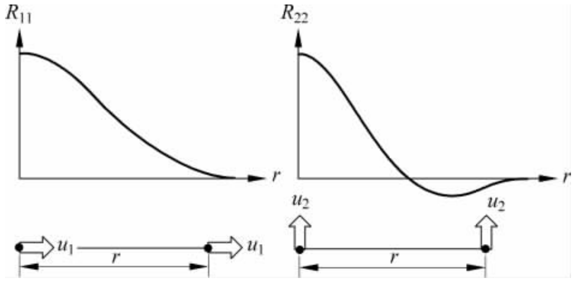

图 3-4　各向同性湍流的脉动速度 2 阶速度相关

2. 各向同性湍流场中速度-压强的两点 2 阶相关函数的表达式

众所周知，速度是向量，而压强是标量，因此两点速度-压强 2 阶相关函数是向量，在均匀湍流中它只是$\boldsymbol{\xi}$的函数，即：$R_{u_ip}=\langle u_i(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle=R_{ip}(\boldsymbol{\xi})$。注意速度压强相关 R_{ip} 是向量 u_i 和标量 p 的乘积，因此是一阶张量，即向量。在例 3.2 中，已经导出，具有坐标不变性的两个向量之间的函数关系必是共线的，即

$$R_{ip}(\boldsymbol{\xi})=f(\xi_i\xi_i)\xi_i \tag{3.27}$$

3. 各向同性湍流场中两点速度 3 阶相关函数表达式

空间两点的速度 3 阶相关函数的一般形式是：$R_{ij,k}=\langle u_i(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x})u_k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle$，它是 3 阶张量，在均匀湍流场中，它只是 ξ 的函数。应用前面例 3.2 的式(3.23)，各向同性湍流的两点速度 3 阶相关函数的表达式应是