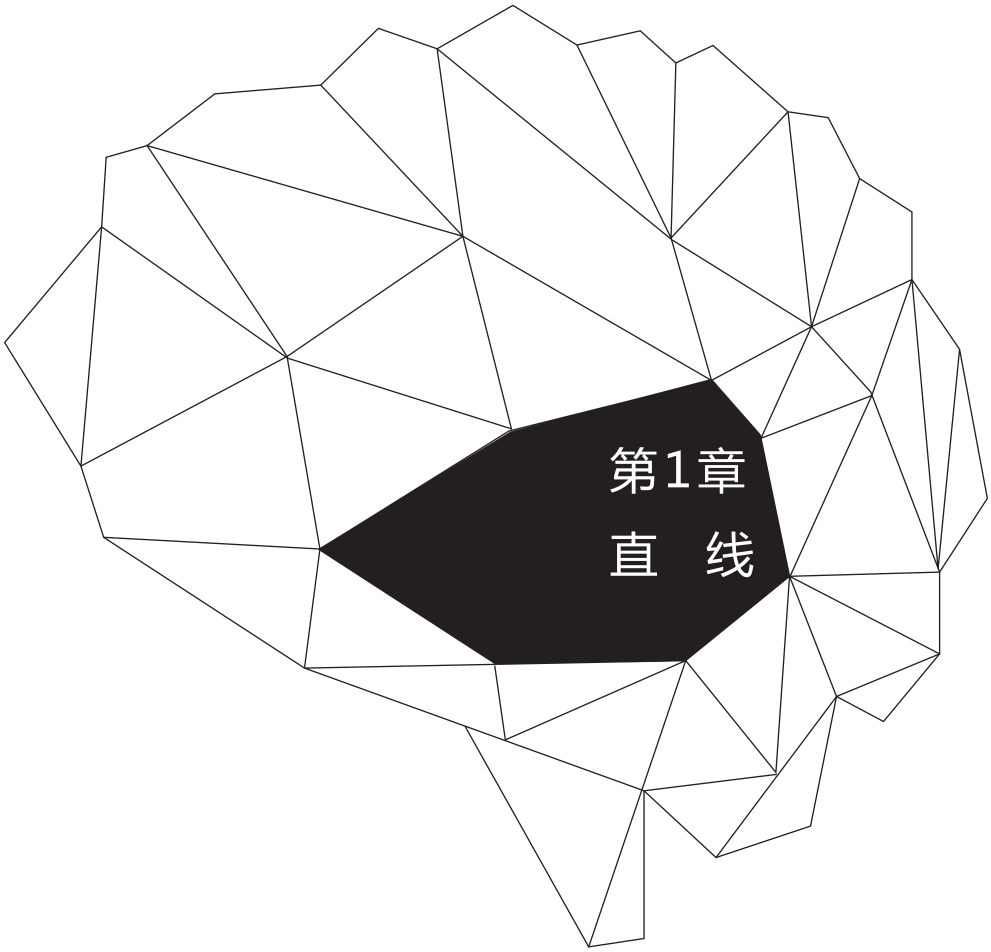


第1章 直线

1. 直线的倾斜角：一条直线向上的方向与x轴的正方向所成的夹角叫做这条直线的倾斜角，其中直线与x轴平行或重合时，其倾斜角$0°$，故直线倾斜角的范围是$[0,\pi)$.

注：当$\alpha=90°$时，直线l垂直于x轴，它的斜率不存在.

2. 直线方程的常用形式：点斜式、截距式、斜截式、一般式.

(1) 点斜式：过点(x_0,y_0)，斜率为k的直线可设为：$y-y_0=k(x-x_0)$.

适用范围：直线斜率存在(倾斜角不为$90°$).

(2) 斜截式：斜率为k，且在y轴截距为b(或过点$(0,b)$)的直线可设为$y=kx+b$.

适用范围：直线斜率存在(倾斜角不为$90°$).

(3) 截距式：在x轴上截距为a，在y轴截距为b(或者过$(a,0)$，$(0,b)$两点)的直线可设为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

适用范围：不过原点，且直线倾斜角不等于$0°$和$90°$.

(4) 一般式：任意直线均可设为$Ax+By+C=0$.

适用范围：所有直线.

3. 直线系：对于直线的斜截式方程$y=kx+b$，当k，b均为确定的数值时，它表示一条确定的直线，如果k，b变化时，对应的直线也会变化.

(1) 当b为定值，k变化时，它们表示过定点$(0,b)$的直线束.

(2) 当k为定值，b变化时，它们表示一组平行线.

(3) 过两直线l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$的交点的直线系方程为$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$($\lambda$为参数，$l_2$不包括在内).

4. 当斜率一定存在时(l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$).

(1) l_1和l_2是平行不重合的直线：$k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$.

(2) l_1和l_2是重合直线：$k_1=k_2$，$b_1=b_2$.

(3) l_1和l_2是垂直的直线：$k_1k_2=-1$.

5. 当斜率不一定存在时(l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$).

(1) l_1和l_2是平行不重合的直线：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

(2) l_1和l_2是重合直线：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

(3) l_1和l_2是垂直的直线：$A_1A_2+B_1B_2=0$.

6. 距离问题.

(1) 点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$的距离为$|PQ|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

(2) 设点$P(x_0,y_0)$，直线l：$Ax+By+C=0$，P到l的距离为$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

(3) 设两条平行直线l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$($C_1\neq C_2$)，它们之间的距离为$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

7. 对称问题.

(1) 点点对称型

$A(x_0,y_0)$关于点$P(a,b)$对称的点为$(2a-x_0,2b-y_0)$.

(2) 点线对称型

点 $A(x_0,y_0)$关于直线 $Ax+By+C=0$ 对称的点为(a,b)，其中：$a=x_0-2A\dfrac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}$，$b=y_0-2B\dfrac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}$.

(3) 线点对称型

直线 $Ax+By+C=0$ 关于点 $P(x_0,y_0)$对称的线为$Ax+By+D=0$，其中：$Ax_0+By_0+C+Ax_0+By_0+D=0$.

(4) 线线对称型

直线 $ax+by+c=0$ 关于直线 $Ax+By+C=0$ 对称的直线为$\dfrac{ax+by+c}{Ax+By+C}=\dfrac{2aA+2bB}{A^2+B^2}$.

8. 线性规划问题.

(1) 可行域的快速判定

二元一次不等式 $ax+by+c>0$，当 b 为正时即为线上侧，当 b 为负时即为线下侧；二元一次不等式 $ax+by+c<0$，当 b 为负时即为线上侧，当 b 为正时即为线下侧.

(2) 目标函数的基本类型

① 截距型：$z=ax+by+c$.

② 斜率型：$z=\dfrac{ax+by+c}{x-d}$.

③ 距离型：$z=ax^2+by^2+cx+dy+f$.

考点1 直线的倾斜角与斜率

例题

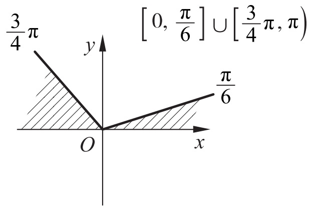
【例1】(2014·武清期中) 已知直线的斜率范围是$\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$,求倾斜角的范围;已知直线的斜率范围是$(-\sqrt{3},+\infty)$,求倾斜角的范围.

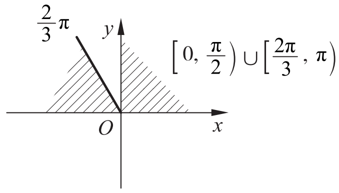
条件 斜率⇒倾斜角.

解析

$$k=-1\Rightarrow\alpha=\frac{3}{4}\pi,\quad k=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}.$$

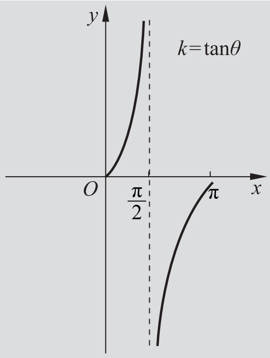
$$k=-\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad k=+\infty\Rightarrow\alpha\to 90^\circ.$$





总结 熟练斜率与倾斜角对应值的相互转化,掌握 $k=\tan\theta$ 函数图像.此题也可利用$k=\tan\theta$ 的图像来求 k 与 θ.

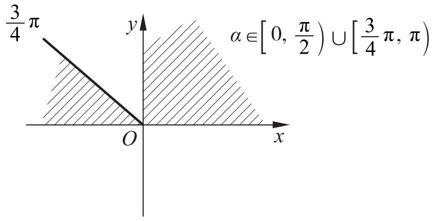
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
k	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$



【例 2】(2011·吉安期末) 已知直线 l 的方程:$y=(m^2-1)x+3(m\in\mathbf{R})$,则 l 的倾斜角的范围是( ).

A. $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ B. $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right]$ C. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ D. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$

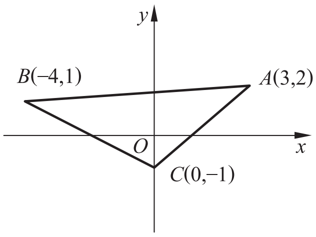
条件 $k=m^2-1\Rightarrow k\geqslant-1$.



解析 $y=(m^2-1)x+3\Rightarrow k=m^2-1$,由于 $m^2\geqslant0$,所以 $m^2-1\geqslant-1$,即 $k\geqslant-1\Leftrightarrow\tan\alpha\geqslant-1$.
故选:C.

总结 熟悉斜率与倾斜角.

【例 3】(2013·贵阳月考) 已知点 $A(3,2)$,$B(-4,1)$,$C(0,-1)$,过点 C 的直线 l 与线段 AB 有公共点,l 的斜率 k 的取值范围是________.



条件 过 C 的直线 l 与线段 AB 相交⇒直线 l 介于 CA 与 CB 之间.

解析 $k_{CA}=\frac{2-(-1)}{3}=1$,$k_{CB}=\frac{1-(-1)}{-4}=-\frac{1}{2}$,斜率由 k_{CA}→直角→k_{CB}.

$$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty).$$

总结 掌握斜率公式 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,并熟悉斜率在倾斜角为$[0,\pi)$间的变化过程.

高考分数段一分 800 人,大学好的专业才录取 300 人,差一分错过好专业,差 5 分错过好学校.

——彭伟明老师

练习

1.（2014·东台期中） 若 $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，则直线 $2x\cos\theta+3y+1=0$ 的倾斜角的取值范围为(　　).

A. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$　　C. $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

2.（2013·广州模考） 设点 $A(2,-3)$，$B(-3,-2)$，直线 l 过点 $P(1,1)$且与线段 AB 相交，则 l 的斜率 k 的取值范围为(　　).

A. $k\geqslant\frac{3}{4}$或$k\leqslant-4$　　B. $\frac{3}{4}\leqslant k\leqslant4$　　C. $-4\leqslant k\leqslant\frac{3}{4}$　　D. $k\geqslant4$ 或 $k\leqslant-\frac{3}{4}$

考点2　直线的五种表达式及位置关系

例题

【例1】(2015·唐山期中)　已知直线$(a-2)y=(3a-1)x-1$.

(1) 求证：无论a为何值,直线总经过第一象限;

(2) 直线l是否有可能不经过第二象限?若有可能,求出a的范围;若不可能,说明理由.

(1) **条件**　过第一象限⇒过第一象限的定点.

解析　$(a-2)y=(3a-1)x-1$,$ay-2y=3ax-x-1\Rightarrow(3x-y)a+2y-x-1=0\Rightarrow$ $\begin{cases}3x-y=0,\\2y-x-1=0\end{cases}\Rightarrow$定点$\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$.

总结　直线过定点问题需将参数进行分离,再通过方程组进行求解.

(2) **条件**　不经过第二象限⇒$y=kx+b$中$\begin{cases}k>0,\\b\leqslant0.\end{cases}$

解析　当$a\neq2$时,$y=\frac{3a-1}{a-2}x-\frac{1}{a-2}$,$\begin{cases}\frac{3a-1}{a-2}>0,\\-\frac{1}{a-2}\leqslant0\end{cases}\Rightarrow a>2$.

当$a=2$时,$x=\frac{1}{5}$,不经过第二象限.综上,$a\geqslant2$.

总结　直线过象限问题一般转化为斜截式考虑.

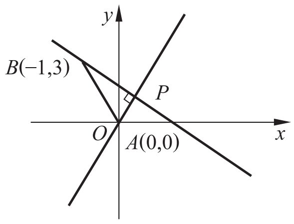
【例 2】(2016 · 上海文理 · 3) 已知平行直线 l_1：$2x+y-1=0$，l_2：$2x+y+1=0$，则 l_1 与 l_2 的距离是__________.

条件 l_1 与 l_2 距离 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

解析 $\begin{cases}2x+y-1=0,\\2x+y+1=0,\end{cases}d=\frac{|1-(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

总结 平行线距离公式使用过程中切记两条直线中$\begin{cases}Ax+By+C_1=0,\\Ax+By+C_2=0\end{cases}$的 A，B 要相同.

【例 3】(2014 · 四川理 · 9) 设 $m\in\mathbf{R}$，过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$，则$|PA|\cdot|PB|$的最大值是__________.



条件 $(|PA|\cdot|PB|)_{\max}\leqslant\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}$

$\Rightarrow(|PA|\cdot|PB|)_{\max}=\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}$.

解析 $A(0,0)$，$B(-1,3)$，又因为 $x+my=0$ 与 $mx-y-m+3=0$ 垂直，可得$|PA|\cdot|PB|_{\max}=\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}=\frac{|AB|^2}{2}=\frac{10}{2}=5$.

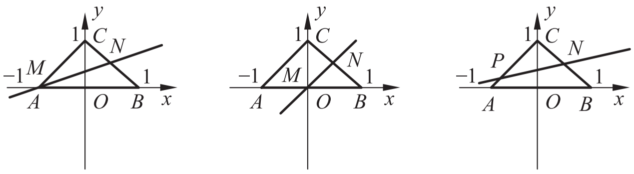
总结 l_1 与 l_2 垂直(一般式)$\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.

【例 4】(2013·新课标 2 理·12)　已知 $A(-1,0)$,$B(1,0)$,$C(0,1)$,直线 $y=ax+b$ $(a>0)$将$\triangle ABC$分割为面积相等的两部分,则 b 的取值范围是(　　).

A. $(0,1)$　　B. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

条件　$y=ax+b$ 分$\triangle ABC$为面积相等两部分⇒三角形面积公式与点到直线距离公式.

解析　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot OC=1$,直线 $y=ax+b(a>0)$与 x 轴的交点为 $m\left(-\frac{b}{a},0\right)$. 由 $-\frac{b}{a}\leqslant 0$,可知点 M 在射线 OA 上,设直线和 BC 交点为 N,$\begin{cases}y=ax+b,\\x+y=1\end{cases}\Rightarrow N\left(\frac{1-b}{a+1},\frac{a+b}{a+1}\right)$.



①　　②　　③

① 点 M 与 A 重合,则 N 为 BC 中点,则$-\frac{b}{a}=-1$,$\frac{a+b}{a+1}=\frac{1}{2}$. $a=b=\frac{1}{3}$.

② 点 M 在 OA 间,则 N 在 BC 间,$S_{\triangle NMB}=\frac{1}{2}$,即$\frac{1}{2}\cdot MB\cdot y_N=\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{a+b}{a+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{b^2}{1-2b}>0\Rightarrow b<\frac{1}{2}$.

③ 点 M 在 A 左侧,则 $\frac{-b}{a}<-1$,所以 $b>a$. 设 $y=ax+b$ 与 AC 交点为 P,则 $\begin{cases}y=ax+b,\\y=x+1\end{cases}\Rightarrow P\left(\frac{1-b}{a-1},\frac{a-b}{a-1}\right)$.

又因为 $S_{\triangle CPN}=\frac{1}{2}$,即$\frac{1}{2}(1-b)(x_N-x_P)=\frac{1}{2}(1-b)\cdot\left|\frac{1-b}{a+1},\frac{1-b}{a-1}\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow 2(1-b)^2=|a^2-1|$,$b>a>0$,$0<a<1$,所以 $2(1-b)^2=|a^2-1|=1-a^2$,所以$\sqrt{2}(1-b)=\sqrt{1-a^2}<1$,所以 $1-b<\frac{1}{\sqrt{2}}$,即 $b>1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

综上 $b=\frac{1}{3}$,$b<\frac{1}{2}$,$b>1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow b\in\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$. 故选:B.

总结　分类讨论思想.

黑哥细数高考惨案 4:立体几何建完系却写错点坐标.

——彭伟明老师

【例 5】(2011·安徽理·15) 平面直角坐标系中,如果 x 与 y 都是整数,那么就称点 (x,y) 为整点,下列命题中正确的是__________(写出所有正确命题的编号).

① 存在这样的直线,既不与坐标轴平行又不经过任何整点;

② 如果 k 与 b 都是无理数,则直线 $y=kx+b$ 不经过任何整点;

③ 直线 l 经过无穷多个整点,当且仅当 l 经过两个不同的整点;

④ 直线 $y=kx+b$ 经过无穷多个整点的充分必要条件是:k 与 b 都是有理数;

⑤ 存在恰经过一个整点的直线.

条件 出现"存在"或"如果"⇒举反例来判断.

解析 ① 若 x,y 为整数,则 $x+y$ 也为整数,故 $x+y=\sqrt{2}$ 既不平行于坐标轴,也不经过任何整点,即①正确.

② $y=\sqrt{2}x-\sqrt{2}$ 过 $(1,0)$,故②错.

③ 若 l 经过 $M(m_1,n_1)$,$N(m_2,n_2)$,其中 m_1,m_2,n_1,n_2 均为整数.当 $m_1=m_2$ 或 $n_1=n_2$ 时,直线 l 方程为 $x=m_1$ 或 $y=n_1$,显然过无穷多个整点.当 $m_1\neq m_2$ 且 $n_1\neq n_2$ 时,直线 l 的方程为 $y-n_1=\dfrac{n_1-n_2}{m_1-m_2}(x-m_1)$,则直线 l 过点 $((k+1)m_1-km_2,(k+1)n_1-kn_2)$,$k\in\mathbf{Z}$.这些整数均为整点且有无穷多个,即直线 l 经过无穷多整点,③正确.

④ x,y 为整数时,$y-x$ 还是整数,故 $y=x+\dfrac{1}{2}$ 不经过任何整点.当 k,b 为有理数,并不能保证 l:$y=kx+b$ 过无穷多个整点,④错.

⑤ $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ 过 $(1,0)$,⑤正确.

故选:①③⑤.

总结 对于新定义的题目,大家做题时可考虑举一些例子和数据来判断正误.

练习

1.(2010·广东模考) 已知直线 l:$kx-y+1+2k=0(k\in\mathbf{R})$.

(1) 证明:直线 l 过定点;

(2) 若直线不经过第四象限,求 k 的取值范围;

(3) 若直线 l 交 x 轴负半轴于 A,交 y 轴正半轴于 B,$\triangle AOB$ 的面积为 S,求 S 的最小值并求此时直线 l 的方程.