

【导读】 本章根据离散时间 Markov(马尔可夫)链概念,引出了转移概率及其矩阵,以及转移概率所遵守的卡普曼-柯尔莫哥洛夫方程(C-K 方程),定义了初始分布与绝对分布,详细阐述了互通、闭集、吸收态、周期态、常返态与非常返态、遍历态等基本概念,给出了状态分解定理,讨论了转移概率的极限与平稳分布、遍历态与平稳分布间的关系;讨论了连续时间 Markov 链的转移概率、初始分布与绝对分布、状态停留时间、状态微分方程等,对连续时间 Markov 链的特例——生灭过程进行了讨论与分析;根据 Markov 链原理,建立了卫星信道 Markov 模型并进行 Simulink 仿真实现。

马尔可夫过程是具有以下特性的随机过程:当随机过程在时刻 t_k 所处的状态为已知的条件下,过程在时刻 t (这里 $t > t_k$)处的状态,只与随机过程在 t_k 时刻的状态有关,而与随机过程在 t_k 时刻以前所处的状态无关。这种特性称为无后效性或马尔可夫性。

马尔可夫(Markov)过程按照其状态和时间参数是连续还是离散,可分为:(1)时间离散、状态离散的 Markov 过程,常被称作为 Markov 链;(2)时间离散、状态连续的 Markov 过程,常被称作为 Markov 序列;(3)时间和状态都连续的 Markov 过程,一般称为 Markov 过程。

5.1 离散时间 Markov 链

设 Markov 过程 $\{X_k, k \in T\}$ 的参数集 $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ 是离散时间的集合,其可能取值集合构成的状态空间 $I = \{i_1, i_2, \dots\}$ 是离散状态集。

【定义 5.1】 设随机过程 $\{X_k, k \in T\}$, 对于任意的 $k \in T$ 和任意的状态集 $\{i_0, i_1, i_2, \dots, i_{k+1}\}$, 能在可列个时刻发生状态转移。在这种情况下,若过程在 m 时刻的状态 i_m , 在 $m+n$ 时刻变成任一状态 i_{m+n} 的概率,只与该过程在 m 时刻的状态有关,而与 m 以前时刻所处的状态无关,即

$$\begin{aligned} P\{X_{m+n} = i_{m+n} \mid X_m = i_m, X_{m-1} = i_{m-1}, \dots, X_1 = i_1\} \\ = P\{X_{m+n} = i_{m+n} \mid X_m = i_m\} \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

则称此随机过程为 Markov 链。

5.1.1 离散时间 Markov 链及其转移概率与矩阵

【定义 5.2】 以 $P_{ij}(m, m+n)$ 来表示 Markov 链在 m 时刻出现 $X_m = i$ 条件下,在 $m+n$

时刻出现 $X_{m+n}=j$ 的条件概率,称

$$\begin{aligned} p_{ij}(m, m+n) &= P(X_{m+n} = j \mid X_m = i) \\ (i, j &= 1, 2, \dots, n; m, n \text{ 都是正整数}) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

为随机过程 X_k 由 m 时刻的状态 i 转移到 $m+n$ 时刻的状态 j 的转移概率。

该式表明, $p_{ij}(m, m+n)$ 不仅与 i, j 和 n , 而且与 m 有关。如果 $p_{ij}(m, m+n)$ 与 m 无关, 则称这种 Markov 链是齐次的。这里我们只讨论齐次 Markov 链, 并且习惯上常把“齐次”二字省去。

1. 一步转移概率

当转移概率 $p_{ij}(m, m+n)$ 中的 n 为 1 时, 可以用 p_{ij} 来表示 Markov 链由状态 i 经过一步转移到达状态 j 的转移概率, 称

$$p_{ij}(1) = p_{ij}(m, m+1) = P\{X_{m+1} = j \mid X_m = i\} = p_{ij} \quad (5.1.3)$$

为一步转移概率。所有的一步转移概率 p_{ij} 构成矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.1.4)$$

称之为 Markov 链的一步转移概率矩阵, 简称转移概率矩阵。这个矩阵具有以下两个性质:

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad (5.1.5)$$

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1 \quad (5.1.6)$$

称任一具有这两个性质的矩阵为随机矩阵。可见, 这是一个每行元素和为 1 的非负元素矩阵。

2. n 步转移概率及其矩阵

Markov 链的 n 步转移概率 $p_{ij}(n)$ 定义为

$$p_{ij}(n) = p_{ij}(m, m+n) = P\{X_{m+n} = j \mid X_m = i\} \quad (5.1.7)$$

该式表明, Markov 链在时刻 t_m 时, X_m 的状态为 i 的条件下, 经过 $n(\geq 1)$ 步转移到达状态 j 的概率。对应的 n 步转移概率矩阵为

$$P(n) = \begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots & p_{1N}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \cdots & p_{2N}(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{N1}(n) & p_{N2}(n) & \cdots & p_{NN}(n) \end{bmatrix} \quad (5.1.8)$$

它也是随机矩阵。显然, 具有如下性质:

$$0 \leq p_{ij}(n) \leq 1 \quad (5.1.9)$$

$$\sum_{j=1}^N p_{ij}(n) = 1 \quad (5.1.10)$$

当 $n=1$ 时, $p_{ij}(n)$ 就是一步转移概率

$$p_{ij}(n) \mid_{n=1} = p_{ij}(1) = p_{ij} = p_{ij}(m, m+1)$$

通常还规定

$$p_{ij}(0) = p_{ij}(m, m) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (5.1.11)$$

3. 卡普曼-柯尔莫哥洛夫方程(简称 C-K 方程)

对于 $n=k+l$ 步转移概率, 则 C-K 方程的离散形式为

$$p_{ij}(n) = p_{ij}(l+k) = \sum_{r \in I} p_{ir}(l) p_{rj}(k) \quad (5.1.12)$$

此式表明, Markov 链从状态 i 经过 n 步转移到达状态 j 这一过程, 可以等效成先由状态 i 经过 $l(n>l>0)$ 步转移到达某状态 $r(r=1, 2, \dots, n)$, 再由状态 r 经过 $k(l+k=n)$ 步转移到达状态 j 。下面给出卡普曼-柯尔莫哥洛夫方程的证明。

证明:

$$\begin{aligned} P_{ij}(n) &= p_{ij}(k+l) = P\{X_{m+l+k} = j \mid X_m = i\} \\ &= \frac{P(X_{m+l+k} = j, X_m = i)}{P\{X_m = i\}} \\ &= \sum_r \frac{P\{X_m = i, X_{m+l+k} = j, X_{m+l} = r\}}{P\{X_m = i, X_{m+l} = r\}} \cdot \frac{P\{X_m = i, X_{m+l} = r\}}{P\{X_m = i\}} \\ &= \sum_r P\{X_{m+l+k} = j \mid X_m = i, X_{m+l} = r\} P\{X_{m+l} = r \mid X_m = i\} \end{aligned}$$

利用无后效应与齐次性, $\sum_r$ 号中的第一个因子等于

$$P(X_{m+l+k} = j \mid X_{m+l} = r) = p_{rj}(k)$$

第二个因子等于 $p_{ir}(l)$, 因此

$$p_{ij}(l+k) = \sum_r p_{ir}(l) p_{rj}(k)$$

证毕。

式(5.1.12)的矩阵形式为

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(l+k) = \mathbf{P}(l) \cdot \mathbf{P}(k) \quad (5.1.13)$$

当 $n=2$ 时, 有

$$\mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(1) \cdot \mathbf{P}(1) = [\mathbf{P}(1)]^2 = \mathbf{P}^2 \quad (5.1.14)$$

当 $n=3$ 时, 有

$$\mathbf{P}(3) = \mathbf{P}(1) \cdot \mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(1) \cdot \mathbf{P}(1) \cdot \mathbf{P}(1) = [\mathbf{P}(1)]^3 = \mathbf{P}^3 \quad (5.1.15)$$

当 n 为任意整数时, 有

$$\mathbf{P}(n) = [\mathbf{P}(1)]^n = \mathbf{P}^n \quad (5.1.16)$$

此外, 可直接由式(5.1.12), 令 $l=1$, 得到一个有用公式

$$p_{ij}(k+1) = \sum_{r \in I} p_{ir} p_{rj}(k) = \sum_{r \in I} p_{ir}(k) p_{rj} \quad (5.1.17)$$

式中, p_{ir}, p_{rj} 皆为一步转移概率。

由以上可见, 一步转移概率构成的转移概率矩阵 $\mathbf{P}$ 完全决定了 Markov 链状态转移过程的概率法则。这就是说, 在已知 $X_m=i$ 条件下, $X_{m+n}=j$ 的条件概率可由一步转移概率矩阵求出。

5.1.2 离散时间 Markov 链的初始分布与绝对分布

【定义 5.3】 如果 Markov 链 $\{X_k, k \in T\}$ 在初始时刻 $k=0$ 的 X_0 的状态为 i , 则称

$$p_i = P(X_0 = i) \quad (5.1.18)$$

为 Markov 链的初始概率,称 $\{p_i, i \in I\}$ 为 Markov 链的初始分布。显然,有

$$p_i \geq 0; \sum_i p_i = 1 \quad (5.1.19)$$

【定义 5.4】 如果 Markov 链 $\{X_k, k \in T\}$ 在任意时刻 k 的 X_k 的状态为 i , 则称

$$p_i(k) = P(X_k = i) \quad (5.1.20)$$

为 Markov 链的绝对概率,称 $\{p_i(k), k \geq 0\}$ 为 Markov 链的绝对分布。

【定理 5.1】 设 Markov 链为 $\{X_k, k \in T\}$, 对任意的 $j \in I, k \geq 1$, 则绝对概率 $p_j(k)$ 有性质:

$$(1) p_j(k) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(k) \quad (5.1.21)$$

$$(2) p_j(k) = \sum_{i \in I} p_i(k-1) p_{ij} \quad (5.1.22)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } (1) p_j(k) &= P\{X_k = j\} = \sum_{i \in I} P\{X_0 = i, X_k = j\} \\ &= \sum_{i \in I} P\{X_k = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\} = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) p_j(k) &= P\{X_k = j\} = \sum_{i \in I} P\{X_k = j, X_{k-1} = i\} \\ &= \sum_{i \in I} P\{X_k = j \mid X_{k-1} = i\} P\{X_{k-1} = i\} = \sum_{i \in I} p_i(k-1) p_{ij} \end{aligned}$$

【定理 5.2】 设 Markov 链为 $\{X_k, k \in T\}$, 对任意的 $i_1, i_2, \dots, i_k \in I, k \geq 1$, 有

$$P\{X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k\} = \sum_{i \in I} p_i p_{i i_1} \cdots p_{i_{k-1} i_k} \quad (5.1.23)$$

证: 由全概率公式及马氏性有

$$\begin{aligned} P\{X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k\} &= P\left\{\bigcup_{i \in I} X_0 = i, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k\right\} \\ &= \sum_{i \in I} P\{X_0 = i, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k\} \\ &= \sum_{i \in I} P\{X_0 = i\} P\{X_1 = i_1 \mid X_0 = i\} \cdots \\ &\quad \cdot P\{X_k = i_k \mid X_0 = i, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}\} \\ &= \sum_{i \in I} P\{X_0 = i\} P\{X_1 = i_1 \mid X_0 = i\} \cdots P\{X_k = i_k \mid X_{k-1} = i_{k-1}\} \\ &= \sum_{i \in I} p_i p_{i i_1} \cdots p_{i_{k-1} i_k} \end{aligned}$$

证毕。

定理 5.1 表明,绝对概率 $p_j(k)$ 也类似于 k 步转移概率的性质。定理 5.2 则进一步说明,Markov 链的有限维分布完全由它的初始概率和一步转移概率所决定。因此,只要知道初始概率和一步转移概率,就可以描述 Markov 链的统计特性。

Markov 链在研究质点的随机运动、自控运动、通信技术、经济管理等领域中有着广泛的应用。

【例 5.1】 (无限制随机游动) 设质点在数轴上移动,每次移动一格,向右移动的概率为 p ,向左移动的概率为 $1-p$,这种运动称为无限制随机游动。以 X_k 表示时刻 k 质点所处的位置,则 $\{X_k, k \in T\}$ 是一个齐次 Markov 链,试写出它的一步和 k 步转移概率。

解 显然, $\{X_k, k \in T\}$ 的状态空间 $I = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{Bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1-p & 0 & p & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1-p & 0 & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

设在第 n 步转移概率中向右移了 x 步, 向左移了 y 步, 且经过 n 步转移概率从 i 进入 j , 则

$$\begin{cases} x+y=n, \\ x-y=j-i \end{cases}$$

从而

$$x = \frac{n+(j-i)}{2}, \quad y = \frac{n-(j-i)}{2}$$

由于 x, y 都只能取整数, 所以 $n \pm (j-i)$ 必须是偶数。又在 n 步中哪 x 步向右, 哪 y 步向左是任意的, 选取的方法有 c_n^x 种。于是

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} c_n^x p^x (1-p)^y, & n+(j-i) \text{ 为偶数} \\ 0, & n+(j-i) \text{ 为奇数} \end{cases}$$

例 5.2 (天气预报问题) 设昨日、今日都下雨, 明日有雨的概率为 0.8; 昨日无雨, 今日有雨, 明日有雨的概率为 0.5; 昨日有雨, 今日无雨, 明日有雨的概率为 0.6; 昨日、今日均无雨, 明日有雨的概率为 0.3。若星期一、星期二均下雨, 求星期四下雨的概率。

解 设昨日、今日连续两天有雨的状态记为 0(RR); 昨日无雨、今日有雨的状态为 1(NR), 昨日有雨、今日无雨的状态为 2(RN); 昨日、今日无雨的状态为 3(NN)。于是, 天气预报模型可看作一个四状态的 Markov 链, 其转移概率为

$$p_{00} = P\{R_{\text{今}} R_{\text{明}} | R_{\text{昨}} R_{\text{今}}\} = P\{\text{连续三天有雨}\} = P\{R_{\text{明}} | R_{\text{昨}} R_{\text{今}}\} = 0.8$$

$$p_{01} = P\{N_{\text{今}} R_{\text{明}} | R_{\text{昨}} R_{\text{今}}\} = 0 \text{ (不可能事件)}$$

$$p_{02} = P\{R_{\text{今}} N_{\text{明}} | R_{\text{昨}} R_{\text{今}}\} = P\{N_{\text{明}} | R_{\text{昨}} R_{\text{今}}\} = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$p_{03} = P\{N_{\text{今}} N_{\text{明}} | R_{\text{昨}} R_{\text{今}}\} = 0 \text{ (不可能事件)}$$

式中, R 代表有雨, N 代表无雨。类似地可得到所有状态的一步转移概率为

$$P = \begin{Bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{Bmatrix}$$

其两步转移概率为

$$\begin{aligned} P(2) = PP &= \begin{Bmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0.64 & 0.12 & 0.16 & 0.08 \\ 0.40 & 0.30 & 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.12 & 0.30 & 0.28 \\ 0.15 & 0.21 & 0.15 & 0.49 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

由于星期四下雨意味着过程所处的状态 0 或 1, 因此星期一、星期二连续下雨, 星期四下雨的概率为

$$p = p_{00}(2) + p_{01}(2) = 0.64 + 0.12 = 0.76$$

例 5.3 设质点在线段 $[1, 4]$ 上作随机游动, 假设它只能在时刻 $k \in T$ 发生移动, 且只能停留在 1, 2, 3, 4 上。当质点转移到 2, 3 点时, 它以 $1/3$ 的概率向左或向右移动一格, 或停留在原处。当质点移动到点 1 时, 它以概率 1 停留在原处。当质点移动到点 4 时, 它以概率 1 移动到点 3。若以 X_k 表示质点在时刻 k 所处的位置, 则 $\{X_k, k \in T\}$ 是一个齐次 Markov 链, 写出一步转移矩阵。

解: 其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

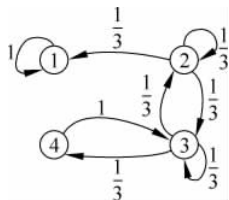


图 5.1 各状态之间的转移关系

各状态之间的转移关系及相应的转移概率, 如图 5.1 所示。

例中的点 1 称为吸收壁, 即质点一旦达到这种状态就被吸收住了, 不再移动; 点 4 称为反射壁, 即质点一旦达到这种状态, 必然被反射出去。

例 5.4 设 $\{X_k, k \geq 0\}$ 为 Markov 链, 具有 3 个状态 0, 1, 2, 已知其一步转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

初始分布 $P(0) = (1/3, 1/3, 1/3)$, 试求

- (1) $P\{X_0 = 0, X_2 = 1\}$;
- (2) $P\{X_2 = 1\}$ 。

$$\text{解 } P(2) = P^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 1/8 & 3/8 & 1/2 \\ 1/16 & 1/4 & 11/16 \end{pmatrix}$$

$$P\{X_0 = 0, X_2 = 1\} = P\{X_0 = 0\}P\{X_2 = 1 \mid X_0 = 0\} = P_0(0)P_{01}(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

$$P\{X_2 = 1\} = P_1(2) = P_0(0)P_{01}(2) + P_1(0)P_{11}(2) + P_2(0)P_{21}(2)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

5.2 离散时间 Markov 链的状态分类

5.2.1 基本概念

1. 互通

【定义 5.5】 如果存在 $n > 0$ 使 $p_{ij}(n) > 0$, 称自状态 i 可达状态 j , 记为 $i \rightarrow j$; 如果 $i \rightarrow j$

且 $j \rightarrow i$, 称状态 i 与 j 互通, 记为 $i \leftrightarrow j$. 约定 $p_{ii}(0)=1, i \in I$, 于是有 $i \rightarrow i$. 若两个状态 i 和 j 不是互通的, 则对所有 $n \geq 0$, 有 $p_{ij}(n)=0$ 或 $p_{ji}(n)=0$ 或两者都成立。

【定理 5.3】 可达关系与互通关系都具有传递性, 即

- (1) 自反性: $i \leftrightarrow i$
- (2) 对称性: $i \leftrightarrow j$, 则 $j \leftrightarrow i$;
- (3) 传递性: 如果 $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k$, 则 $i \leftrightarrow k$.

证明: (1)与(2)是显然的。现证明(3)。由 $i \rightarrow j$, 即存在 $l \geq 1$, 使 $p_{ij}(l) > 0$; 由 $j \rightarrow k$, 即存在 $m \geq 1$, 使 $p_{jk}(m) > 0$ 。

由 C-K 方程, 存在非负整数 $l+m$, 使

$$p_{ik}(l+m) = \sum_r p_{ir}(l) p_{rk}(m) \geq p_{ij}(l) p_{jk}(m) > 0,$$

所以, $i \rightarrow k$ 。同理可证 $k \rightarrow i$ 。所以有存在 $h \geq 0$, 使得 $p_{ki}(h) > 0$ 。

将可达关系的证明, 正向用一次, 反向用一次, 就可得出互通关系的传递性。

2. 闭集

【定义 5.6】 状态空间 I 的子集 C 称为(随机)闭集, 如对任意 $i \in C$ 及 $n \notin C$ 都有 $p_{in} = 0$ 。闭集 C 称为不可约的, 如 C 的状态互通。Markov 链 $\{X_k\}$ 称为不可约的, 如其状态空间不可约。

闭集的意思是自 C 的内部不能到达的外部。这意味着一旦质点进入闭集 C 中, 它将永远留在 C 中运动。

【定理 5.4】 C 是闭集的充要条件为: 对任意 $i \in C$ 及 $n \notin C$ 都有 $p_{in}(k) = 0, k \geq 1$ 。

证明: 只需证必要性。用归纳法, 设 C 为闭集, 由定义当 $k=1$ 时结论成立。设 $k=m$ 时, $p_{in}(m) = 0, i \in C, n \notin C$, 则

$$\begin{aligned} p_{in}(m+1) &= \sum_{j \in C} p_{ij}(m) p_{jn} + \sum_{j \notin C} p_{ij}(m) p_{jn} \\ &= \sum_{j \in C} p_{ij}(m) 0 + \sum_{j \notin C} 0 p_{jn} = 0 \end{aligned}$$

在 Markov 链中, 视状态空间 I 为一个闭集, 因此, I 是最大闭集; 如果 I 中存在吸收状态, 则吸收状态构成的单点集是最小闭集。显然。最小闭集不一定是唯一的。一个闭集若无真闭子集, 则称其为不可约的; 若 I 为不可约的, 则称此 Markov 链为不可约的。

3. 吸收

【定义 5.7】 由状态 i 构成的单点集 $C = \{i\}$ 为闭集, 则称 i 为吸收状态。

【例 5.5】 设 Markov 链 $\{X_k\}$ 的状态空间 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{Bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

试判断吸收状态及可约性。

解: 根据转移矩阵得状态图, 如图 5.2 所示。

由图 5.2 知, 3 是吸收的, 故 $\{3\}$ 为闭集; $\{1, 4\}$ 、 $\{1, 4, 3\}$ 、 $\{1, 2, 3\}$,

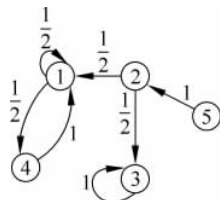


图 5.2 状态图

4) 都是闭集, 其中 $\{3\}$ 及 $\{1, 4\}$ 是不可约的, 又 I 含有闭子集, 故 $\{X_k\}$ 不是不可约链。

4. 周期态

【定义 5.8】 Markov 链的状态空间为 I , 对任意的 $i \in I$, 则称最大公约数

$$d = d(i) = \text{GCD}\{k \geq 1, P_{ii}(k) > 0\} \quad (5.2.1)$$

为状态 i 的周期。如 $d > 1$, 就称 i 为周期态, 如 $d = 1$ 就称 i 为非周期态。如 i 有周期 d , 则对一切非零的 $k \neq 0 \pmod{d}$ 都有 $p_{ii}(k) = 0$ 。但这并不是说对任意的 kd 有 $p_{ii}(kd) > 0$ 。这里 GCD 表示最大公约数。周期性的概念揭示了状态返回自身的周期规律。例如, 过程从状态 i 出发, 若只有当 $k = 2, 4, 6 \cdots$ 时, 过程有可能返回状态 i , 那么 $2, 4, 6 \cdots$ 的最大公约数 2 是状态 i 的周期。若 i 是周期为 $d(i)$ 的状态, 则当且仅当 $k \in \{0, d(i), 2d(i), 3d(i), \cdots\}$ 时, 才存在 $p_{ii}(k) > 0$, 或者说, 对任意 $k \notin \{0, d(i), 2d(i), \cdots\}$, 则 $p_{ii}(k) = 0$ 。

【定理 5.5】 如果状态 i 的周期为 $d = d(i)$, 则存在正整数 M , 对于一切 $k \geq M$, 有 $p_{ii}(kd(i)) > 0$ 。

证明: 按数论理论知: 若正整数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的最大约数为 d , 则存在正整数 M , 对于一切 $k \geq M$, 都能找到非负整数 α_i , 使

$$kd = \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i$$

对状态 i , 令 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是使 $p_{ii}(k_1), p_{ii}(k_2), \cdots, p_{ii}(k_n) > 0$ 的正整数, 由周期定义知, $d(i)$ 是它的最大公约数, 则对任意时 $k \geq M$

$$p_{ii}(kd) = p_{ii}\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j k_j\right) \geq p_{ii}(\alpha_1 k_1) p_{ii}(\alpha_2 k_2) \cdots p_{ii}(\alpha_n k_n) = \prod_{j=1}^n [p_{ii}(k_j)]^{\alpha_j} > 0。$$

【例 5.6】 (无限制随机游动) 考虑在直线上作随机游动的质点, 如果某一时刻质点位于 i , 则下一步质点以概率 p 向右移动一格到 $i+1$, 而以概率 $1-p$ 向左移动一格至 $i-1$, 若以 X_k 表示时刻 k 质点的位置, 则 $\{X_k, k=0, 1, 2, \cdots\}$ 是一个齐次 Markov 链, 其状态空间是 $I = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 一步转移概率为

$$P_{ij} = \begin{cases} p & j = i+1 \\ 1-p & j = i-1 \\ 0 & \text{其他 } j \end{cases} \quad i \in I, 0 < p < 1$$

求其 k 步转移概率 $P_{ij}(k)$ 及状态 i 的周期。

解: k 次转移中向右的次数减去向左的次数应等于 $j-i$, 于是

$$P_{ij}(k) = \begin{cases} C_k^{(k+j-i)/2} p^{(k+j-i)/2} (1-p)^{(k-j+i)/2} & k+j-i \text{ 为偶数} \\ 0 & k+j-i \text{ 为奇数} \end{cases}$$

特别有

$$P_{ij}(k) = \begin{cases} C_k^{k/2} p^{k/2} (1-p)^{k/2} & k \text{ 为偶数} \\ 0 & k \text{ 为奇数} \end{cases}, i \in I$$

对于每一个 $i \in I, d(i) = 2$, 所以状态空间 I 中的状态 i 都是周期态, 周期是 2 。

【例 5.7】 Markov 链的一步状态转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

试求状态 1 的周期。

解: 状态转移, 如图 5.3 所示。

直接计算可得:

$$p_{11}(1) = p_{11}(2) = p_{11}(3) = p_{11}(5) = p_{11}(2k+1) = 0$$

而

$$p_{11}(4) = 1/2, \quad p_{11}(6) = 1/4, \quad p_{11}(8) = 3/8, \dots$$

而 $\{4, 6, 8, \dots\}$ 的最大公约数为 2, 所以 $d(1)=2$ 。

【定理 5.6】 若 $i \leftrightarrow j$, 则 $d(i)=d(j)$

证明: 由 $i \leftrightarrow j$, 存在 m, n 使得 $p_{ji}(m) > 0$ 和 $p_{ij}(n) > 0$, 由 C-K 方程, 得

$$p_{jj}(n+m) \geq p_{ji}(m)p_{ij}(n) > 0$$

设有 $k > 0$ 使得 $p_{ii}(k) > 0$, 同样由 C-K 方程, 得

$$p_{jj}(m+k+n) \geq p_{ji}(m)p_{ii}(k)p_{ij}(n) > 0$$

由定义知, $d(j)$ 必同时整除 $m+n$ 和 $m+k+n$, 所以, $d(j)$ 必整除 k 。而 $d(i)$ 是能整除使得 $p_{ii}(m) > 0$ 的所有 k 的数中最大的数, 因而 $d(j)$ 必可整除 $d(i)$ 。同样, $d(i)$ 必可整除 $d(j)$, 因此, $d(i)=d(j)$ 。

5. 常返性与非常返性

【定义 5.9】 用

$$f_{ij}(k) = P\{X_{k+m} = j, X_{k+m-1} \neq j, \dots, X_{m+1} \neq j, X_m = j \mid X_0 = i\} \quad (5.2.2)$$

表示由 i 出发, 经 k 步首次到达 j 的概率也称为首中概率。用

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}(k) \quad (5.2.3)$$

表示由 i 出发, 经有限步终于到达 j 的概率, 简称迟早到达概率。

当 $i \neq j$ 时, $f_{ij}(0)=0$, 此外, 由 C-K 方程, 有

$$p_{ij}(k) = \sum_{l=1}^k f_{ij}(l)p_{jj}(k-l) = \sum_{l=0}^k f_{ij}(k-l)p_{jj}(l) \quad (5.2.4)$$

这是因为

$$\begin{aligned} p_{ij}(k) &= P(X_k = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{l=1}^k P(X_v \neq j, 1 \leq v \leq l-1, X_l = j, X_k = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{l=1}^k P(X_k = j \mid X_0 = i, X_v \neq j, 1 \leq v \leq l-1, X_l = j) \\ &\quad \cdot P(X_v \neq j, 1 \leq v \leq l-1, X_l = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{l=0}^k p_{jj}(k-l)f_{ij}(l) \end{aligned}$$

C-K 方程及 (5.2.4) 是 Markov 链的关键性公式, 它们可以把 $p_{ii}(k)$ 分解成较低步的转移概率之和的形式。

显然, 有

$$0 \leq f_{ij}(k) \leq f_{ij} \leq 1 \quad (5.2.5)$$

特别地, 当 $i=j$ 时, f_{ii} 表示从状态 i 出发, 迟早返回 i 的概率。

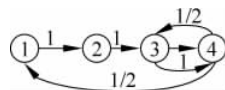


图 5.3 状态图

【定义 5.10】 如果 $f_{ii}=1$, 称状态 i 为常返的; 如果 $f_{ii}<1$, 称状态 i 为非常返的或瞬过的。

可见, 若 i 是瞬过态, 则由 i 出发将以正概率 $1-f_{ii}$ 永远不再返回到 i ; 若 i 是常返时, 则不会出此现象。对常返态 i , 由定义知 $\{f_{ij}(k), k \geq 1\}$ 构成一概率分布。此分布的期望值为

$$m_i = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}(k) \quad (5.2.6)$$

表示由 i 出发再返回到 i 的平均返回时间。

【定义 5.11】 如 $m_i < \infty$, 则称常返态 i 为正常返的; 如 $m_i = \infty$, 则称常返态 i 为零常返的。非周期的正常返态称为遍历状态。

【定理 5.7】 若状态 i 是常返状态, 且平均常返时为 m_i , 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ii}(k) = \frac{1}{m_i} \quad (5.2.7)$$

因此, 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ii}(k) = 0$, 则状态 i 是零常返状态; 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ii}(k) < \infty$, 则状态 i 是正常返状态。

证明: 定义级数为

$$p_i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{mt} p_{ii}(m), \quad F_i(t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{mt} f_{ii}(m), \quad t < 0$$

由于 $t < 0$ 及任意的 m , 有 $0 \leq p_{ii}(m), f_{ii}(m) \leq 1$, 且上述定义的级数绝对收敛。此外, 有

$$p_{ii}(m) = \sum_{l=1}^m f_{ii}(l) p_{ii}(m-l)$$

于是, 有

$$\begin{aligned} p_i(t) &= p_{ii}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{mt} p_{ii}(m) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{mt} \sum_{l=1}^m f_{ii}(l) p_{ii}(m-l) \\ &= 1 + p_i(t) \sum_{l=1}^{\infty} e^{lt} f_{ii}(l) = 1 + p_i(t) F_i(t) \end{aligned}$$

所以

$$p_i(t) = \frac{1}{1 - F_i(t)}$$

两边同乘 $1 - e^t$, 得

$$(1 - e^t) p_i(t) = \frac{1 - e^t}{1 - F_i(t)}$$

对 $(1 - e^t) p_i(t)$ 求极限, 得

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} (1 - e^t) p_i(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} e^{mt} p_{ii}(m)}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{mt}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^l e^{mt} p_{ii}(m)}{\sum_{m=0}^l e^{mt}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^l p_{ii}(m)}{l} = \lim_{l \rightarrow \infty} p_{ii}(l)$$

对 $\frac{1 - e^t}{1 - F_i(t)}$ 求极限, 得

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^t}{1 - F_i(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-e^t}{-\sum_{m=0}^{\infty} m e^{mt} f_{ii}(m)} = \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} m f_{ii}(m)} = \frac{1}{m_i}$$

证毕。

【定理 5.8】 若状态 i 是常返的, 则从状态 i 出发, Markov 链将以概率 1 无穷次返回状态 i ; 若状态 i 是瞬过的, 则从状态 i 出发, Markov 链无穷次返回状态 i 的概率为 0, 也即 Markov 链只能有限次返回状态 i 。

证明: 设 $q_{ii}(k)$ 表示从状态 i 出发, 有 k 次返回状态 i 的概率, 则 $q_{ii} = \lim_{k \rightarrow \infty} q_{ii}(k)$ 表示从状态 i 出发无穷次返回状态 i 的概率。又定义 $q_{ii}(1) = f_{ii}$, 且

$$q_{ii}(k+1) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{ii}(m) q_{ii}(k) = q_{ii}(m) f_{ii}$$

所以

$$q_{ii}(k) = (f_{ii})^k$$

因此

$$q_{ii} = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{ii})^k = \begin{cases} 1, & f_{ii} = 1 \\ 0, & f_{ii} < 1 \end{cases}$$

证毕。

【定理 5.9】 状态 i 常返的充要条件为

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}(k) = +\infty \quad (5.2.8)$$

状态 i 是非常返或瞬过的充要条件为

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}(k) = \frac{1}{1-f_{ii}} < +\infty \quad (5.2.9)$$

证明: 这里对瞬过的情况进行证明。 N 表示从随机过程 X_k 状态 i 出发返回状态 i 的次数, 是随机变量, 在 $X_0 = i$ 的条件下, 有

$$P\{N = n \mid X_0 = i\} = f_{ii}^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$E[N \mid X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} n P\{N = n \mid X_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^n = \frac{f_{ii}}{(1-f_{ii})^2} < +\infty$$

定义随机变量序列

$$I_k = \begin{cases} 1, & X_k = i \\ 0, & X_k \neq i \end{cases}$$

则

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} I_k$$

利用 $E[I_k \mid X_0 = i] = 1 \cdot P\{X_k = i \mid X_0 = i\} + 0 \cdot P\{X_k \neq i \mid X_0 = i\}$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}(k) &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X_k = i \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E[I_k \mid X_0 = i] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} I_k \mid X_0 = i\right] \\ &= E[N \mid X_0 = i] < +\infty \end{aligned}$$

反之, 若 $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}(k) < +\infty$, 则状态 i 必是瞬过的; 否则, 若状态 i 是常返的, 则从状态 i 出

发,最终回到状态 i 的概率为 1。由 Markov 链以后的状态只与当前状态有关的性质可知,过程 X_k 不断以概率 1 返回状态 i ,因此返回的次数为无穷大。也就是 $E[N | X_0 = i] = \infty$,这与 $\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}(k)$ 收敛相矛盾。证毕。

常返性与非常返性有如下性质:

性质 1 设 $i \leftrightarrow j$,若状态 i 是常返的,则状态 j 是常返的。

证明: 因为 $i \leftrightarrow j$,存在设 m, k 使 $p_{ji}(m) > 0, p_{ij}(k) > 0$ 。于是对任意的 $l > 0$,有

$$p_{ij}(m+l+k) \geq p_{ji}(m)p_{ii}(l)p_{ij}(k)$$

所以,有

$$\sum_{l=1}^{\infty} p_{ij}(m+l+k) \geq \sum_{l=1}^{\infty} p_{ji}(m)p_{ii}(l)p_{ij}(k) = p_{ji}(m)p_{ij}(k) \sum_{l=1}^{\infty} p_{ii}(l) = \infty$$

因此

$$\sum_{l=1}^{\infty} p_{ii}(l) = \infty$$

所以,状态 j 是常返的。该性质表明,常返与瞬过是等价类的,即同一个等价类中的状态,要么全是常返的,要么全是瞬过的。

性质 2 若状态 j 是非常返的,则对任意 $i \in I$,均有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k) = 0 \quad (5.2.10)$$

证明: 因为

$$p_{ij}(k) = \sum_{l=1}^k f_{ij}(l)p_{ij}(k-l) \leq \sum_{l=1}^{k'} f_{ij}(l)p_{ij}(k-l) + \sum_{l=k'+1}^n f_{ij}(l)$$

对于 $k' < k, k \rightarrow \infty$,有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k) \leq \sum_{l=k'+1}^{\infty} f_{ij}(l)$$

这是收敛的余项,故当 $k' \rightarrow \infty$ 时,有 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k) = 0$ 。

该性质表明,从任何一个状态出发,到达一个瞬过状态的概率,随着步数的增大而趋于零。

性质 3 设状态 i 常返且有周期 $d(i)$,则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ii}(kd(i)) = \frac{d(i)}{m_i} \quad (5.2.11)$$

式中, m_i 为状态 i 的平均返回时间。当 $m_i \rightarrow \infty$ 时, $\frac{d(i)}{m_i} = 0$ 。

性质 4 如果 $i \rightarrow j$,则

- (1) i 与 j 同为常返或非常返,如为常返,则它们同为正常返或零常返;
- (2) i 与 j 有相同的周期。

证 (1) 由于 $i \rightarrow j$,由可达定义知,存在 $l \geq 1$ 和 $k \geq 1$,使得

$$p_{ij}(l) = \alpha > 0, \quad p_{ji}(k) = \beta > 0$$

由 C-K 方程,总有

$$p_{ii}(l+m+k) \geq p_{ij}(l)p_{jj}(m)p_{ji}(k) = \alpha\beta p_{jj}(m) \quad (5.2.12)$$

$$p_{jj}(l+m+k) \geq p_{ji}(k)p_{jj}(m)p_{ij}(l) = \alpha\beta p_{ii}(m) \quad (5.2.13)$$

将式(5.2.12)和式(5.2.13)的两边从1到 ∞ 求和,得

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} p_{ii}(l+m+k) &\geq \sum_{m=1}^{\infty} \alpha\beta p_{jj}(m) = \alpha\beta \sum_{m=1}^{\infty} p_{jj}(m) \\ \sum_{m=1}^{\infty} p_{jj}(l+m+k) &\geq \sum_{m=1}^{\infty} \alpha\beta p_{ii}(m) = \alpha\beta \sum_{m=1}^{\infty} p_{ii}(m)\end{aligned}$$

可见, $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}(k)$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}(k)$ 相互控制,所以它们同为无穷或同为有限。即状态 i 与 j 同为常返或同为非常返。又对式(5.2.12)与式(5.2.13)两边同时取极限,则有

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} p_{ii}(l+m+k) &\geq \alpha\beta \lim_{m \rightarrow \infty} p_{jj}(m) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} p_{jj}(l+m+k) &\geq \alpha\beta \lim_{m \rightarrow \infty} p_{ii}(m)\end{aligned}$$

因此, $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ii}(k)$ 与 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{jj}(k)$ 同为零或同为正,即状态 i 与 j 同为常返或非常返。

(2) 令

$$p_{ij}(l) = \alpha > 0, \quad p_{ji}(k) = \beta > 0$$

设状态 i 的周期为 $d(i)$, 状态 j 的周期为 $d(j)$ 。由式(5.2.12)知,对任一使 $p_{jj}(m) > 0$ 的 m , 必有 $p_{ii}(l+m+k) > 0$, 从而 $d(i)$ 可除尽 $l+m+k$, 但

$$p_{ii}(l+k) \geq p_{ij}(l)p_{ji}(k) = \alpha\beta > 0$$

所以 $d(i)$ 也能除尽 $l+k$ 。可见, $d(i)$ 可除尽 m , 这说明 $d(i) \leq d(j)$ 。利用式(5.2.13)类似可证 $d(i) \geq d(j)$ 。因而 $d(i) = d(j)$ 。

性质 5 所有常返状态构成闭集

证明: 若状态 i 常返且 $i \rightarrow j$, 则必有 $j \rightarrow i$, 即 $i \leftrightarrow j$ 。因为若 $j \nrightarrow i$, 则该链从状态 i 转移到状态 j 后再也不能返回到状态 i , 这与状态 i 为常返态相矛盾。又常返态是等价类性质知, 状态 j 也为常返态。以上表明, 一个链从常返状态只能到达常返态, 不能到达瞬过态, 即所有常返状态构成一个闭集。

性质 6 在只有常返态的不可约链中, 所有状态都是互通的。

性质 7 不可约有限齐次 Markov 链的所有状态都是正常返态。

例 5.8 设 Markov 链的状态空间为 $I = \{1, 2, 3, 4\}$, 其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

讨论各状态的常返性。

解: n 步转移概率矩阵为

$$P(n) = P^n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} & \frac{1}{4^n} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $p_{11}(n) = 1/2, p_{22}(n) = 1/2, p_{33}(n) = 1/4^n, p_{44}(n) = 1$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{11}(n) = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_{22}(n) = +\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{33}(n) = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_{44}(n) < +\infty$$

因此, 状态 1, 2, 4 都是常返态, 状态 3 是非常返态。当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{11}(n) \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{22}(n) \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{44}(n) \neq 0$ 。所以, 状态 1, 2, 4 都是正常返态。

5.2.2 离散时间 Markov 链状态空间的分解

【定理 5.10】(状态空间分解定理) 任一 Markov 链的状态 I , 可唯一地分解有限个或可列个互不相交的子集

$$I = N \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_l \cup \cdots$$

使得

- ① 每一 C_l 是常返态组成的不可约闭集。
- ② C_l 中的状态同类, 或全是正常返态, 或全是零常返态。
- ③ 每个 C_l 中状态若同为周期的, 则它们有相同的周期且 $f_{jk} = 1, j, k \in C_l$; 或同时不为周期的。
- ④ N 由全体非常返状态组成。自 C_l 中的状态不能到达 N 中的状态。

称 C_l 为基本常返闭集。需要指出的是: 分解定理中的集 N 不一定是闭集, 但如 I 为有限集, N 一定是闭集。因此, 如最初质点是自某一非常返状态出发, 则它可能就一直在 N 中运动, 也可能在某一时刻离开 N 转移到某一基本常返闭集 C_l 中。一旦质点进入 C_l 后, 它将永远在此 C_l 中运动。

【例 5.9】 设 Markov 链 $\{X_k, k \geq 0\}$ 的空间状态 $I = \{1, 2, \dots, 6\}$; 转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

试分解此 Markov 链并求出各状态的周期。

解 状态传递, 如图 5.4 所示。

对状态 1, 有

$$f_{11}(1) = 0, \quad f_{11}(2) = 0, \quad f_{11}(3) = 1, \quad f_{11}(k) = 0 (k \geq 4),$$

故 $f_{11} = 1$ 。状态 1 为常返态。 $m_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{11}(k) = 3$, 由状态 1

生成的基本常返闭集为

$$C_1 = \{\bar{1}\} = \{1\} \cup \{n: 1 \rightarrow n\} = \{1, 3, 5\}$$

类似地, 状态 6 也是正常返态, $m_6 = 3/2$, 由状态 6 生成的基本闭集 $C_2 = \{\bar{6}\} = \{2, 6\}$ 。

$D = \{4\}$ 是非常返集, 从而状态空间

$$I = \{4\} \cup \{1, 3, 5\} \cup \{2, 6\}$$

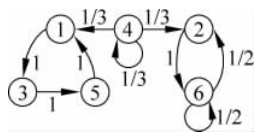


图 5.4 状态图

由 $f_{11}(3) > 0$, 故状态 1 周期为 3, 从而 C_1 中状态周期均为 3。又 $f_{66}(1) > 0$, 故状态 6 是非周期的, 即 C_2 中状态是遍历的。同样, 因 $f_{44}(1) > 0$, 故状态 4 也是非周期的。

例 5.10 设 Markov 链的状态空间 $I = \{0, 1, 2, 3\}$, 其转移概率

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求状态空间的分解。

解 状态传递, 如图 5.5 所示。

由状态 3 不可能到达任何其他状态, 所以是常返态。状态 2 可到达 0, 1, 3 三个状态, 但从 0, 1, 3 三个状态都不能到达状态 2, 但 0 与 1 两个状态相通, 构成一个常返态闭集。又 $\sum_{k=1}^{\infty} p_{22}(k) = \frac{1}{3}$, 所以状态 2 为非常返态。于是状态空间分解为 $I = \{2\} + \{0, 1\} + \{3\}$ 。

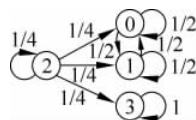


图 5.5 状态图

例 5.11 设 Markov 链状态空间 $I = \{0, 1, \dots, 8\}$, 转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

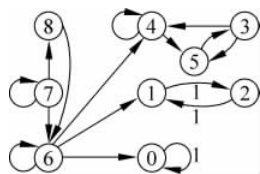


图 5.6 例 5.11

式中, * 表示正概率, 求状态的分类。

解 状态传递, 如图 5.6 所示。

因 $p_{00} = 1$, 故状态 0 为吸收态, 构成闭集。又 $\{1, 2\}$ 构成一个闭集, $\{3, 4, 5\}$ 也构成一个闭集, 而集 $\{6, 7, 8\}$ 为非常返集。

例 5.12 Markov 链的状态空间 $I = \{0, 1, \dots, 7\}$, 其转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求状态转移图和周期。

解 状态传递,如图 5.7 所示。

由图可知 8 个状态可分为 4 个子集

$$C_1 = \{0\}, \quad C_2 = \{1, 2, 3\},$$

$$C_3 = \{4, 5\}, \quad C_4 = \{6, 7\}$$

它们是互不相交的子集, $I = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, 有确定性的周期转移

$$C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C_4 \rightarrow C_1$$

故该 Markov 链的周期是 $d=4$ 。

例 5.13 设质点在包括原点的正半轴上作随机游动。除原点外, 在任何一点上都以概率 p 右移一个状态, 以概率 $q=1-p$ 左移一个状态; 在原点处以概率 p 右移一个状态, 以概率 q 留在原点处, 判别:

(1) 该随机游动是否不可约齐次 Markov 链;

(2) 该 Markov 链是否常返链。

解 由质点运动规则知, 该过程是一个齐次 Markov 链, 状态空间 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} q & p & & \\ q & 0 & p & \\ & q & 0 & p \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

(1) 由于状态空间的所有状态都是相通的, 因此所有状态都是常返态, 构成一个闭集, 依定义知, 是一个不可约的齐次 Markov 链。

(2) 利用定义知, 方程组为

$$\begin{cases} Z_1 = PZ_2, \\ Z_i = qZ_{i-1} + pZ_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots \end{cases}$$

利用 $p+q=1$, 可改写为

$$\begin{cases} Z_2 - Z_1 = \frac{q}{p}Z_1, \\ Z_{i+1} - Z_i = \frac{q}{p}(Z_i - Z_{i+1}), \quad i = 2, 3, \dots \end{cases}$$

不断迭代可得

$$Z_{i+1} - Z_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i Z_1, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

对 i 从 1 到 $k-1$ 求和, 得

$$Z_k - Z_1 = \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-2} + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)\right]Z_1, \quad k = 2, 3, \dots$$

即

$$Z_k = \frac{1 - (q/p)^k}{1 - (q/p)} Z_1, \quad k = 1, 2, \dots$$

此式说明: 如果 $q/p < 1$, 则 Z_i 是有界的, 即方程组有非零有界解。依定理知, 此 Markov 链是非常返态的。如果 $q/p = 1$ 或 $q/p > 1$, 则 Z_i 是无界的, 即 Markov 链是常返态的。

【定理 5.11】 周期为 d 的不可约 Markov 链, 其状态空间 I 可唯一地分解为 d 个互不

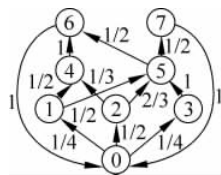


图 5.7 状态图

相交的子集之和,即

$$I = \bigcup_{r=0}^{d-1} G_r, \quad G_r \cap G_s = \phi, \quad r \neq s \quad (5.2.14)$$

且使得自 G_r 中任一状态出发,经一步转移必进入 G_{r+1} 中(其中 $G_d = G_0$)。

证明: 任意取定一状态 i , 对每一个 $r=0, 1, \dots, d-1$, 定义集合

$$G_r = \{j: \text{对某个 } k \geq 0, p_{ij}(kd+r) > 0\} \quad (5.2.15)$$

因 I 不可约, 故 $\bigcup_{r=0}^{d-1} G_r = I$, 如图 5.8 所示。

其次, 如存在 $j \in G_r \cap G_s$, 式 (5.2.15) 必存在 k 及 m 使 $p_{ij}(kd+r) > 0$, $p_{ij}(md+s) > 0$, 又因 $j \leftrightarrow i$, 故必存在 l , 使 $p_{ji}(l) > 0$, 于是

$$p_{ii}(kd+r+l) \geq p_{ij}(kd+r)p_{ji}(l) > 0$$

$$p_{ii}(md+s+l) \geq p_{ij}(md+s)p_{ji}(l) > 0$$

由此可见, $r+l$ 及 $s+l$ 都能被 d 除尽, 从而其差 $(r+l)-(s+l)=r-s$ 也能被 d 除尽。但 $0 \leq r, s \leq d-1$, 故只能 $r-s=0$, 因而 $G_r = G_s$ 。这说明: 当 $r \neq s$ 时, $G_r \cap G_s = \phi$ 。

现证, 对任意 $j \in G_r$, 有 $\sum_{n \in C_{r+1}} p_{jn} = 1$, 实际上

$$1 = \sum_{n \in C} p_{jn} = \sum_{n \in G_{r+1}} p_{jn} + \sum_{n \notin G_{r+1}} p_{jn} = \sum_{n \in G_{r+1}} p_{jn}$$

最后一个等式是因设 $p_{in}(kd+r) > 0$, 故当 $n \notin G_{r+1}$ 时, 由

$$0 = p_{in}(kd+r+1) \geq p_{ij}(kd+r)p_{jn}$$

知

$$p_{jn} = 0$$

最后, 证明分解的唯一性, 这只需证 $\{G_r\}$ 与最初 i 的选择无关, 亦即如对某固定的 i , 状态 j 与 n 同属于某 G_r , 则对另外选定的 i' , 状态 j 与 n 同属于某 $G_{r'}$, (r 与 r' 可以不同)。实际上, 设对 i 分得 $G_0, G_1, \dots, G_{d-1}$, 对 i' 分得 $G'_0, G'_1, \dots, G'_{d-1}$, 又假定 $j, n \in G_r, i' \in G_s$, 则

当 $r \geq s$, 自 i' 出发, 只能在 $r-s, r-s+d, r-s+2d, \dots$ 等步上到达 j 或 n , 故 j 与 n 都属于 G'_{r-s} 。

当 $r < s$, 自 i' 出发, 只能在 $d-(s-r)=r-s+d, r-s+2d, \dots$ 等步上到达 j 或 n , 故 j 与 n 都属于 G'_{r-s+d} 。证毕。

例 5.14 设不可分 Markov 链的状态空间为 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

确定各状态周期并将其分解唯一互不相交的子集之和。

解: 由转移矩阵可得状态转移图, 如图 5.9 所示。易见各状态的周期 $d=3$ 。今固定状

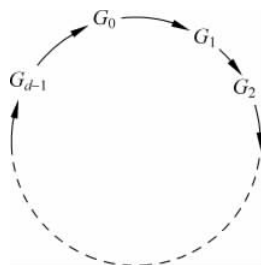


图 5.8 不可约集 I

态 $i=1$, 令

$$\begin{aligned} G_0 &= \{j: \text{对某 } k \geq 0, \text{有 } p_{1,j}(3k) > 0\} = \{1, 4, 6\}, \\ G_1 &= \{j: \text{对某 } k \geq 0, \text{有 } p_{1,j}(3k+1) > 0\} = \{3, 5\}, \\ G_2 &= \{j: \text{对某 } k \geq 0, \text{有 } p_{1,j}(3k+2) > 0\} = \{2\} \end{aligned}$$

故

$$I = G_0 \cup G_1 \cup G_2 = \{1, 4, 6\} \cup \{3, 5\} \cup \{2\}$$

此链在 I 中的运动, 如图 5.10 所示。

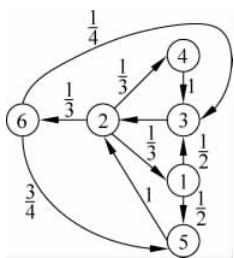


图 5.9 状态图

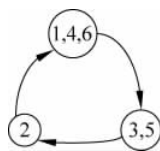


图 5.10 链在 I 中的运动

【定理 5.12】 设 $\{X_k, k \geq 0\}$ 是周期为 d 的不可约 Markov 链, 则在定理 5.11 的结论下有

(1) 如只在时刻 $0, d, 2d, \dots$ 上考虑 $\{X_k\}$, 即得一新 Markov 链, 其转移矩阵 $\mathbf{P}(d) = (p_{ij}(d))$, 对此新链, 每一 G_r 是不可约闭集, 且 G_r 中的状态是非周期的。

(2) 如原 Markov 链 $\{X_k\}$ 常返, $\{X_{kd}\}$ 也是常返。

证明: (1) 由定理 5.11 知, G_r 对 $\{X_{kd}\}$ 是闭集。其次, 对 $\forall j, n \in G_r$, 因 $\{X_k\}$ 不可约, 故存在 N 使 $p_{jk}(N) > 0$ 。由定理 5.11 知, N 只能是 kd 形, 换言之, 对 $\{X_{kd}\}$ 状态 $j \rightarrow n$, 同理 $n \rightarrow j$, 故 $j \leftrightarrow n$, 即 G_r 不可分。由定理 5.5, 存在 M , 对一切 $k \geq M$, 有 $p_{jj}(kd) > 0$, 可见, 对 $\{X_{kd}\}$ 状态 j 的周期为 1。

(2) 设 $\{X_k\}$ 常返, 任取 $j \in G_r$, 由周期的定义知, 当 $k \neq 0 \pmod{d}$ 时 $p_{jj}(k) = 0$, 因而 $f_{jj}(k) = 0$, 故

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}(kd)$$

即 j 对 $\{X_{kd}\}$ 也是常返的。

【例 5.15】 设 $\{X_k\}$ 为例 5.5 中的 Markov 链, 已知 $d=3$, 则 $\{X_{3k}, k \geq 0\}$ 的转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} & 0 & \frac{5}{12} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} & 0 & \frac{5}{12} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

求各互不相交的不可约闭集。

解: 由子链 X_{3k} 的状态转移图 5.11 知, $G_0 = \{1, 4, 6\}$, $G_1 = \{3, 5\}$, $G_2 = \{2\}$ 各形成不可约闭集, 周期为 1。

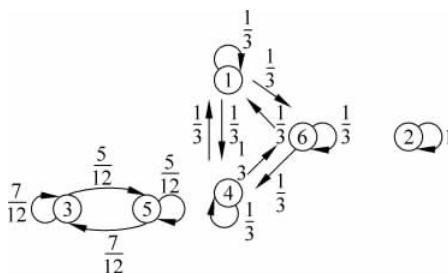


图 5.11 例 5.14 中互不相交的不可约闭集

5.3 离散时间 Markov 链的极限与平稳分布

对 $p_{ij}(k)$ 的极限性质, 讨论: ① $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k)$ 是否存在? ② $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k)$ 是否与 i 有关? 这就与 Markov 链的所谓平稳分布有密切联系。

5.3.1 $p_{ij}(k)$ 的极限

【定理 5.13】 如 j 非常返或零常返, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k) = 0, \quad \forall i \in I \quad (5.3.1)$$

证明: 由式(5.2.4)知, 对 $K < k$, 有

$$p_{ij}(k) = \sum_{l=1}^n f_{ij}(l) p_{jj}(k-l) \leq \sum_{l=1}^K f_{ij}(l) p_{jj}(k-l) + \sum_{l=K+1}^n f_{ij}(l)$$

固定 K , 先令 $k \rightarrow \infty$, 由式(5.2.4)可知, 上式右方第一项因 $p_{jj}(k) \rightarrow 0$ 而趋于 0。再令 $K \rightarrow \infty$, 第二项因 $\sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}(l) \leq 1$ 而趋于 0, 故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k) = 0$$

定理 5.13 有如下推论:

【推论 1】 有限状态的 Markov 链, 不可能全是非常返状态, 也不可能含有零状态。从而不可约的有限 Markov 链必为正常返的。

【推论 2】 如 Markov 链有一个零常返态, 则必有无限多个零常返状态。

【定理 5.14】 如 j 正常返, 周期 $d(j)$, 则对任意 i 及 $0 \leq r \leq d-1$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(kd(j) + r) = f_{ij}(r) \frac{d(j)}{m_j} \quad (5.3.2)$$

式中

$$f_{ij}(r) = \sum f_{ij}(md(j) + r), \quad 0 \leq r \leq d-1 \quad (5.3.3)$$

证明: 因为 $p_{jj}(k) = 0, k \neq 0 \pmod{d(j)}$ 。故

$$p_{ij}(kd(j) + r) = \sum_{l=0}^{kd(j)+r} f_{ij}(l) p_{jj}(kd(j) + r - l) = \sum_{m=0}^k f_{ij}(md(j) + r) p_{jj}((k-m)d(j))$$

于是,对 $1 \leq K < k$, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^K f_{ij}(md(j) + r) p_{jj}((k-m)d(j)) \leq p_{ij}(kd(j) + r) \\ & \leq \sum_{m=0}^K f_{ij}(md(j) + r) p_{jj}((k-m)d(j)) + \sum_{m=K+1}^{\infty} f_{ij}(md(j) + r) \end{aligned}$$

当先固定 N 时, 有

$$f_{ij}(r) \frac{d(j)}{m_j} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(kd(j) + r) \leq f_{ij}(r) \frac{d(j)}{m_j}$$

证毕。

【推论】 设不可约、正常返、周期 d 的 Markov 链, 其状态空间为 I , 则对一切 $i, j \in I$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(kd) = \begin{cases} \frac{d}{m_j}, & \text{如 } i \text{ 与 } j \text{ 同属于子集 } G_s \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.3.4)$$

式中, $I = \bigcup_{s=0}^{d-1} G_s$ 为定理 5.11 中所给出。

特别, 如 $d=1$, 则对一切 i, j , 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k) = \frac{1}{m_j} \quad (5.3.5)$$

证明: 在式(5.3.2)中, 取 $r=0$, 得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(kd) = f_{ij}(0) \frac{d}{m_j}$$

式中, $f_{ij}(0) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}(md)$ 。如 i 与 j 不在同一个 G_s 中, 由定理 5.11 可知, $p_{ij}(kd) = 0$ 。从而 $f_{ij}(kd) = 0$, 于是 $f_{ij}(0) = 0$ 。如 i 与 j 属于 G_s , 则 $p_{ij}(k) = 0$ (从而 $f_{ij}(k) = 0$), $k \neq 0 \pmod{d}$, 故

$$f_{ij}(0) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}(md) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}(m) = f_{ij} = 1$$

式(5.3.3)中的概率 $f_{ij}(r)$ 似与 j 有关, 实际上 $f_{ij}(r)$ 只依赖于 j 所在的子集 G_s , 即对 $\forall j, n \in G_s$, 都有 $f_{ij}(r) = f_{in}(r)$ 。

又 $\sum_{l=1}^k p_{jj}(l)$ 表示自 j 出发, 在 k 步之内返回到 j 的平均次数, 故 $\frac{1}{k} \sum_{l=1}^k p_{jj}(l)$ 表示每单位时间内再回到 j 的平均次数, 而 $\frac{1}{m_j}$ 也表示自 j 出发每单位时间内再回到 j 的平均次数, 所以应有

$$\frac{1}{k} \sum_{l=1}^k p_{jj}(l) \approx \frac{1}{m_j}$$

如果质点由 i 出发, 则要考虑自 i 出发能否到达 j 的情况, 即要考虑 f_{ij} 的大小。于是有定理 5.15。

【定理 5.15】 对任意状态 i, j , 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k p_{ij}(l) = \begin{cases} 0, & \text{如 } j \text{ 非常返或零常返} \\ \frac{f_{ij}}{m_j}, & \text{如 } j \text{ 正常返} \end{cases}$$

证: 如 j 为非常返或零常返, 由定理 5.13 知, $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k) = 0$, 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k p_{ij}(l) = 0$$

如 j 正常返、有周期 d , 并假设有 d 个数列 $\{\alpha_{kd+s}\}$, $s=0, 1, 2, \dots, d-1$, 如对每一 s , 存在 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{kd+s} = \beta_s$, 则必有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \alpha_l = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} \beta_s$$

在上式中, 令 $\alpha_{kd+s} = p_{ij}(kd+s)$, 由定理 5.14 可知, $\beta_s = f_{ij}(s) \frac{d}{m_j}$ 。于是, 得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k p_{ij}(l) = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} f_{ij}(s) \frac{d}{m_j} = \frac{1}{m_j} \sum_{s=0}^{d-1} f_{ij}(s) = \frac{f_{ij}}{m_j}$$

【推论】 如 $\{X_k\}$ 不可约、常返, 则对任意 i, k , 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k p_{ij}(l) = \frac{1}{m_j} \quad (5.3.6)$$

当 $m_j \rightarrow \infty$ 时, 则 $\frac{1}{m_j} = 0$ 。

定理 5.15 及推论指出, 当 j 正常返时, 尽管 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k)$ 不一定存在, 但其平均值的极限存在, 特别是当链不可约时, 其极限与 i 无关。在 Markov 链理论中, m_j 是一个重要的量, 定理 5.14 与 5.15 的推论及定义都给出 m_j 的计算公式, 下面通过平稳分布给出另外一种计算 m_j 的方法。

5.3.2 离散时间 Markov 链状态的遍历性与平稳分布

1. 状态的遍历性

【定义 5.12】 在 Markov 链中, 若状态 i 是非周期的正常返状态, 则称状态 i 是遍历的。

显然, 一个非周期的不可约 Markov 链, 如果有一个状态是正常返的, 则它的所有状态都是遍历的。

【定理 5.16】 若状态 i 是遍历的, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ii}(k) = \frac{1}{m_i} > 0 \quad (5.3.7)$$

若状态 i 是周期为 $d(i)$ 的正常返状态, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ii}(k) = \frac{d(i)}{m_i} \quad (5.3.8)$$

2. 平稳分布

设 $\{X_k, k \geq 0\}$ 是齐次 Markov 链, 状态空间为 I , 转移概率为 p_{ij} 。

【定义 5.13】 若齐次 Markov 链 $\{X_k, k \geq 0\}$ 的概率分布 $\{\pi_j, j \in I\}$ 满足

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} \\ \sum_{j \in I} \pi_j = 1, \quad \pi_j \geq 0 \end{cases} \quad (5.3.9)$$

称该 Markov 链的概率分布为平稳分布。

由定义知,若初始概率分布 $\{p_j, j \in I\}$ 是平稳分布,则由定理 5.1,有

$$\begin{aligned} p_j(1) &= P(X_1 = j) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij} = p_j \\ p_j(2) &= P(X_2 = j) = \sum_{i \in I} p_i(1) p_{ij} = p_j \end{aligned}$$

根据归纳法可得

$$p_j(k) = P(X_k = j) = \sum_{i \in I} p_i(k-1) p_{ij} = \sum_{i \in I} p_i p_{ij} = p_j$$

综合上述有

$$p_j = p_j(1) = \cdots = p_j(k)$$

这说明,若初始概率分布是平稳分布,则对一切正整数 k ,绝对概率 $p_j(k)$ 等于初始概率 p_j ,故它们同样是平稳分布。值得注意的是,对平稳分布 $\{\pi_j, j \in I\}$,有

$$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}(k) \quad (5.3.10)$$

事实上,因为

$$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{n \in I} \pi_n p_{ni} \right) p_{ij} = \sum_{n \in I} \pi_n \left(\sum_{i \in I} p_{ni} p_{ij} \right) = \sum_{n \in I} \pi_n p_{nj}(2)$$

如此类推可得式(5.3.10)。

【定理 5.17】 不可约非周期 Markov 链是正常返的充要条件是存在平稳分布,且此平稳分布就是极限分布 $\left\{ \frac{1}{m_j}, j \in I \right\}$ 。

证明: 先证充分性。设 $\{\pi_j, j \in I\}$ 是平稳分布,于是由式(5.3.10),有

$$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}(k)$$

由于 $\sum_{j \in I} \pi_j = 1$ 和 $\pi_j \geq 0$,得

$$\pi_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}(k) = \sum_{i \in I} \pi_i \left(\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k) \right) = \sum_{i \in I} \pi_i \left(\frac{1}{m_j} \right) = \frac{1}{m_j}$$

因为 $\sum_{i \in I} \pi_i = 1$,故至少存在一个 $\pi_n > 0$,即 $\frac{1}{m_n} > 0$,于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{in}(k) = \frac{1}{m_n} > 0$$

因 n 为正常返态,故该 Markov 链是正常返的。

再证必要性。设 Markov 链是正常返的,于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{in}(k) = \frac{1}{m_n} > 0$$

由 C-K 方程,对任意正数 N ,有

$$p_{ij}(k+m) = \sum_{n \in I} P_{in}(m) p_{nj}(k) \geq \sum_{n=0}^N p_{in}(m) p_{nj}(k)$$

令 $m \rightarrow \infty$ 取极限,得

$$\frac{1}{m_j} \geq \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{m_n} \right) p_{nj}(k)$$

再令 $N \rightarrow \infty$ 取极限,得

$$\frac{1}{m_j} \geq \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{m_n} \right) p_{nj}(k) = \sum_{n \in I} \left(\frac{1}{m_n} \right) p_{nj}(k) \quad (5.3.11)$$

下面要进一步证明等号成立,由

$$1 = \sum_{n \in I} p_{in}(k) \geq \sum_{n=0}^N p_{in}(k)$$

先令 $k \rightarrow \infty$, 再令 $N \rightarrow \infty$ 取极限, 得

$$1 \geq \sum_{n \in I} \left(\frac{1}{m_n} \right)$$

将式(5.3.11)对 j 求和, 并假定对某个 j , 式(5.3.11)为严格成立, 则

$$1 \geq \sum_{j \in I} \frac{1}{m_j} > \sum_{j \in I} \left(\sum_{n \in I} \frac{1}{m_n} p_{nj}(k) \right) = \sum_{n \in I} \left(\frac{1}{m_n} \sum_{j \in I} p_{nj}(k) \right) = \sum_{n \in I} \frac{1}{m_n}$$

于是有自相矛盾的结果:

$$\sum_{j \in I} \frac{1}{m_j} > \sum_{n \in I} \frac{1}{m_n}$$

故有

$$\frac{1}{m_j} = \sum_{n \in I} \frac{1}{m_n} p_{nj}(k) \quad (5.3.12)$$

再令 $k \rightarrow \infty$ 取极限, 得

$$\frac{1}{m_j} = \sum_{n \in I} \frac{1}{m_n} (\lim_{k \rightarrow \infty} p_{nj}(k)) = \frac{1}{m_j} \sum_{n \in I} \frac{1}{m_n}$$

故有

$$\sum_{n \in I} \frac{1}{m_n} = 1$$

由式(5.3.12)知, $\left\{ \frac{1}{m_j}, j \in I \right\}$ 是平稳分布, 证毕。

【推论 1】 有限状态的不可约非周期 Markov 链必存在平稳分布。

【推论 2】 若不可约 Markov 链的所有状态是非常返或零常返的, 则不存在平稳分布。

证 用反证法。假设 $\{\pi_j, j \in I\}$ 是平稳分布, 则由式(5.3.10), 有

$$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}(k)$$

但是, 根据定理 5.13, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k) = 0$$

显然 $\sum_{j \in I} \pi_j = 0$, 与平稳分布 $\sum_{j \in I} \pi_j = 1$ 矛盾, 证毕。

【推论 3】 若 $\{\pi_j, j \in I\}$ 是不可约非周期 Markov 链的平稳分布, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_j(k) = \frac{1}{m_j} = \pi_j \quad (5.3.13)$$

证明: 根据 $p_j(k) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(k)$ 及 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k) = \frac{1}{m_j}$, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_j(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(k) = \frac{1}{m_j} \sum_{i \in I} p_i = \frac{1}{m_j}$$

由定理 5.17 知, $\frac{1}{m_j} = \pi_j$, 证毕。

例 5.16 设 Markov 链的转移概率矩阵为

$$P = \begin{Bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{Bmatrix}$$

求 Markov 链的平稳分布及各状态的平均返回时间。

解 因 Markov 链是不可约的非周期有限状态,所以平稳分布存在,由式(5.3.9)得方程组

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.7\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.1\pi_3 \\ \pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.8\pi_2 + 0.0\pi_3 \\ \pi_3 = 0.1\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.8\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

解上述方程组得平稳分布为

$$\pi_1 = 0.333, \quad \pi_2 = 0.333, \quad \pi_3 = 0.333$$

由定理 5.17,得各状态的平均返回时间分别为

$$m_1 = \frac{1}{\pi_1} = 3, \quad m_2 = \frac{1}{\pi_2} = 3, \quad m_3 = \frac{1}{\pi_3} = 3$$

例 5.17 设 Markov 链具有状态空间 $I = \{0, 1, \dots\}$, 转移概率为 $p_{i+1} = p_i, p_i = r_i, p_{i-1} = q_i (i \geq 0)$, 其中 $p_i, q_i > 0, p_i + r_i + q_i = 1$, 称这种 Markov 链为生灭链,它是不可约的。记

$$a_0 = 1, \quad a_j = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{j-1}}{q_0 q_1 \cdots q_j}, \quad j \geq 1$$

试证此 Markov 链存在平稳分布的充要条件为 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty$ 。

证 由式(5.3.9),有

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 r_0 + \pi_1 q_1 \\ \pi_j = \pi_{j-1} p_{j-1} + \pi_j r_j + \pi_{j+1} r_{j+1}, \quad j \geq 1 \\ p_j + r_j + q_j = 1 \end{cases}$$

于是,有递推关系

$$\begin{cases} q_1 \pi_1 - p_0 \pi_0 = 0 \\ q_{j+1} \pi_{j+1} - p_j \pi_j = q_j \pi_j - p_{j-1} \pi_{j-1} \end{cases}$$

解之,得

$$\pi_j = \frac{p_{j-1} \pi_{j-1}}{q_j}, \quad j \geq 0$$

所以

$$\pi_j = \frac{p_{j-1} \pi_{j-1}}{q_j} = \cdots = \frac{p_0 p_{j-1}}{q_0 \cdots q_j} \pi_0 = a_j \pi_0$$

对 j 求和得

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

由此可知平稳分布存在的充要条件是 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty$, 此时

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} a_j}, \quad \pi_j = \frac{a_j}{\sum_{j=0}^{\infty} a_j}, \quad j \geq 1$$

5.4 连续时间 Markov 链

这里讨论时间连续、状态离散的 Markov 过程。

5.4.1 连续时间 Markov 链与状态转移概率

设非负整数值的连续时间随机过程为 $\{X(t), t \geq 0\}$ 。

【定义 5.14】 设随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的时间连续、状态离散的状态空间为 $I = \{i_k, k \geq 0\}$, 若对任意 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1}$ 及 $i_1, i_2, \cdots, i_{k+1} \in I$, 有

$$\begin{aligned} P\{X(t_{k+1}) = i_{k+1} \mid X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \cdots, X(t_k) = i_k\} \\ = P\{X(t_{k+1}) = i_{k+1} \mid X(t_k) = i_k\} \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为连续时间 Markov 链。

由定义知, 连续时间 Markov 链是具有 Markov 性的随机过程, 即过程在已知现在时刻 t_k 及一切过去时刻所处状态的条件下, 将来时刻 t_{k+1} 的状态只依赖于现在的状态而与过去无关。

如果 Markov 链在 s 时刻处于状态 i , 经过时间 t 后转移到状态 j 的转移概率为

$$P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\} = p_{ij}(s, t) \quad (5.4.2)$$

【定义 5.15】 若式(5.4.2)的转移概率与 s 无关, 则称连续时间 Markov 链具有平稳的或齐次的转移概率, 此时转移概率简记为

$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(t) \quad (5.4.3)$$

其转移概率矩阵简记为 $\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t)), (i, j \in I, t \geq 0)$ 。

以下的讨论均假定连续时间 Markov 链具有齐次转移概率, 简称为齐次 Markov 过程。

齐次 Markov 过程的转移概率具有如下性质:

$$\text{性质 1} \quad p_{ij}(t) \geq 0 \quad (5.4.4)$$

$$\text{性质 2} \quad \sum_{j \in I} p_{ij}(t) = 1 \quad (5.4.5)$$

$$\text{性质 3} \quad p_{ij}(t+s) = \sum_{n \in I} p_{in}(t) p_{nj}(s) \quad (5.4.6)$$

其中性质 3 即为连续时间齐次 Markov 链的卡普曼—柯尔莫哥洛夫方程(简称 C-K 方程)。

证明: 性质 1 与 2 由概率及 $p_{ij}(t)$ 的定义易知, 下面只证性质 3。由全概率公式及 Markov 性, 得

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+s) &= P\{X(t+s) = j \mid X(0) = i\} \\ &= \sum_{n \in I} P\{X(t+s) = j, X(t) = n \mid X(0) = i\} \\ &= \sum_{n \in I} P\{X(t) = n \mid X(0) = i\} P\{X(t+s) = j \mid X(t) = n\} \\ &= \sum_{n \in I} P\{X(t) = n \mid X(0) = i\} P\{X(s) = j \mid X(0) = n\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n \in I} p_{in}(t) p_{nj}(s)$$

证毕。

对于转移概率 $p_{ij}(t)$, 一般还假定它满足

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (5.4.7)$$

称式(5.4.7)为正则性条件。正则性条件说明, 过程刚进入某状态不可能立即又跳跃到另一状态。这正好说明一个物理系统要在有限时间内发生无限多次跳跃, 从而消耗无穷多的能量这是不可能的。后面的讨论, 均假定齐次 Markov 过程满足正则性条件。

1. 初始分布与绝对分布

【定义 5.16】 对于任一 $t \geq 0$, 记

$$p_j(t) = P\{X(t) = j\} \quad (5.4.8)$$

$$p_j = p_j(0) = P\{X(0) = j\}, \quad j \in I \quad (5.4.9)$$

分别称 $\{p_j(t), j \in I\}$ 和 $\{p_j, j \in I\}$ 为齐次 Markov 过程的绝对概率分布和初始概率分布。

齐次 Markov 过程的绝对概率及有限维概率分布具有如下性质:

性质 1 $p_j(t) \geq 0$ (5.4.10)

性质 2 $\sum_{j \in I} p_j(t) = 1$ (5.4.11)

性质 3 $p_j(t) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(t)$ (5.4.12)

性质 4 $p_j(t + \tau) = \sum_{i \in I} p_i(t) p_{ij}(\tau)$ (5.4.13)

性质 5 $P\{X(t_1) = i_1, \dots, X(t_k) = i_k\} = \sum_{i \in I} p_i p_{i i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{k-1} i_k}(t_k - t_{k-1})$ (5.4.14)

2. 状态停留时间

连续时间 Markov 链具有时间上的一阶记忆性, 其体现在 Markov 链在某一状态具有一定的停留时间。

【定理 5.18】 对于连续时间 Markov 链 $\{X(t), t \geq 0\}$, $X(t)$ 停留在某一给定状态的时间是一个指数型随机变量。

证明: 设 τ_i 为过程在转移到另一状态之前停留在状态 i 的时间, $P\{\tau_i > t\}$ 为停留时间超过 t 秒的概率。设过程已在 s 个单位时间中未离开状态 i (即未发生转移), 则继续停留 t 个单位时间的概率为

$$P\{\tau_i > s + t \mid \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t + s \mid X(s') = i, 0 \leq s' \leq s\} \quad (5.4.15)$$

根据 Markov 性, 可将该过程视作从 s 时刻由 i 状态重新开始的一个过程, 该过程与 $s' < s$ 的状态无关。因此, 有

$$P\{\tau_i > s + t \mid \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\} \quad (5.4.16)$$

可见, 只有随机变量 τ_i 服从指数分布, 才具有无记忆性。即

$$P\{\tau_i > t\} = e^{-v_i t} \quad (5.4.17)$$

式中, $1/v_i$ 为过程在状态 i 的平均停留时间。一般来说, 状态不同, 平均停留时间不同。

【定义 5.17】 当 $v_i = \infty$ 时, 称状态 i 为瞬时状态; 若 $v_i = 0$, 称状态 i 为吸收状态。

在瞬时状态,过程一旦进入此状态立即就离开;在吸收状态,过程一旦进入此状态就永远不再离开了。实际上,一个连续时间 Markov 链是按照离散时间 Markov 链从一个状态转移到另一个状态的,但在转移下一个状态之前,它在各个状态停留的时间服从指数分布。此外,在状态 i 过程停留的时间与下一个到达的状态必须是相互独立的随机变量。因为若下一个到达的状态依赖于 τ_i ,那么过程处于状态 i 已有多久的信息与下一个状态的预报有关,这就与 Markov 性的假定相矛盾。

例 5.18 试证明泊松过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为连续时间齐次 Markov 链。

证明: 先证泊松过程具有 Markov 性,再证齐次性。由泊松过程的定义知,它是独立增量过程,且 $X(0)=0$ 。对任意 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1}$,有

$$\begin{aligned} P\{X(t_{k+1}) = i_{k+1} \mid X(t_1) = i_1, \dots, X(t_k) = i_k\} \\ = P\{X(t_{k+1}) - X(t_k) = i_{k+1} - i_k \mid X(t_1) - X(0) = i_1, \\ X(t_2) - X(t_1) = i_2 - i_1, \dots, X(t_k) - X(t_{k-1}) = i_k - i_{k-1}\} \\ = P\{X(t_{k+1}) - X(t_k) = i_{k+1} - i_k\} \end{aligned}$$

又,因为

$$\begin{aligned} P\{X(t_{k+1}) = i_{k+1} \mid X(t_k) = i_k\} &= P\{X(t_{k+1}) - X(t_k) = i_{k+1} - i_k \mid X(t_k) - X(0) = i_k\} \\ &= P\{X(t_{k+1}) - X(t_k) = i_{k+1} - i_k\} \end{aligned}$$

所以

$$P\{X(t_{k+1}) = i_{k+1} \mid X(t_1) = i_1, \dots, X(t_k) = i_k\} = P\{X(t_{k+1}) = i_{k+1} \mid X(t_k) = i_k\}$$

即泊松过程是一个连续时间 Markov 链。

对于齐次性的证明,当 $j \geq i$ 时,由泊松过程的定义,得

$$P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\} = P\{X(s+t) - X(s) = j - i\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

当 $j < i$ 时,由于过程的增量只取非负整数值,故 $p_{ij}(s, t) = 0$ 。

所以

$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i \\ 0, & j < i \end{cases}$$

即转移概率只与 t 有关,泊松过程具有齐次性。

5.4.2 连续时间 Markov 链状态微分方程

对于连续齐次 Markov 链,转移概率 $p_{ij}(t)$ 的求解一般较为复杂。现讨论 $p_{ij}(t)$ 的可微性及 $p_{ij}(t)$ 所满足的状态微分方程。

【定理 5.19】 设齐次 Markov 过程满足的正则性条件为式(5.4.7),则对于任意固定的 $i, j \in I$, $p_{ij}(t)$ 是 t 的一致连续函数。

证明: 设 $\tau > 0$, 由齐次 Markov 过程的性质,得

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+\tau) - p_{ij}(t) &= \sum_{r \in I} p_{ir}(\tau) p_{rj}(t) - p_{ij}(t) = p_{ii}(\tau) p_{ij}(t) - p_{ij}(t) + \sum_{r \neq i} p_{ir}(\tau) p_{rj}(t) \\ &= -[1 - p_{ii}(\tau)] p_{ij}(t) + \sum_{r \neq i} p_{ir}(\tau) p_{rj}(t) \end{aligned}$$

故有

$$p_{ij}(t+\tau) - p_{ij}(t) \geq -[1 - p_{ii}(\tau)] p_{ij}(t) \geq -[1 - p_{ii}(\tau)],$$

$$p_{ij}(t+\tau) - p_{ij}(t) \leq \sum_{r \neq i} p_{ir}(\tau) p_{rj}(t) \leq \sum_{r \neq i} p_{ir}(\tau) = 1 - p_{ii}(\tau)$$

因此

$$|p_{ij}(t+\tau) - p_{ij}(t)| \leq 1 - p_{ii}(\tau)$$

对于 $\tau < 0$, 同样有

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) - p_{ij}(t+\tau) &= \sum_{r \in I} p_{ir}(-\tau) p_{rj}(t+\tau) - p_{ij}(t+\tau) \\ &= p_{ii}(-\tau) p_{ij}(t+\tau) - p_{ij}(t+\tau) + \sum_{r \neq i} p_{ir}(-\tau) p_{rj}(t+\tau) \\ &= -[1 - p_{ii}(-\tau)] p_{ij}(t+\tau) + \sum_{r \neq i} p_{ir}(-\tau) p_{rj}(t+\tau) \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) - p_{ij}(t+\tau) &\geq -[1 - p_{ii}(-\tau)] p_{ij}(t+\tau) \geq -[1 - p_{ii}(-\tau)], \\ p_{ij}(t) - p_{ij}(t+\tau) &\leq \sum_{r \neq i} p_{ir}(-\tau) p_{rj}(t+\tau) \leq \sum_{r \neq i} p_{ir}(-\tau) = 1 - p_{ii}(-\tau) \end{aligned}$$

因此

$$|p_{ij}(t) - p_{ij}(t+\tau)| \leq 1 - p_{ii}(-\tau)$$

综上所述,一般地有

$$|p_{ij}(t) - p_{ij}(t+\tau)| \leq 1 - p_{ii}(|\tau|)$$

由正则性条件知

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} |p_{ij}(t+\tau) - p_{ij}(t)| = 0$$

即 $p_{ij}(t)$ 关于 t 是一致连续的,证毕。

【定理 5.20】 设 $p_{ij}(t)$ 是齐次 Markov 过程的转移概率,则下列极限存在

$$(1) \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(\tau)}{\tau} = v_i = q_{ii}, \text{但可能为 } +\infty \quad (5.4.18)$$

$$(2) \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\tau)}{\tau} = q_{ij} < \infty, i \neq j \quad (5.4.19)$$

称 $q_{ij}(t)$ 为齐次 Markov 过程从状态 i 到状态 j 的转移概率或跳跃强度。定理中的极限概率意义为: 在长为 τ 的时间区间内,过程从状态 i 转移到另一其他状态的转移概率为 $1 - p_{ii}(\tau)$, 等于 $q_{ii}(\tau)$ 加上一个比 τ 高阶的无穷小量; 而从状态 i 转移到状态 j 的概率 $p_{ij}(\tau)$, 等于 $q_{ij}\tau$ 加上一个比 τ 高阶的无穷小量。

【定理 5.21】 设 $q_{ii} < \infty$, 则对任意 $t > 0$ 及 $j \in I, p'_{ij}(t)$ 存在且连续, 而且满足

$$(1) p'_{ij}(s+t) = \sum_{l \in I} p'_{il}(t) p_{lj}(s), t, s > 0 \quad (5.4.20)$$

$$(2) \sum_{l \in I} p'_{il}(t) = 0 \quad (5.4.21)$$

$$(3) \sum_{l \in I} |p'_{il}(t)| < 2q_{ii} \quad (5.4.22)$$

【定理 5.22】 对齐次 Markov 过程, 有

$$q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij} < \infty$$

证明: 由齐次 Markov 过程转移概率的性质, 有

$$\sum_{j \in I} p_{ij}(\tau) = 1, \quad \text{即} \quad 1 - p_{ii}(\tau) = \sum_{j \neq i} p_{ij}(\tau)$$

由于求和是在有限集中进行,故有

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}(\tau)}{\tau} = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

即

$$q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij} \quad (5.4.23)$$

证毕。

对于状态空间无限的齐次 Markov 过程,一般只有

$$q_{ii} \geq \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

若连续时间齐次 Markov 链具有有限状态空间 $I = \{0, 1, \dots, k\}$, 则其转移密度可构成矩阵

$$Q = \begin{Bmatrix} -q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0k} \\ q_{10} & -q_{11} & \cdots & q_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{k0} & q_{k1} & \cdots & -q_{kk} \end{Bmatrix} \quad (5.4.24)$$

称为连续时间 Markov 链的密度矩阵。由式(5.4.23)知, Q 矩阵的每一行元素之和为 0, 对角元素为负或 0, 其余 $i \neq j$ 时 $q_{ij} \geq 0$ 。

利用 Q 矩阵可以推出任意时间间隔 t 的转移概率所满足的方程组, 从而可以求解转移概率。

【定理 5.23】 (柯尔莫哥洛夫向后方程) 对于 q_{in} , 假设 $\sum_{n \neq i} q_{in} = q_{ii}$, 则对一切 i, j 及 $t \geq 0$, 有

$$p'_{ij}(t) = \sum_{n \neq i} q_{in} p_{nj}(t) - q_{ii} p_{ij}(t) \quad (5.4.25)$$

证 若式(5.4.25)成立, 对 $\tau > 0$, 有

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t+\tau) - p_{ij}(t)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[-\frac{1 - p_{ii}(\tau)}{\tau} p_{ij}(t) + \sum_{n \neq i} \frac{p_{in}(\tau)}{\tau} p_{nj}(t) \right]$$

现估计

$$\begin{aligned} & \left| \frac{p_{ij}(t+\tau) - p_{ij}(t)}{\tau} + \frac{1 - p_{ii}(\tau)}{\tau} p_{ij}(t) - \sum_{n \neq i, n \leq N} \frac{p_{in}(\tau)}{\tau} p_{nj}(t) \right| \\ &= \left| \sum_{n \neq i, n > N} \frac{p_{in}(\tau)}{\tau} p_{nj}(t) \right| < \left| \sum_{n \neq i, n > N} \frac{p_{in}(\tau)}{\tau} \right| \\ &= \frac{1 - p_{ii}(\tau)}{\tau} - \sum_{n \neq i, n \leq N} \frac{p_{in}(\tau)}{\tau} \end{aligned}$$

式中, N 为任意整数, 当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 由定理 5.19 与定理 5.20, 得

$$\left| p'_{ij}(t) + q_{ii} p_{ij}(t) - \sum_{n \neq i, n \leq N} q_{in} p_{nj}(t) \right| \leq q_{ii} - \sum_{n \neq i, n \leq N} q_{in}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由式(5.4.23)得知, 式(5.2.25)成立。

【定理 5.24】 (柯尔莫哥洛夫向前方程) 在正则条件

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{nj}(\tau)}{\tau} = q_{nj}$$

下,对 n 一致成立,则有

$$p'_{ij}(t) = \sum_{n \neq j} p_{in}(t)q_{nj} - p_{ij}(t)q_{jj} \quad (5.4.26)$$

利用方程组(5.4.25)或(5.4.26)及初始条件

$$\begin{cases} p_{ij}(0) = 1, \\ p_{ij}(0) = 0, \quad i \neq j \end{cases}$$

可以解得 $p_{ij}(t)$ 。柯尔莫哥洛夫向后和向前方程虽然形式不同,但它们所求得解 $p_{ij}(t)$ 是相同的。在实际应用中,当固定最后所处状态 j ,研究 $p_{ij}(t)$ 时($i=0,1,\dots$),采用向后方程(5.2.25)较方便;当固定状态 i ,研究 $p_{ij}(t)$ 时($j=0,1,\dots$),则采用向前方程较方便。

向后方程和向前方程可以写成矩阵形式

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t) \quad (5.4.27)$$

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q} \quad (5.4.28)$$

式中, $\mathbf{Q}$ 矩阵为

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

矩阵 $\mathbf{P}'(t)$ 的元素为矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 的元素的倒数,而

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

这样,连续时间 Markov 链的转移概率的求解问题就是矩阵微分方程的求解问题,其转移概率由其转移速率矩阵决定。

特别,若 $\mathbf{Q}$ 是一个有限维矩阵,则式(5.4.27)和式(5.4.28)的解为

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q}t)^j}{j!} \quad (5.4.29)$$

【定理 5.25】 齐次 Markov 过程在 t 时刻处于状态 $j \in I$ 的绝对概率 $p_j(t)$ 满足的方程为

$$p'_j(t) = -p_j(t)q_{jj} + \sum_{n \neq j} p_n(t)q_{nj} \quad (5.4.30)$$

证:将向前方程(5.4.26)两边乘以 p_i 求和,得

$$\sum_{i \in I} p_i p'_{ij}(t) = \sum_{i \in I} (-p_i p_{ij}(t)q_{jj}) + \sum_{i \in I} \sum_{n \neq j} p_i p_{in}(t)q_{nj}$$

故

$$p'_j(t) = -p_j(t)q_{jj} + \sum_{n \neq j} p_n(t)q_{nj}$$

证毕。

与离散马尔可夫链类似,讨论转移概率 $p_{ij}(t)$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时的极限分布与平稳分布的有关性质。

【定义 5.18】 设 $p_{ij}(t)$ 为连续时间 Markov 链的转移概率,若存在时刻 s 和 t ,使得

$$p_{ij}(s) > 0, \quad p_{ji}(t) > 0$$

则称状态 i 与 j 是互通的。若所有状态都是互通的,则称此 Markov 链为不可约的。

关于状态的常返性与非常返性等概念与离散时间 Markov 链类似,在此不一一重复。

下面我们不加证明地给出转移概率 $p_{ij}(t)$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时的性质及其平稳分布的关系。

【定理 5.26】 设连续时间 Markov 链是不可约的,则

(1) 若它是正常返的,则极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)$ 存在且等于 $\pi_j > 0, i \in I$ 。这里 π_j 是方程组

$$\begin{cases} \pi_j q_{jj} = \sum_{n \neq j} \pi_n q_{nj} \\ \sum_{j \in I} \pi_j = 1 \end{cases} \quad (5.4.31)$$

的唯一非负解。此时,称 $\{\pi_j, j \in I\}$ 是该过程的平稳分布,并且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j \quad (5.4.32)$$

(2) 若它是零常返的或非常返的,则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = 0, \quad i, j \in I \quad (5.4.33)$$

在实际应用中,有些问题可以用柯尔莫哥洛夫方程直接求解,有些问题虽不能直接求解,但可以用方程(5.4.31)求解。

【例 5.19】 设两个状态的连续时间 Markov 链,在转移到状态 1 之前,链在状态 0 停留的时间是参数为 λ 的指数变量,而在回到状态 0 之前,它停留在状态 1 的时间是参数为 μ 的指数变量。显然该链是一个齐次 Markov 过程,其状态转移概率为

$$\begin{cases} p_{01}(\tau) = \lambda\tau + o(\tau) \\ p_{10}(\tau) = \mu\tau + o(\tau) \end{cases}$$

求转移概率 $P_{ij}(t) (i, j = 0, 1)$

解:

$$\begin{aligned} q_{00} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - p_{00}(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{01}(\tau)}{\tau} = \frac{d}{d\tau} p_{01}(\tau) \big|_{\tau=0} = \lambda = q_{01} \\ q_{11} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - p_{11}(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{p_{10}(\tau)}{\tau} = \frac{d}{d\tau} p_{10}(\tau) \big|_{\tau=0} = \mu = q_{10} \end{aligned}$$

由柯尔莫哥洛夫向前方程及 $p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$, 得

$$p'_{00}(t) = \mu p_{01}(t) - \lambda p_{00}(t) = -(\lambda + \mu) p_{00}(t) + \mu$$

因此

$$e^{(\lambda+\mu)t} [p'_{00}(t) + (\lambda + \mu) p_{00}(t)] = \mu e^{(\lambda+\mu)t}$$

或

$$\frac{d}{dt} [e^{(\lambda+\mu)t} p_{00}(t)] = \mu e^{(\lambda+\mu)t}$$

于是

$$e^{(\lambda+\mu)t} p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{(\lambda+\mu)t} + c$$

由于 $p_{00}(0) = 1$, 可得 $c = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$, 则

$$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

若记 $\lambda_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \mu_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, 则

$$p_{00}(t) = \mu_0 + \lambda_0 e^{-(\lambda + \mu)t}$$

类似地由向方程

$$p'_{01}(t) = \lambda p_{00}(t) - \mu p_{01}(t)$$

可得

$$p_{01}(t) = \lambda_0 [1 - e^{-(\lambda + \mu)t}]$$

由对称性知

$$p_{11}(t) = \lambda_0 + \mu_0 e^{-(\lambda + \mu)t}$$

$$p_{10}(t) = \mu_0 [1 - e^{-(\lambda + \mu)t}]$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{00}(t) = \mu_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{10}(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{11}(t) = \lambda_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{01}(t)$$

可见, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $p_{ij}(t)$ 的极限存在且与 i 无关。由定理 5.26 知, 平稳分布为

$$\pi_0 = \mu_0, \quad \pi_1 = \lambda_0$$

若取初始分布为平稳分布, 即

$$P\{X(0) = 0\} = p_0 = \mu_0, \quad P\{X(0) = 1\} = p_1 = \lambda_0$$

则过程在时刻 t 的绝对概率分布为

$$\begin{aligned} p_0(t) &= p_0 p_{00}(t) + p_1 p_{10}(t) \\ &= \mu_0 [\lambda_0 e^{-(\lambda + \mu)t} + \mu_0] + \lambda_0 \mu_0 [1 - e^{-(\lambda + \mu)t}] = \mu_0 \\ p_1(t) &= p_0 p_{01}(t) + \lambda_0 p_{11}(t) \\ &= \lambda_0 \mu_0 [1 - e^{-(\lambda + \mu)t}] + \lambda_0 [\lambda_0 + \mu_0 e^{-(\lambda + \mu)t}] = \lambda_0 \end{aligned}$$

5.4.3 生灭过程

连续时间 Markov 链的一类重要特殊情形是生灭过程, 它的特征是在很短的时间内, 系统的状态只能从 i 转移到状态 $i-1$ 或 $i+1$ 或保持不变。

【定义 5.19】 设齐次 Markov 过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的状态空间为 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$, 转移概率为 $p_{ij}(t)$, 如果

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(\tau) = \lambda_i \tau + o(\tau), & \lambda_i > 0 \\ p_{i,i-1}(\tau) = \mu_i \tau + o(\tau), & \mu_i > 0, \mu_0 = 0 \\ p_{ii}(\tau) = 1 - (\lambda_i + \mu_i) \tau + o(\tau) \\ p_{ij}(\tau) = o(\tau), & |i - j| \geq 2 \end{cases}$$

则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为生灭过程。 λ_i 为出生率, μ_i 为死亡率。

若 $\mu_i = i\lambda, \mu_i = i\mu$, (λ, μ 是正常数), 则称 $\{X_i, t \geq 0\}$ 为线性生灭过程。

若 $\mu_i \equiv 0$, 则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为纯生过程; 若 $\lambda_i \equiv 0$, 则 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为纯灭过程。

生灭过程可做如下概率解释: 若以 $X(t)$ 表示一个生物群体在 t 时刻的大小, 则在很短的时间 τ 内 (不计高阶无穷小), 群体变化有 3 种可能, 状态由 i 变到 $i+1$, 即增加一个个体,

其概率为 $\lambda_i \tau$; 状态由 i 变到 $i-1$, 即减少一个个体, 其概率为 $\mu_i \tau$; 群体大小不增不减, 其概率为 $1 - (\lambda_i + \mu_i) \tau$ 。

由定理 5.20, 得

$$q_{ii} = - \frac{d}{d\tau} p_{ii}(\tau) \Big|_{\tau=0} = \lambda_i + \mu_i, \quad i \geq 0$$

$$q_{ij} = \frac{d}{d\tau} p_{ij}(\tau) \Big|_{\tau=0} = \begin{cases} \lambda_i, & j = i+1, & i \geq 0 \\ \mu_i, & j = i-1, & i \geq 1 \\ 0, & |j-i| \geq 2, & i \in I \end{cases}$$

故柯尔莫哥洛夫向前方程为

$$p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_{ij}(t) + \mu_{j+1} p_{i,j+1}(t), \quad i, j \in I$$

柯尔莫哥洛夫向前方程为

$$p'_{ij}(t) = \mu_i p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t), \quad i, j \in I$$

对平稳分布, 有

$$\begin{cases} \lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1, \\ (\lambda_j + \mu_j) \pi_j = \lambda_{j-1} \pi_{j-1} + \mu_{j+1} \pi_{j+1}, & j \geq 1 \end{cases}$$

逐步递推得

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0, \quad \pi_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \pi_1 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \pi_0, \quad \dots$$

$$\pi_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \pi_{j-1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \pi_0, \quad \dots$$

再利用 $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$, 得平稳分布

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \right)^{-1}$$

$$\pi_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \right)^{-1}, \quad j \geq 1 \quad (5.4.34)$$

上式也指出平稳分布存在的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} < \infty$$

5.5 实例与仿真

本节基于 Markov 链原理, 综合考虑大气传播环境和地面移动环境对卫星信道统计特性影响, 建立卫星信道 Markov 模型并进行 Simulink 仿真实现。

5.5.1 卫星信道 Markov 模型

1. 大气传播环境下卫星信道模型

在卫星通信中, 大气气体、云雾、降雨等对信号都会造成衰减。卫星接收信号的包络在

受大气环境(如云雾、降雨等)影响时服从高斯分布,此时接收信号包络的概率密度函数为

$$f_w(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \exp\left(-\frac{(r-\mu_w)^2}{2\sigma_w^2}\right) \quad (5.5.1)$$

式中, $f_w(r)$ 是大气环境影响下信号包络的概率密度函数, μ_w 为信号包络的均值, σ_w^2 为信号包络的方差。表 5.1 给出了 4 种天气条件下信号包络的概率分布参数。

表 5.1 不同条件下信号包络的概率分布参数

天气状况	μ_w	σ_w^2
阴天	0.44	0.00041
积云	0.346	0.00272
雷雨	0.436	0.01386
小雨	0.483	0.00003

由此建立的大气传播环境影响下卫星信道模型,如图 5.12 所示。此模型中, $C(t)$ 表示大气传播环境影响下信道的乘性干扰。图中高斯分布均值为零,方差为 σ_w^2 。该高斯分布与实常数产生的 μ_w 相加后构成的分布为高斯分布,其均值仍为 μ_w 、方差仍为 σ_w^2 。 μ_w 和 σ_w^2 的值根据天气状况不同取表 5.1 中给定的数值。AWGN 表示信道的加性高斯白噪声。

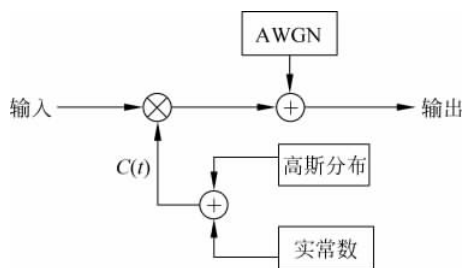


图 5.12 大气传播环境下卫星信道模型

2. 地面移动环境下卫星信道 Markov 模型

在地面移动环境中,接收信号主要受地球表面各种障碍物的遮挡而产生的阴影衰落,以及障碍物阻碍引起的信号反射、散射或绕射等产生的多径衰落。为了能够更加真实地反映实际的移动卫星通信环境,将地面移动传输环境划分为农村、郊区、城市三种典型物理环境。据此,按直射信号被阻挡的程度和阴影衰落的程度将信道状态划分为无阴影状态、轻度阴影状态和重度阴影状态。

无阴影状态描述的是环境简单、遮挡物较少的农村环境。信号传播不受任何阴影衰落的影响,终端接收信号是多径信号分量与直射信号分量的合成。此时接收信号包络服从莱斯分布,其概率密度函数为

$$f_1(r) = \frac{r}{\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{r^2 + z_1^2}{2\sigma_1^2}\right) I_0\left(\frac{rz_1}{\sigma_1^2}\right) \quad (5.5.2)$$

式中, z_1 表示直射分量的幅度, $2\sigma_1^2$ 是多径分量的平均功率, $I_0(x)$ 是第一类修正零阶贝塞尔函数。

轻度阴影状态描述的是环境相对复杂、存在障碍物的郊区环境。信号在传播过程中会

受树木、建筑等障碍物的阻挡发生多径衰落和阴影衰落,终端接收信号为受阴影衰落作用的多径信号分量和直射信号分量。此时接收信号包络可看作是莱斯分布和对数正态分布的乘积,其概率密度函数为

$$f_2(r) = \frac{r}{\sigma_2^2 \sigma_{\mu^2} \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{s^3} \exp\left(-\frac{(r/s)^2 + z_2^2}{2\sigma_2^2} - \frac{(\ln s - \mu_{\mu^2})^2}{2\sigma_{\mu^2}^2}\right) I_0\left(\frac{rz_2}{\sigma_2^2}\right) ds \quad (5.5.3)$$

式中, σ_2 是构成莱斯分布的高斯分量标准差, σ_{μ^2} 是对数正态分布的标准差, μ_{μ^2} 是对数正态分布的均值。

重度阴影状态描述的是环境十分复杂、遮挡物较多的城市环境。信号在传播过程中直射信号分量被完全遮挡,只存在因障碍物阻碍产生的多径分量,同时该多径信号分量还受到阴影衰落的作用。此时接收信号包络可看作是瑞利分布和对数正态分布的乘积,其概率密度函数为

$$f_3(r) = \frac{r}{\sigma_3^2 \sigma_{\mu^3} \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{s^3} \exp\left(-\frac{(r/s)^2}{2\sigma_3^2} - \frac{(\ln s - \mu_{\mu^3})^2}{2\sigma_{\mu^3}^2}\right) ds \quad (5.5.4)$$

式中, σ_3 是构成瑞利分布的高斯分量标准差, σ_{μ^3} 是对数正态分布的标准差, μ_{μ^3} 是对数正态分布的均值。

在地面移动环境中,随着移动终端位置的不断改变,信号传输环境在三种典型的物理环境间变化,相应的信道状态也会发生转换。这种状态之间的转换可通过 Markov 过程实现,且状态之间的转换仅仅与上一状态有关。状态之间的具体转换过程,如图 5.13 所示。

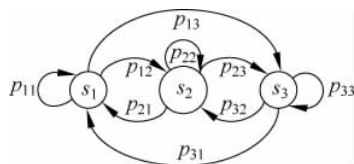


图 5.13 三状态 Markov 转换过程

Markov 过程可用状态转移矩阵 $\mathbf{P}$ 和状态概率矩阵 $\mathbf{A}$ 来描述,其状态转移矩阵 $\mathbf{P}$ 为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (5.5.5)$$

式中, p_{ij} 表示从状态 i ($i=1,2,3$) 转移到状态 j 的概率,且有

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^3 p_{ij} = 1 \quad (5.5.6)$$

随着时间的不断推移,Markov 过程会逐渐演化到一个稳定状态。若状态转移矩阵 $\mathbf{P}$ 已知,在给定初始概率矩阵下,状态概率矩阵 $\mathbf{A} = [A_1 \ A_2 \ A_3]$ 则可通过计算获得。 A_1 , A_2 和 A_3 分别表示三种状态在信道模拟中持续时间的比例,三种环境下各状态所持续的时间不同。只要给出实际通信环境的状态转移矩阵,就可根据该信道模型模拟地面移动环境下的信道传输特性。

根据以上分析由式(5.5.2)、式(5.5.3)和式(5.5.4)可得到地面移动环境下卫星信道三状态 Markov 模型接收信号包络的概率密度函数为

$$f_g(r) = A_1 f_1(r) + A_2 f_2(r) + A_3 f_3(r) \quad (5.5.7)$$

式中, A_1 , A_2 和 A_3 分别为三种状态所占比例的大小,且 $A_1 + A_2 + A_3 = 1$ 。

图 5.14 给出了该地面移动环境下卫星信道三状态 Markov 模型的系统框图。图中 $C(t)$ 表示地面移动环境影响下信道的乘性干扰。莱斯分布模块描述了无阴影状态下的信道

多径衰落特性；莱斯-对数正态分布模块描述了环境相对复杂的轻度阴影状态下的信道衰落特性；瑞利-对数正态分布模块描述了环境十分复杂的重度阴影状态下的信道衰落特性。Markov 转换过程实现由地面环境不断变化造成的信道状态间的切换。AWGN 表示信道的加性高斯白噪声。

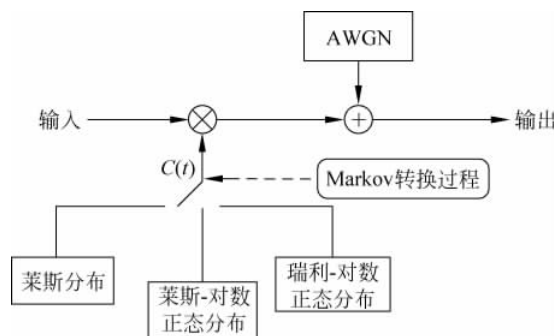


图 5.14 地面移动环境下卫星信道三状态 Markov 模型

3. 综合考虑大气传播环境和地面环境时,卫星信道 Markov 模型

实际的卫星通信中,大气传播环境和地面移动环境都会造成信号的衰减或失真。本节将大气传播环境的衰减和地面移动环境的衰减看作是相互独立的两个过程,用 w 表示大气传播环境对信号传输的影响过程,用 g 表示地面移动环境对信号传输的影响过程,则接收终端接收到的信号可表示为 $r = wg$ 。根据概率论知识得总的接收信号包络的概率密度函数为

$$f_{w-g}(r) = \int_0^\infty f_g(r | w) f_w(w) dw \quad (5.5.8)$$

式中, $f_w(w)$ 是大气环境影响下的概率密度函数, $f_g(r | w)$ 是在一定大气条件下受地面环境影响的概率密度函数。因为 g 与 w 是相互独立的,所以有

$$f_g(r | w) = \frac{1}{w} f_g\left(\frac{r}{w}\right) \quad (5.5.9)$$

在实际的地面移动环境中,随着信号传输环境的改变信道模型也会在无阴影、轻度阴影和重度阴影状态之间不断的转换。因此,一定大气条件下受地面环境影响的接收信号包络概率密度函数还可表示为

$$f_g(r | w) = \frac{1}{w} \left[A_1 f_1\left(\frac{r}{w}\right) + A_2 f_2\left(\frac{r}{w}\right) + A_3 f_3\left(\frac{r}{w}\right) \right] \quad (5.5.10)$$

将式(5.5.1)、式(5.5.2)和式(5.5.9)代入式(5.5.8),可得出无阴影地面环境下受大气环境影响的接收信号包络 r 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_{w-n}(r) &= \int_0^\infty \frac{1}{w} f_1\left(\frac{r}{w}\right) f_w(w) dw \\ &= \frac{r}{\sqrt{2\pi}\sigma_1^2\sigma_w} \int_0^\infty \frac{1}{w^2} \exp\left(-\frac{(r/w)^2 + z_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(w - \mu_w)^2}{2\sigma_w^2}\right) I_0\left(\frac{rz_1}{w\sigma_1^2}\right) dw \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

式中, μ_w 和 σ_w^2 分别是受大气环境影响的信号包络服从高斯分布的均值与方差; σ_1^2 是无阴影地面环境影响的信号包络服从莱斯分布的方差, z_1 表示直射分量的大小, $I_0(x)$ 是第一类修正零阶贝塞尔函数。

将式(5.5.1)、式(5.5.3)和式(5.5.9)代入式(5.5.8),得到轻度阴影地面环境下受大气

环境影响的接收信号包络 r 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_{w-l}(r) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{w} f_2\left(\frac{r}{w}\right) f_w(w) dw \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma_2^2\sigma_{\mu 2}\sigma_w} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{w^2 s^3} \exp\left(-\frac{(r/(ws))^2 + z_2^2}{2\sigma_2^2}\right) I_0\left(\frac{rz_2}{sw\sigma_2^2}\right) \\ &\quad \exp\left(-\frac{(\ln s - \mu_{\mu 2})^2}{2\sigma_{\mu 2}^2} - \frac{(w - \mu_w)^2}{2\sigma_w^2}\right) ds dw \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

式中, σ_2^2 是轻度阴影地面环境影响的信号包络服从莱斯分布的方差, z_2 表示直射分量的大小, $\mu_{\mu 2}$ 和 $\sigma_{\mu 2}^2$ 分别是受到阴影衰落影响的均值与方差。

将式(5.5.1)、式(5.5.4)和式(5.5.9)代入式(5.5.8), 得到重度阴影地面环境下受大气环境影响的接收信号包络 r 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_{w-h}(r) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{w} f_3\left(\frac{r}{w}\right) f_w(w) dw \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma_3^2\sigma_{\mu 3}\sigma_w} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{w^2 s^3} \exp\left(-\frac{(r/w)^2}{2\sigma_3^2 s^2} - \frac{(\ln s - \mu_{\mu 3})^2}{2\sigma_{\mu 3}^2} - \frac{(w - \mu_w)^2}{2\sigma_w^2}\right) ds dw \end{aligned} \quad (5.5.13)$$

式中, σ_3^2 是重度阴影地面环境影响下多径衰落效应的方差; $\mu_{\mu 3}$ 和 $\sigma_{\mu 3}^2$ 分别是受到阴影衰落影响的均值和方差。

根据以上推导, 可得到综合考虑大气传播环境和地面移动环境影响的卫星通信信道 Markov 模型中接收信号包络 r 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_{w-g}(r) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{w} \left[A_1 f_1\left(\frac{r}{w}\right) + A_2 f_2\left(\frac{r}{w}\right) + A_3 f_3\left(\frac{r}{w}\right) \right] f_w(w) dw \\ &= A_1 f_{w-n}(r) + A_2 f_{w-l}(r) + A_3 f_{w-h}(r) \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

式中, $f_{w-n}(r)$ 、 $f_{w-l}(r)$ 和 $f_{w-h}(r)$ 分别为无阴影、轻度阴影和重度阴影地面环境下受大气环境影响的终端接收信号包络概率密度函数, 其表达式分别由式(5.5.11)、式(5.5.12)和式(5.5.13)表示; A_1 、 A_2 和 A_3 表示三种阴影状态在信道模拟中各自所占的比例。

图 5.15 给出了卫星信道 Markov 模型的系统框图。图中分别对大气传播环境和地面移动环境下的信道传输特性进行了建模, 高斯分布和实常数相加实现了大气环境中天气状况对信号传输影响的模拟; 莱斯分布、莱斯-对数正态分布和瑞利-对数正态分布综合描述了地面环境十分复杂时的信道衰落特性。

5.5.2 卫星信道 Markov 模型仿真

1. 大气传播环境模型仿真模块

大气环境对信道传输特性的影响, 可用高斯分布描述。因此, 根据 2.8.1 节的方法可得到大气传播环境模型的 Simulink 仿真模块, 如图 5.16 所示。通过对高斯噪声产生器模块的参数设置可实现不同大气条件下的信道特性模拟。

图 5.16 中, 设置仿真时间为 10s, 双击 Gaussian Noise Generator 模块, 设置采样时间 $t_s = 0.01$, 初始种子数为 61, 选取表 6.1 中雷雨天气下信道模型参数 $\mu = 0.436$, $\sigma^2 = 0.01386$ 。从示波器模块 Scope 可观察到 Simulink 仿真结果, 如图 5.17 所示。

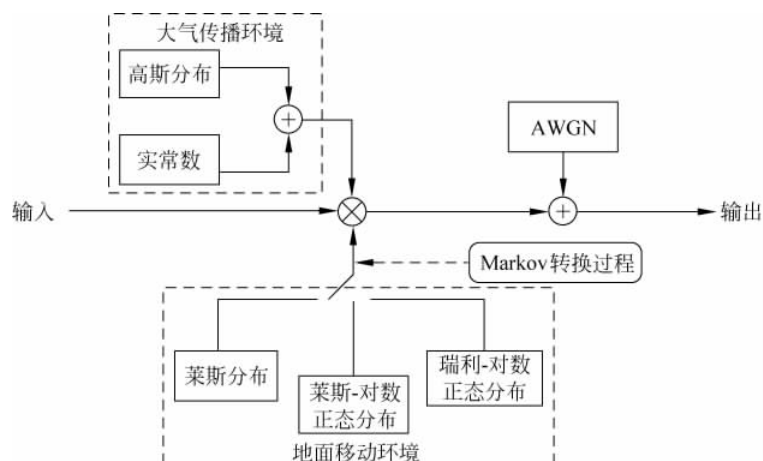


图 5.15 卫星通信信道 Markov 模型的系统框图

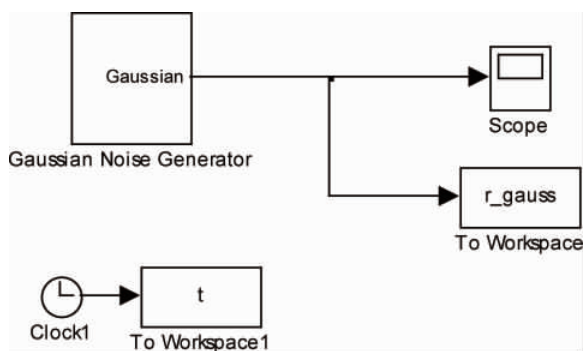


图 5.16 大气传播环境模型仿真模块

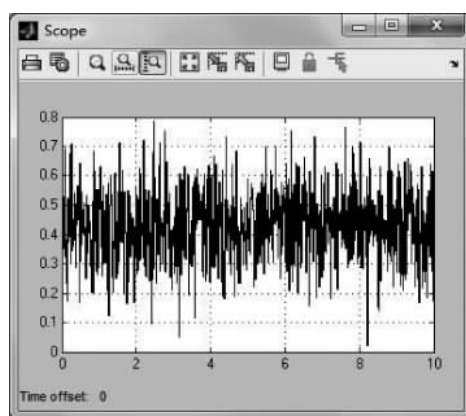


图 5.17 Simulink 仿真的接收信号幅度

2. 地面移动环境模型仿真模块

地面移动环境对信道传输特性的影响,可以由瑞利分布、莱斯分布和对数正态分布的组合来描述。地面移动环境模型仿真参数,如表 5.2 所示。

表 5.2 仿真参数

环境条件	z	σ	σ_{μ}	μ_{μ}
无阴影	1	0.1	—	—
轻度阴影	0.9383	0.3273	0.0205	0.1882
重度阴影	—	0.1847	0.186	0.3515

因此,利用 3.8.2 节中莱斯(瑞利)分布仿真模块和 2.8.2 节对数正态分布仿真模块,可建立地面传播环境下的 Simulink 仿真模块,如图 5.18 所示。

随着信号传输环境的改变,信道模型会在无阴影、轻度阴影和重度阴影状态之间发生转换,它们之间的转换是一个 Markov 过程。Markov 过程的实现,如图 5.19 所示。

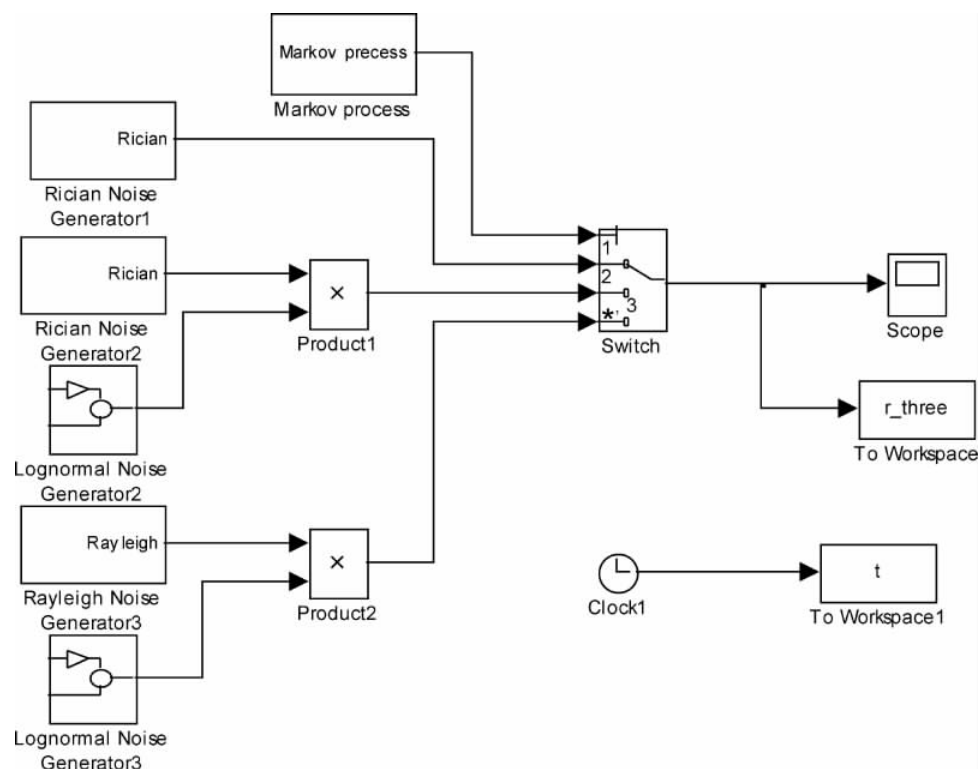


图 5.18 地面移动环境模型仿真模块

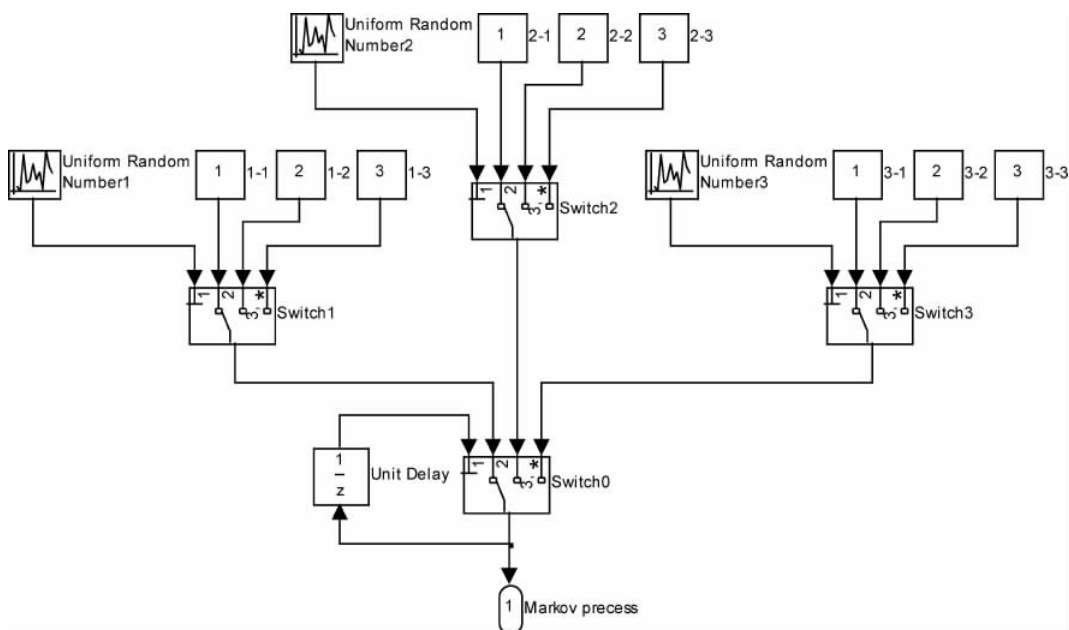


图 5.19 Markov 过程仿真模块

选择 Simulink 模块库中随机数发生器产生 3 个服从均匀分布的 $0 \sim 1$ 之间的数, Switch1、Switch2 和 Switch3 分别为 3 种阴影状态信道的保持与转换开关, 3 个开关的门限与信道的状态转移矩阵有关, 且这 3 个开关之间相互独立切换。真正的 Markov 转换过程实现是通过 Switch0 来完成。Switch0 根据前一状态选择 Switch1 或 Switch2 或 Switch3 开关的输出信号, 其输出用来控制无阴影、轻度阴影以及重度阴影状态下信道的转换。若 Switch0 输出为 1, 则选择无阴影状态的信道模型, 若 Switch0 输出为 2, 则选择轻度阴影状态的信道模型, 否则选择重度阴影状态的信道模型。

图 5.19 中 1-1 表示保持无阴影状态信道不变, 1-2 表示从无阴影状态转移到轻度阴影状态信道, 1-3 表示从无阴影状态转移到重度阴影状态信道, 其他各个模块所表示的含义以此类推。

图 5.18 中, 设置仿真时间为 10s, 采样时间 $t_s = 0.01$, 最大多普勒频率 $f_m = 91\text{Hz}$, 初始种子数为 61; 双击 Rician Noise Generator1 模块, 设置 $\sigma^2 = 0.1$, $A = 1$; 双击 Rician Noise Generator2 模块, 设置 $\sigma = 0.3273$, $A = 0.9383$, 双击 Lognormal Noise Generator2 模块, 设置 $\sigma = 0.0205$, $\mu = 0.1882$; 双击 Rayleigh Noise Generator3 模块, 设置 $\sigma = 0.1847$, 双击 Lognormal Noise Generator3 模块, 设置 $\sigma = 0.186$, $\mu = 0.3515$; 双击 Markov process 模块, 设置开关门限。从示波器模块 Scope 可观察到 Simulink 仿真结果, 如图 5.20 所示。从图中可看到接收信号明显存在 3 种不同程度的衰落, 与地面环境下 3 种不同阴影状态相对应。

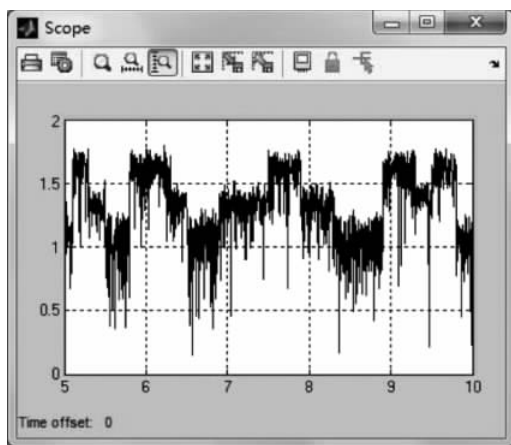


图 5.20 Simulink 仿真的接收信号幅度

3. 卫星信道 Markov 模型仿真系统

为了验证综合考虑大气环境和地面环境影响的卫星信道 Markov 模型的正确性与合理性, 建立基于该信道模型的卫星通信系统仿真模型, 并对其输出信号误码率特性进行分析。卫星通信系统的整体框图, 如图 5.21 所示。

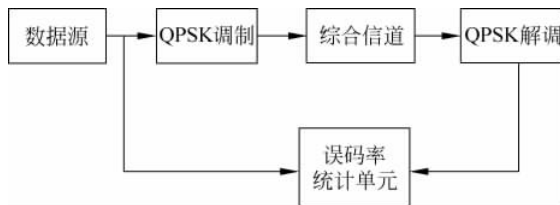


图 5.21 卫星通信系统框图

在卫星通信系统仿真中, QPSK 信号经信道受到乘性干扰和加性高斯白噪声的影响, 乘性干扰由所建立的信道模型产生, 加性高斯白噪声由 AWGN 模块产生。经信道后输出并由 QPSK 解调器解调得到输出信号, 将该输出信号输入到误码率计算模块, 进行误码率特性分析。

图 5.21 中,发送端数据源由 Random Integer Generator 模块产生,该信号经 QPSK 调制器调制后进入综合描述的信道模型中,这里假设信道衰落缓慢,且不存在其他衰落影响。最后,由信道输出的衰落信号经 QPSK 解调后输出给误码率统计单元,误码率统计单元对产生的误码结果进行分析。具体的 Simulink 实现如图 5.22 所示。

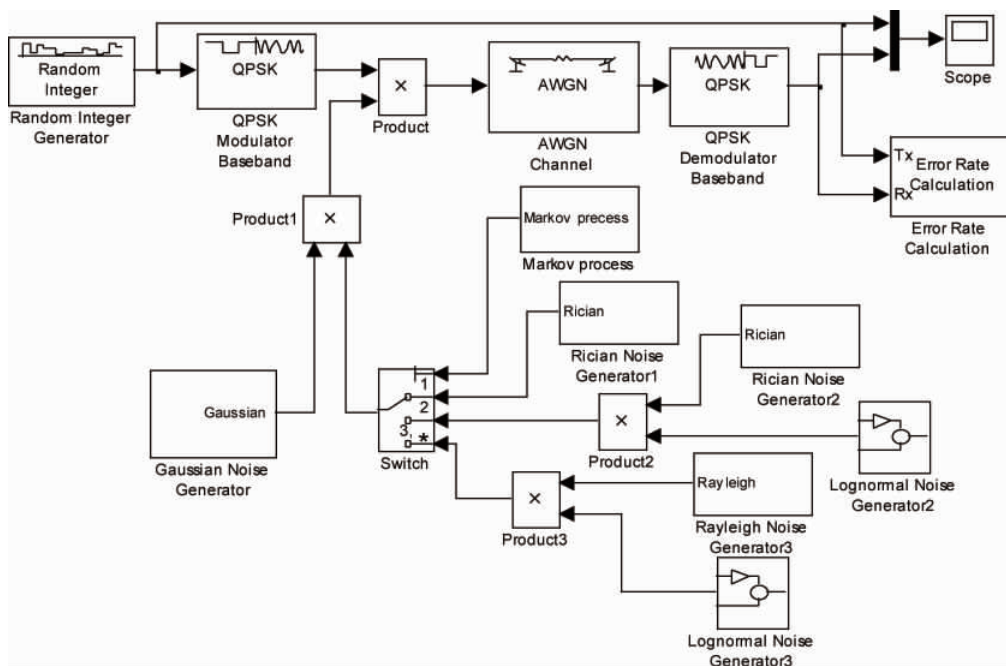


图 5.22 卫星通信系统的 Simulink 实现

图 5.22 中,数据源模块、QPSK 调制/解调模块、AWGN 模块以及误码率计算模块均可从 Simulink 模型库中进行调用。设置仿真时间为 10s,信号发生器和 AWGN 模块的采样值为 0.001;综合信道的相关参数设置如表 5.1 和表 5.2 所示,调用 Simulink 中误比特率分析工具箱(BERTool)进行卫星通信系统仿真结果分析。具体仿真结果,如图 5.23 所示。

图 5.23 给出了卫星通信系统在不同阴影情况、不同大气环境下 QPSK 信号的误码率特性曲线。图 5.23(a)给出了信号在无地面环境影响传输时,阴天、积云、雷雨和小雨 4 种典型天气条件下信道模型仿真系统的误码率特性曲线。与 AWGN 信道相比,在受天气条件影响时信号会出现衰落现象,从误码率曲线的对比可看出,小雨天气下信号衰减程度最小,雷雨和积云天气下信号受衰减程度较为严重;当仿真系统的信噪比(SNR) E_b/N_0 值大于 15dB 时,雷雨天气下信号受衰减作用大于积云天气。因此,在研究高频段卫星信道的传输特性时,应着重考虑降雨衰减这一影响因素。图 5.23(b)给出了信号在无天气条件影响下受地面环境影响的信道模型仿真系统的误码率特性曲线。从误码率曲线可知,随着信号受阴影衰落作用的增加,信号的误码率也逐渐增大,信号衰减程度越来越严重。图 5.23(c)是信号在地面无阴影环境下传输时,阴天、积云、雷雨和小雨 4 种典型天气条件下信道模型仿真系统的误码率特性曲线。从误码率曲线的对比可看出,在地面无阴影环境下,小雨天气下信号受到的衰减仍然最小,雷雨和积云天气下信号受衰减程度更加严重;随着仿真系统

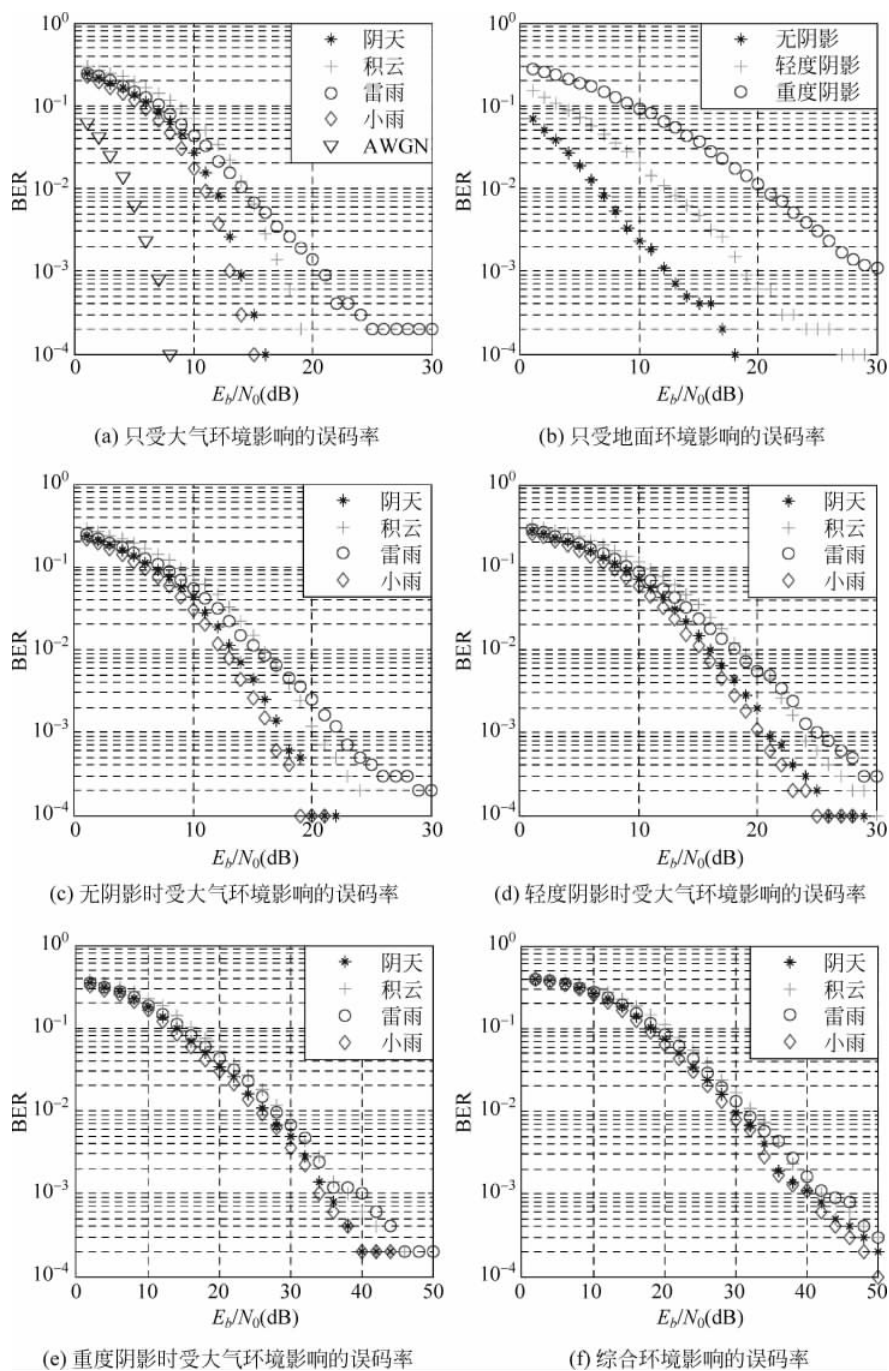


图 5.23 卫星通信系统误码率性能仿真

信噪比的增大,雷雨天气下信号所受的衰减作用越来越严重,此时误码率曲线趋于水平直线,这表明系统的误码率性能已经无法再进行明显的改善。图 5.23(d)和图 5.23(e)是信号在地面轻度阴影环境与重度阴影环境下传输时,阴天、积云、雷雨和小雨 4 种典型天气条件下信道模型仿真系统的误码率特性曲线。从误码率曲线的对比可看出 4 种典型天气条件对

信号传输产生的衰落影响与无阴影环境时的规律一致,但与无阴影环境下相比其信号所受的衰减明显增加。图 5.23(f)是信号在地面广域环境下传输时,阴天、积云、雷雨和小雨 4 种典型天气条件下信道模型仿真系统的误码率特性曲线。由 4 种典型天气条件下误码率曲线的逼近趋势可看出相对于地面环境对信号传输产生的衰减作用,大气环境对信号传输的影响相对较小但却也不容忽略。

通过对卫星通信仿真系统的误码率特性分析可得出:综合考虑大气传播环境与地面移动环境影响建立的卫星通信信道 Markov 模型是合理可行的,可作为卫星通信系统设计与改进的理论基础。

习题五

5.1 设质点在区间 $[0,4]$ 的整数点作随机游动,到达 0 点或 4 点后以概率 1 停留在原处,在其他整数点分别 $\frac{1}{3}$ 向左、右移动一格或停留在原处。求质点随机游动的一步和二步转移概率矩阵。

5.2 独立地重复抛掷一枚硬币,每次抛掷出现正面的概率为 p 。对于 $k \geq 2$,令 $X_k = 0, 1, 2$ 或 3,这些值分别对应于第 $k-1$ 次和第 k 次抛掷的结果为(正,正),(正,反),(反,正)或(反,反)。求 Markov 链 $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ 的一步和二步转移概率矩阵。

5.3 设 $\{X_k, k \geq 0\}$ 为 Markov 链,试证

$$(1) P\{X_{k+1}=i_{k+1}, X_{k+2}=i_{k+2}, \dots, X_{k+m}=i_{k+m} | X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_k=i_k\} = P\{X_{k+1}=i_{k+1}, X_{k+2}=i_{k+2}, \dots, X_{k+m}=i_{k+m} | X_k=i_k\}$$

$$(2) P\{X_0=i_0, \dots, X_k=i_k, X_{k+2}=i_{k+2}, \dots, X_{k+m}=i_{k+m} | X_{k+1}=i_{k+1}\} = P\{X_0=i_0, \dots, X_k=i_k | X_{k+1}=i_{k+1}\} P\{X_{k+2}=i_{k+2}, \dots, X_{k+m}=i_{k+m} | X_{k+1}=i_{k+1}\}。$$

5.4 设 $\{X_k, k \geq 1\}$ 为有限齐次 Markov 链,其初始分布和转移概率矩阵为 $p_i = P\{X_0 = i\} = \frac{1}{4}, i=1,2,3,4$,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

试证 $P\{X_2=4 | X_0=1, 1 < X_1 < 4\} \neq P\{X_2=4 | 1 < X_1 < 4\}$ 。

5.5 设 $\{X(t), t \in T\}$ 为随机过程,且 $X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), \dots, X_k = X(t_k), \dots$,为独立同分布随机变量序列,令

$$Y_0 = 0, Y_1 = Y(t_1) = X_1, Y_k + cY_{k-1} = X_k, k \geq 2$$

试证 $\{Y_k, k \geq 0\}$ 是 Markov 链。

5.6 已知随机游动的转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \end{Bmatrix}$$

求三步转移概率矩阵 $\mathbf{P}(3)$ 及当初始分布为

$$P\{X_0 = 1\} = P\{X_0 = 2\} = 0, \quad P\{X_0 = 3\} = 1$$

时,经三步转移后处于状态 3 的概率。

5.7 某商品六年共 24 个季度销售记录如表 5.3 所示。(状态 1—畅销,状态 2—滞销)

表 5.3 某商品销售记录

季节	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售状态	1	1	2	1	2	2	1	1	1	2	1	2
季节	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
销售状态	1	1	2	2	1	1	2	1	2	1	1	1

以频率估计概率。求(1)销售状态的初始分布;(2)3步转移概率矩阵及3步转移后的销售状态分布。

5.8 讨论下列转移概率的 Markov 链的状态分类。

$$(1) \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2) \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$(3) \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ q & r & p & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & q & r & p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & q & r & p \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

式中, $q+r+p=1, I=\{0,1,\cdots,b\}$ 。

5.9 设 Markov 链的转移概率为

$$(1) \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{Bmatrix}; \quad (2) \begin{Bmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ q_3 & 0 & p_3 \end{Bmatrix};$$

计算 $f_{11}(k), f_{12}(k), k=1,2,3$ 。

5.10 设 Markov 链的状态空间 $I=\{1,2,\cdots,7\}$, 转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

求状态的分类及各常返闭集的稳定分布。

5.11 设 Markov 链的转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ p & 0 & q & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & p & 0 & q & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

求它的平稳分布。

5.12 艾伦菲斯特(Erenfest)链。设甲、乙两个容器共有 $2M$ 个球, 每隔单位时间从这 $2M$ 个球中任取一球放入另一容器中, 记 X_m 为在时刻 m 甲容器中球的个数, 则 $\{X_m, m \geq 0\}$ 是齐次 Markov 链, 称为艾伦菲斯特链, 求该链的平稳分布。

5.13 将 2 个红球 4 个白球任意地分别放入甲、乙两个盒子中, 每个盒子放 3 个, 现从每个盒子中任取一球, 交换后放回盒中(甲盒内取出的球放入乙盒中, 乙盒内取出的球放入甲盒中), 以 X_k 表示经过 k 次交换后甲盒中的红球数, 则 $\{X_k, k \geq 0\}$ 为一次 Markov 链, 试求:

- (1) 一步转移概率矩阵;
- (2) 证明 $\{X_k, k \geq 0\}$ 是遍历链;
- (3) 求 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k), j=0,1,2$ 。

5.14 设河流每天的 BOD(生物耗氧量)浓度为齐次 Markov 链, 状态空间 $I=\{1,2,3,4\}$ 是按 BOD 浓度为极低、低、中、高分别表示的, 其一步转移概率矩阵(以一天为单位)为

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

若 BOD 浓度为高, 则称河流处于污染状态。

- (1) 证明该链是遍历链;
- (2) 求该链的平稳分布;
- (3) 河流再次到达污染的平均时间 m_4 。

5.15 天气预报问题。如果明日是否有雨仅与今天的天气(是否有雨)有关, 而与过去的天气无关。并设今日有雨且明日有雨的概率为 0.7, 今日无雨而明日有雨的概率为 0.4。另外, 假定把“有雨”称作“1”状态天气, 而把“无雨”称作“2”状态天气, 则本问题属于一个两状态的 Markov 链。试求: 今日有雨而后日(第二日)无雨, 今日有雨而第三日也有雨, 今日

无雨而第四日也无雨的概率各是多少?

5.16 设连续时间 Markov 链 $\{X(t), t \geq 0\}$ 具有转移概率

$$p_{ij}(\tau) = \begin{cases} \lambda_i \tau + o(\tau), & j = i + 1, \\ 1 - \lambda_i \tau + o(\tau), & j = i, \\ 0, & j = i - 1, \\ o(\tau), & |j - i| \geq 2, \end{cases}$$

式中 λ_i 是正数, $X(t)$ 表示一个生物群体在时刻 t 的成员总数。求柯尔莫哥洛夫方程, 转移概率 $p_{ij}(t)$ 。(提示: 利用以下结果, 若 $g'(t) + kg(t) = h(t)$, k 为实数, $h(t)$ 为连续函数, $a \leq t \leq b$, 则 $g(t) = \int_a^t e^{-k(t-s)} h(s) ds + g(a) e^{-k(t-a)}$ 。)

5.17 一质点在 1, 2, 3 点上坐随机游动。若在时刻 t 质点位于这三点之一, 则在 $[t, t + \tau)$ 内, 它以概率 $\frac{1}{2}\tau + o(\tau)$ 分别转移到其他二点之一。试求质点随机游动的柯尔莫哥洛夫方程, 转移概率 $p_{ij}(t)$ 及平稳分布。

5.18 设某车间有 M 台车床, 由于各种原因各车床总是时而工作, 时而停止。假设在时刻 t 时, 一台正在工作的车床, 但在时刻 $t + \tau$ 停止工作的概率为 $\mu\tau + o(\tau)$; 而在时刻 t 不工作的车床, 在时刻 $t + \tau$ 时工作的概率为 $\lambda\tau + o(\tau)$, 且各机床工作情况是相互独立的。若 $X(t)$ 表示时刻 t 正在工作的车床数。

(1) 说明 $X(t)$ 是一个齐次 Markov 过程;

(2) 求它的平稳分布;

(3) 若 $M=10, \lambda=60, \mu=30$, 系统处于平稳状态时有一半以上车床在工作的概率。

5.19 一条电路共 m 个焊工用电, 每个焊工均是间断用电, 设 $X(t)$ 表示在 t 时正在用电的焊工数。假设一焊工在 t 时用电, 而在 $(t, t + \tau)$ 内停止用电的概率为 $\mu\tau + o(\tau)$; 若一焊工在 t 时没有用电, 而在 $(t, t + \tau)$ 内用电的概率为 $\lambda\tau + o(\tau)$; 每焊工的工作情况是相互独立的。试求:

(1) 该过程的状态空间和 Q 矩阵;

(2) 设 $X(0)=0$, 求绝对概率 $p_j(t)$ 满足的微分方程;

(3) 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 求极限分布 p_j 。

5.20 设具有 k 个通道的电话交换机, 如果所有 k 条线都被占用, 则一次呼叫来到时就被丢失了, 呼叫电话规律服从比率为 λ 的泊松过程。呼叫的长短具有平均值为 $1/\mu$ 的独立指数分布的随机变量。试求在系统达到平稳时, 一次呼叫来到时被丢失的概率。