

第 1 章

有理数与整式的运算

有理数与整式的运算是学习数学的基础,通过学习列式表示数量关系,研究整式及其运算,你会发现,从算术发展到代数是数学的一大进步.

1.1 有 理 数



知识回顾

1. 大于 0 的数叫作**正数**,小于 0 的数叫作**负数**. 0 既不是正数,也不是负数.

2. 有理数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{整数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正整数} \\ 0 \\ \text{负整数} \end{array} \right\} \text{自然数} \\ \text{分数} \end{array} \right.$

3. 整数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{奇数, 如} \cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots \\ \text{偶数, 如} \cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots \end{array} \right.$

4. 数轴: 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫作**数轴**. 每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示.

5. 相反数: 如果两个数只有符号不同,那么其中一个数叫作另一个数的**相反数**,或者说它们**互为相反数**. 互为相反数的两个数表示的点,在数轴上位于原点两侧,且与原点的距离相等. 零的相反数还是零.

6. 倒数: 如果两个数的乘积是 1, 那么其中一个数叫作另一个数的**倒数**. 零没有倒数.

7. 绝对值: 数轴上表示数 a 的点到原点的距离叫作数 a 的**绝对值**, 记作 $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}.$$



知识巩固

例 1 找出数轴上表示下列各数的点, 比较它们的大小, 说出它们的倒数和相反数, 并指出绝对值大于 1 的数.

$$-2, -1, -0.5, 0.5, 1.5, 3.$$

解: 按照从左到右的顺序, 依次用点 A, B, C, D, E, F 表示(见图 1.1.1).

它们的大小关系为: $-2 < -1 < -0.5 < 0.5 < 1.5 < 3$;

它们的倒数分别为: $-\frac{1}{2}, -1, -2, 2, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$;

它们的相反数分别为: $2, 1, 0.5, -0.5, -1.5, -3$;

其中绝对值大于 1 的数有: $-2, 1.5, 3$.

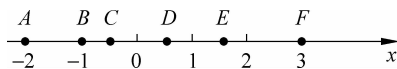


图 1.1.1

例 2 比较下列各对数的大小:

(1) $-(-1)$ 和 $-(+2)$; (2) -0.3 和 $-\left|-\frac{1}{3}\right|$.

解: (1) 先化简, $-(-1)=1, -(+2)=-2$.

$\because$ 正数大于负数, $\therefore 1 > -2$.

即 $-(-1) > -(+2)$.

(2) 先化简, $-\left|-\frac{1}{3}\right| = -\frac{1}{3}$.

$$\because 0.3 < \frac{1}{3},$$

$$\therefore -0.3 > -\left|-\frac{1}{3}\right|.$$

注：异号两数比较大小，要考虑它们的正负；同号两数比较大小，要考虑它们的绝对值。

习题 1.1

1. 把下面的有理数填在相应的大括号内(将各数用逗号分开)。

$$15, -\frac{3}{8}, 0, 0.5, -12, +20, |-3|.$$

正数集合：{ }.

负数集合：{ }.

奇数集合：{ }.

偶数集合：{ }.

自然数集合：{ }.

2. 将下列各数在数轴上表示，并按从小到大的顺序排列：

$$-0.5, 2.3, -1.5, 0, -\frac{2}{3}, -1, 0.05.$$

3. 判断下列说法是否正确：

- (1) 一个数的绝对值越大，这个数就越大.
- (2) 如果一个数不是正数，那么它一定是负数.
- (3) 一袋盐重 (500 ± 5) g，表示这袋盐的重量在 495~505g 之间.
- (4) $-a$ 一定表示一个负数.
- (5) 自然数都是整数.
- (6) 1.5 不是有理数.
- (7) $|a|$ 的几何意义是指数轴上表示 a 的点与原点的距离.

4. 写出下列各数的绝对值：

$$-125, 23, -3.5, 0, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, -0.05.$$

上面的数中哪个数的绝对值最大？哪个数的绝对值最小？

5. 生产某种钢管，内径标注尺寸为 (20 ± 0.03) mm，其含义是标准尺寸为 20mm，误差不超过 0.03mm，则加工时要求内径最大不超过_____ mm，最小不小于_____ mm.

6. 表 1.1.1 是我国几个城市某年一月份的平均气温，把它们按从高到低的顺序排列.

表 1.1.1

城市	北京	郑州	广州	哈尔滨	安阳
平均气温/ $^{\circ}\text{C}$	-4.6	3.8	13.1	-19.4	2.4

7. (1) -1 与 0 之间还有负数吗? 如有, 请举例.
 (2) -3 与 3 之间有哪些整数? 有哪些负整数?
8. 如果 $|x|=2$, 那么 x 一定是 2 吗? 如果 $|x|=-x$, 那么 x 等于几?
9. 如果 $a>b(a\neq 0, b\neq 0)$, 那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 吗?

1.2 有理数的运算



知识回顾

1. 有理数加法法则

- (1) 同号两数相加, 取相同的符号, 并把绝对值相加.
 (2) 绝对值不相等的异号两数相加, 取绝对值较大的加数的符号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值, 互为相反数的两个数相加得 0 .
 (3) 一个数同 0 相加, 仍得这个数.

2. 有理数减法法则

减去一个数, 等于加上这个数的相反数, 即 $a-b=a+(-b)$.

3. 有理数乘法法则

- (1) 两数相乘, 同号得正, 异号得负, 并把绝对值相乘.
 (2) 任何数同 0 相乘, 都得 0 .

4. 有理数除法法则

- (1) 除以一个不等于 0 的数, 等于乘以这个数的倒数, 即 $a\div b=a\cdot\frac{1}{b}(b\neq 0)$.
 (2) 两数相除, 同号得正, 异号得负, 并把绝对值相除.

(3) 0 除以任何一个不等于 0 的数,都得 0.

5. 乘法运算性质

乘法交换律: $ab=ba$.

乘法结合律: $(ab)c=(ac)b$.

乘法分配律: $a(b+c)=ab+ac$.



知识巩固

例 1 计算:

$$(1) (-3)+(-9); \quad (2) (-4.7)+3.9;$$

$$(3) 7.2-(-4.8); \quad (4) (-3)-(-5).$$

解: (1) $(-3)+(-9)=- (3+9)=-12$;

(2) $(-4.7)+3.9=- (4.7-3.9)=-0.8$;

(3) $7.2-(-4.8)=7.2+4.8=12$;

(4) $(-3)-(-5)=-3+5=2$.

例 2 计算:

$$(1) (-3)\times 9; \quad (2) \left(-\frac{1}{2}\right)\times (-2);$$

$$(3) (-36)\div 9; \quad (4) \left(-\frac{12}{25}\right)\div \left(-\frac{3}{5}\right).$$

解: (1) $(-3)\times 9=-27$;

(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)\times (-2)=1$;

(3) $(-36)\div 9=- (36\div 9)=-4$;

(4) $\left(-\frac{12}{25}\right)\div \left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{12}{25}\right)\times \left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{4}{5}$.

有理数相乘(除),先确定积(商)的符号,再确定积(商)的绝对值.

例 3 计算:

$$(1) -2.5\div \frac{5}{8}\times \left(-\frac{1}{4}\right); \quad (2) -8+4\div (-2).$$

解: (1) $-2.5\div \frac{5}{8}\times \left(-\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{5}{2}\right)\times \frac{8}{5}\times \left(-\frac{1}{4}\right)=1$;

$$(2) -8+4\div(-2)=-8+(-2)=-10.$$

注: 有理数的加减乘除混合运算,如无括号应按照“先乘除,后加减”的顺序进行. 乘除混合运算往往先将除法化成乘法,然后确定积的符号,最后求出结果.

例 4 计算: $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\times 12.$

解法 1: $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\times 12=\left(\frac{3}{12}+\frac{2}{12}-\frac{6}{12}\right)\times 12=\left(-\frac{1}{12}\right)\times 12=-1.$

解法 2: $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\times 12=\frac{1}{4}\times 12+\frac{1}{6}\times 12+\left(-\frac{1}{2}\right)\times 12=3+2-6=-1.$

思考: 比较上面两种解法,它们在运算顺序上有什么区别? 解法 2 用了什么运算律? 哪种解法运算量小?

习题 1.2

1. 计算:

(1) $(-0.9)+1.5;$

(2) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right);$

(3) $23+(-17)+6+(-22);$

(4) $-5+(-8);$

(5) $0-(-5);$

(6) $(-1.9)-0.6;$

(7) $-2.4+3.5-4.6+3.5;$

(8) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{4}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right).$

2. 计算:

(1) $(-4)\times 6;$

(2) $(-6)\times (-1);$

(3) $7.8\times(-8.1)\times 0\times(-19.6);$

(4) $\frac{2}{3}\times\left(-\frac{9}{4}\right);$

(5) $\left(-\frac{5}{12}\right)\times\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right);$

(6) $\left(-\frac{7}{8}\right)\times 15\times\left(-1\frac{1}{7}\right);$

(7) $\left(\frac{9}{10}-\frac{1}{15}\right)\times 30;$

(8) $100\times(-0.001).$

3. 计算:

(1) $0.25\div\frac{3}{8};$

(2) $\left(-125\frac{5}{7}\right)\div(-5);$

(3) $3\times(-4)+(-28)\div 7;$

(4) $3\div(-9);$

(5) $(-63)\div(-7);$

(6) $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{8}{5}\right)\div(-0.25);$

(7) $0 \div (-8)$; (8) $(-12) \div (-4) \div \left(-1\frac{1}{5}\right)$.

4. 一天早晨的气温是 -7°C , 中午上升了 11°C , 半夜又下降了 9°C , 半夜的气温是多少?

5. 有 8 筐白菜, 以每筐 25 千克为准, 超过的千克数为正数, 不足的千克数为负数, 称后记录如下: 1.5, -3, 2, -0.5, 1, -2, -2, -2.5, 这 8 筐白菜一共多少千克?

6. 用“ $>$ ”“ $<$ ”填空.

(1) 如果 $a < 0, b > 0$, 那么 $a \cdot b$ _____ 0, $\frac{a}{b}$ _____ 0.

(2) 如果 $a < 0, b < 0$, 那么 $a \cdot b$ _____ 0, $\frac{a}{b}$ _____ 0.

7. 如果 $a \cdot b > 0$, 那么一定有 $a > 0$ 且 $b > 0$ 吗? 如果 $a \cdot b < 0$ 呢?

1.3 有理数的乘方



知识回顾

1. 整数指数幂.

(1) 正整数指数幂: 当 n 为正整数时, n 个相同因数 a 的相乘, 记作 a^n , 作为运算, 读作“ a 的 n 次方”; 作为结果, 读作“ a 的 n 次幂”, 其中 a 叫作底数, n 叫作指数, 即 $a_n =$

$$\overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n \uparrow}.$$

(2) 零指数幂: 任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1, 即 $a^0 = 1 (a \neq 0)$.

(3) 负整数指数幂: a^{-n} 是 a^n 的倒数, 即 $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \text{ 为正整数})$.

2. 负数的奇次幂是负数, 负数的偶次幂是正数.

正数的任何次幂都是正数.

0 的任何正数次幂都是 0.

3. 做有理数的混合运算时, 应注意以下运算顺序.

(1) 先乘方, 再乘除, 最后加减.

(2) 同级运算, 从左到右进行.

(3) 如有括号, 先做括号内的运算, 按小括号、中括号、大括号依次进行.

4. 科学记数法: 将近似数写成 $a \times 10^n (1 \leq a < 10)$ 的形式, 叫作科学记数法.

5. 精确度: 近似数与准确度的接近程度, 可以用精确度表示.

取近似值通常用四舍五入法.

6. 有效数字: 从一个数的左边第一个非 0 数字起, 到末位数字止, 所有的数字都是这个数的有效数字.



知识巩固

例 1 计算:

$$(1) (-4)^3; \quad (2) (-2)^4; \quad (3) -2^4; \quad (4) \left(-\frac{2}{3}\right)^3.$$

解: (1) $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$;

(2) $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$;

(3) $-2^4 = -16$;

(4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$.

注: 因为 a^n 就是 n 个 a 相乘, 所以可以利用有理数的乘法运算来进行有理数的乘方运算.

例 2 计算:

(1) $2 \times (-3)^3 - 4 \times (-3) + 15$;

(2) $(-2)^3 + (-3) \times [(-4)^2 + 2] - (-3)^2 \div (-2)$.

解: (1) 原式 $= 2 \times (-27) - (-12) + 15$

$$= -54 + 12 + 15$$

$$= -27;$$

(2) 原式 $= (-8) + (-3) \times (16 + 2) - 9 \div (-2)$

$$= -8 + (-3) \times 18 - (-4.5)$$

$$= -8 - 54 + 4.5$$

$$= -57.5.$$

注: 要注意区别 $(-2)^3$ 与 -2^3 .

例 3 用科学记数法表示下列各数:

1 000 000, 57 000 000, 123 000 000 000, 0.000 35.

解: $1\,000\,000 = 10^6$;

$57\,000\,000 = 5.7 \times 10^7$;

$123\,000\,000\,000 = 1.23 \times 10^{11}$;

$0.000\,35 = 3.5 \times 10^{-4}$.

例 4 按括号内的要求,用四舍五入法对下列各数取近似数:

- (1) 0.015 8(精确到 0.001); (2) 304.35(精确到个位);
(3) 1.804(精确到 0.1); (4) 1.804(精确到百分位);
(5) 0.069 2(保留 2 个有效数字); (6) 8.609 10(保留 4 个有效数字).

解: (1) $0.015\ 8 \approx 0.016$; (2) $304.35 \approx 304$;
(3) $1.804 \approx 1.8$; (4) $1.804 \approx 1.80$;
(5) $0.069\ 2 \approx 0.069$; (6) $8.609\ 10 \approx 8.609$.

思考: 这里的 1.8 与 1.80 的精确度相同吗? 表示近似数时,能把 1.80 后面的 0 去掉吗?

习题 1.3

1. 计算:

- (1) $(-1)^{10}$; (2) $(-5)^3$; (3) 0.1^3 ; (4) $-(-2)^3$.

2. 计算:

- (1) $(-5)^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^4$; (2) $(-10)^4 + [(-4)^2 - (3 + 3^2) \times 2]$;
(3) $(-1)^{100} \times 5 + (-2)^4 \div 4$; (4) $-2^3 \div \frac{4}{9} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2$.

3. 下列用科学记数法写出的数,原来分别是什么数?

- 1×10^7 ; 8.5×10^6 ; 7.04×10^4 ; 3.1×10^{-3} .

4. 用四舍五入法对下列各数取近似数:

- (1) 0.003 56(精确到万分位); (2) 1.893 0(精确到 0.001);
(3) 0.057 1(精确到 0.1); (4) 204.9(保留 2 个有效数字).

5. 如果一年按 365 天计算,一年有多少小时? 有多少秒?(用科学记数法表示)

6. 判断下列各式是否成立:

- (1) $a^2 > 0$; (2) $a^2 > a$; (3) $a^2 = (-a)^2$.

1.4 整式的加减



知识回顾

1. 单项式: 只含有数或字母的乘法(含乘方)运算的代数式叫作**单项式**, 单独一个字

母或一个数也是单项式,单项式中的数字因数叫作**单项式的系数**,所有字母的指数的和叫作**单项式的次数**.

2. 多项式:几个单项式的和叫作**多项式**.其中,每个单项式叫作**多项式的项**,不含字母的项叫作**常数项**.多项式中次数最高项的次数叫作**多项式的次数**.

3. 整式:单项式与多项式统称**整式**.

4. 代数式:用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子叫作**代数式**.单独一个字母或一个数也是代数式,用数值代替代数式里的字母,计算后所得的结果,叫作**代数式的值**.

5. 同类项:所含字母相同,并且相同字母的指数也相同的项叫作**同类项**,几个常数项也是同类项.

6. 整式的加减运算法则:几个整式相加减,如果有括号就先去括号,然后再合并同类项.



知识巩固

例 1 用单项式填空,并指出它们的系数和次数.

(1) 一台电视机原件 a 元,现按原价的 9 折出售,这台电视机现在的售价为_____元.

(2) 底边长为 a ,高为 h 的三角形面积是_____.

(3) 一辆汽车的速度是 v km/h,它 t 小时行驶的路程为_____ km.

(4) 长、宽都为 a ,高为 b 的长方体的体积为_____.

解: (1) $0.9a$,它的系数是 0.9,次数是 1.

(2) $\frac{1}{2}ah$,它的系数是 $\frac{1}{2}$,次数是 2.

(3) vt ,它的系数是 1,次数是 2.

(4) a^2b ,它的系数是 1,次数是 3.

例 2 用多项式填空,并指出它们的项和次数.

(1) 温度由 $t^{\circ}\text{C}$ 下降 5°C 后是_____ $^{\circ}\text{C}$.

(2) 甲数 x 的 $\frac{1}{3}$ 与乙数 y 的 $\frac{1}{2}$ 的差可以表示为_____.

(3) 半径为 r 的圆去掉一个最大的内接正方形后,剩余部分的面积是_____.

解: (1) $t-5$,它的项是 t 和 -5 ,次数是 1.