管理类联考

数学

高分突破

社科赛斯教育集团　主编

清华大学出版社
北　京

图书在版编目(CIP)数据

管理类联考数学高分突破 / 社科赛斯教育集团 主编. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-46095-4

Ⅰ. ①管… Ⅱ. ①社… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 000354 号

责任编辑：陈 莉 高 屾
封面设计：周晓亮
版式设计：方加青
责任校对：牛艳敏
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京泽宇印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm 印 张：20.5 字 数：474 千字
版 次：2017 年 2 月第 1 版 印 次：2017 年 2 月第 1 次印刷
定 价：39.80 元

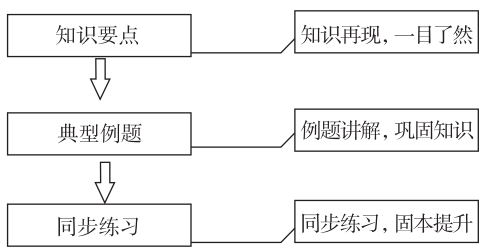
产品编号：072874-01

编　委　会

前　言

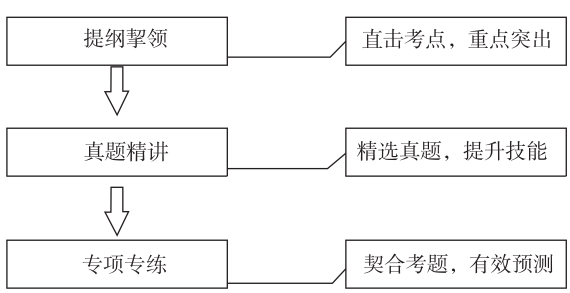
自 2008 年数学联考改革以来，数学联考试题已经逐步趋于标准化和成熟化，纵观近几年的考试情况，突出了以下几个特点：考试难易程度逐步合理化，大纲无重大调整，题目形式稳定。为了帮助广大考生高效、准确地把握考试的脉络，社科赛斯数学联考团队根据数学联考考试大纲的要求，结合近几年数学联考的特点和最新真题，精心编写了这本数学联考复习资料。本书分为基础篇和强化篇，下面就本书的特点说明如下。

第一，基础篇侧重于帮助考生夯实基础，做到理解基本知识和基本概念，能熟练应用基本知识和基本概念解决常规的数学问题。在本书的基础部分，我们本着遵循考纲，侧重于复习数学联考中常考知识点，按照以下流程编写：



我们采用这个流程编写的目的在于，通过对知识考点的归纳总结，让考生明确每一节每一章中的常考知识点，便于考生明确考试要点，通过典型例题明确该做什么类型的题，该重点掌握哪些知识点的应用和常规的做题方法，再通过同步练习得以提高，做到有的放矢！

第二，强化篇侧重于精选历年真题，通过真题的讲解，专项专练，达到专题训练的目的，通过高质量的试题训练，能够帮助考生准确把握题目特点及解题技能，有效提升解题能力。在这一部分，我们按照以下流程编写：



在这一部分，编者对考试大纲和真题进行了深入研究，对历年真题进行了统计分析，对联考的重要考点进行专题讲解，不仅解析详细，并且对真题进行了总结性的点评，这对考生总结方法和反思解题技能有很好的帮助。

针对数学联考命题规律及最新考题中的一些变化，数学联考团队对未来数学联考考试的命题进行了细致深入的研讨，本书中的同步练习和专项专练实际上也反映了我们对命题导向的思考及预测，并将成果融入每一个例题的讲解和点评中。

一直以来，我们努力把最好的成果呈现在您的面前，因为这是我们的责任！欢迎大家在使用本书的过程中，给我们提出建议和批评。

管理类联考数学部分大纲解析

一、综合能力数学部分考试大纲

(一)算术

1. 整数

(1)整数及其运算

(2)整除、公倍数、公约数

(3)奇数、偶数

(4)质数、合数

2. 分数、小数、百分数

3. 比和比例

4. 数轴与绝对值

(二)代数

1. 整式

(1)整式及其运算

(2)整式的因式与因式分解

2. 分式及其运算

3. 函数

(1)集合

(2)一元二次函数及其图像

(3)指数函数、对数函数

4. 代数方程

(1)一元一次方程

(2)一元二次方程

(3)二元一次方程组

5. 不等式

(1)不等式的性质

(2)均值不等式

(3)不等式求解

一元一次不等式(组)、一元二次不等式、简单绝对值不等式、简单分式不等式

6. 数列、等差数列、等比数列

(三)几何

1. 平面图形

(1)三角形

(2)四边形

矩形、平行四边形、梯形

(3)圆与扇形

2. 空间几何体

(1)长方体

(2)柱体

(3)球体

3. 平面解析几何

(1)平面直角坐标系

(2)直线方程与圆的方程

(3)两点间距离公式与点到直线的距离公式

(四)数据分析

1. 计数原理

(1)加法原理、乘法原理

(2)排列与排列数

(3)组合与组合数

2. 数据描述

(1)平均值

(2)方差与标准差

(3)数据的图表表示

直方图、饼图、数表

3. 概率

(1)事件及其简单运算

(2)加法公式

(3)乘法公式

(4)古典概型

(5)伯努利概型

以上系原文引自《全国硕士研究生入学统一考试管理类专业学位联考综合能力考试大纲》(以下简称《大纲》),供读者参考。

二、大纲解析

从《大纲》中可以看出,考查的知识是中学乃至小学的知识,可见考的并不很深;但考查的知识既包括非常基础的数字计算,也包括贴近经济管理的数据分析,可见考的范围比较广。所以,考生在备考中既不要过于恐慌,也不可掉以轻心。

由于考查范围很广，有的考生将中学课本拿来从头学起，其实，这是在走冤枉路。实际考试中，各章节的重要性是不同的，每章中考查内容的重点也与中、高考不完全相同。

最重要的部分恰恰是《大纲》中没有明确提到的应用题。在每次的 25 道考题中，应用题一般有 7 ~ 8 道。考试中的应用题，所考查的数学知识一般不难，考查的重心大多放在分析问题、解决问题的能力上。

很重要的部分包括几何和数据分析。这两部分在每次考试中一般会各考 4 ~ 6 道题。考试中的几何试题，从不考全等三角形的证明、弦切角定理之类的理论知识，考查的重点一般是求面积或者几个重点图形，所以，在这部分的学习中，考生应牢牢把握重点，而不要做无用功。数据分析部分的重点是排列组合，其基本知识点很少并且也不难，但这一部分经常和其他知识点综合出题，所以考生在学习时应注意灵活地应用知识。

比较重要的部分包括算术、代数和数列。每次考试中，这些知识点出的题目总数并不算多，部分知识点(例如整除、不等式等)若深究起来难度又很高，而其中绝对值、一元二次方程等知识点是几乎每次必考的。所以，对于这些知识，建议考生牢牢把握重点，而根据个人情况和需求灵活地控制难度。

《大纲》为我们的复习提供了基本的方向，但在实践中又不能过分地拘泥于大纲或者迷信大纲。例如，大纲中没有有理数和无理数的要求，但考试中曾经考查过；大纲中没有明确提及应用题，但考试中考的最多的就是应用题。所以，本书的架构以考试的实践为依据，对知识点进行了适当的增删调整，而并不完全拘泥于大纲的体例。

题型解析

管理类联考综合试卷的数学部分包括问题求解题15道和条件充分性判断题10道，每题3分，共75分。其中问题求解题即普通的单项选择题，条件充分性判断题将在后文介绍。作为综合试卷的一部分(综合试卷总时间要求为3小时)，数学部分一般应在70分钟内完成，每题仅有约2.8分钟的时间。这两种考题均为客观题型，仅要求选出正确且唯一的答案，而完全不看解题过程，所以考生在应试时除了可以依靠自己的数学水平外，还可以应用一些技巧，以节省宝贵的考试时间。本节针对问题形式向读者介绍一些一般性的技巧。由于尚未讲解具体的数学知识，本节例题仅为示例，所以难度低于实战水平。同时，我们也希望抛砖引玉，通过此部分启发读者自行总结出更多的解题技巧。

关于问题求解题

大部分问题求解题都需要正常的求解计算，但作为单选题，五个选项中必然有一个是答案，且仅有一个是答案，所以如果能灵活运用排除法、验证法等技巧，则可以大大节省时间并提高正确率。

【引例1】当 $x=1$ 时，$\left|\,|x^2-3x-6|+2\,\right|=$(　　)。

(A) -5　　(B)1　　(C)10　　(D) -8　　(E)0

【解析】本题当然可以代入计算，但注意到式子的形式，显然答案不会小于2，所以排除选项A、B、D、E，可以直接选择C。

【引例2】关于 x 的方程 $\dfrac{x^2-6x+5}{x-5}=1$ 的解为 $x=$(　　)。

(A)5　　(B)2　　(C)5或者2　　(D)1　　(E)0

【解析】本题当然可以通过正常地解分式方程求得答案。但应注意到，代入法是一种不错的办法，A显然不可以，否则分母为0。将选项B代入后发现，其确为方程的解。注意到是单选题，则答案必然为B。

【引例3】有黑、白两堆棋子，黑、白子数量比为3∶1。分别取走8个黑子和1个白子后，黑、白子数量比变为2∶1。则此时，黑子的数量为(　　)。

(A)7　　(B)15　　(C)10　　(D)5　　(E)1

【解析】本题有多种做法，这里强调的是，“此时”黑子数量为白子的2倍，所以黑子只能为偶数，所以答案必然为C。

关于条件充分性判断题

条件充分性判断的题目要求如下。

条件充分性判断：第16~25小题，每小题3分，共30分。要求判断每题给出的条件

(1)和条件(2)能否充分支持题干所陈述的结论。A、B、C、D、E 五个选项为判断结果，请选择一项符合试题要求的判断，在答题卡上将所选项的字母涂黑。

(A)条件(1)充分，但条件(2)不充分。

(B)条件(2)充分，但条件(1)不充分。

(C)条件(1)和(2)单独都不充分，但条件(1)和条件(2)联合起来充分。

(D)条件(1)充分，条件(2)也充分。

(E)条件(1)和条件(2)单独都不充分，条件(1)和条件(2)联合起来也不充分。

注：该类题型的题文选项固定不变，故本书中此类题型不再一一列举各选项。这种题型对于大部分考生来说是陌生的，所以在此说明几个关键问题。

1. 什么是充分条件

有两个命题 A、B，若 A 成立，则 B 一定成立，那么 A 就是 B 的充分条件。例如：

A：$x=1$；B：$x^2-x=0$。

若 $x=1$，则 $x^2-x=1-1=0$ 一定成立，所以 $x=1$ 是 $x^2-x=0$ 的充分条件，即 A 是 B 的充分条件；若 $x^2-x=0$，则 $x=1$ 或 $x=0$，并非一定 $x=1$，所以 B 不是 A 的充分条件。

2. 充分并非等价，也不需要等价

将上例改写为一道试题。

【引例 4】$x^2-x=0$。(　　)

(1)$x=1$　　　　(2)$x=0$

【解析】本题非常简单，但请初学者注意，本题的答案是 D 而非 C。

注意：选择 C 的前提是“单独都不充分”，而对于本例，(1)、(2)单独都是充分的，所以答案为 D，而不可能是 C。

而 $x=1$ 与 $x^2-x=0$ 并非等价的，但充分并不要求等价。可以这样记忆，充分条件的范围常常会小于结论。以本题为例，题干有两个解，但作为答案的充分条件，每个仅为其中之一。

【引例 5】$x\geqslant 0$。(　　)

(1)$x>0$　　　　(2)$x=0$

【解析】同理，本题答案也是 D。

同样，两个选项每一个的范围均小于题干的范围。

3. 应敢于选择 E

很多初学者不敢选择 E。实际上，近年来，几乎每年真题中的条件充分性判断题都会有答案为 E 的。

4. 自上而下与自下而上相结合

由于思维的惯性，很多初学者在求解时——特别是题干为方程或不等式时——总是先求解题干，再核对条件。其实，很多时候，将条件分别代入题干更为简便。

【引例 6】$a^2+4a=21$ 成立。(　　)

(1)$a=5$　　　　(2)$a=3$

【解析】对于本题，直接求解方程当然是可以的，但若直接将条件代入试验则更为简便，答案为 B。

目　录

第一部分　基础篇

第一章　实数的运算 …… 3
第一节　整数、有理数、实数 …… 3
第二节　集合 …… 11
第三节　绝对值 …… 14
第二章　整式与分式 …… 23
第一节　整式 …… 23
第二节　分式 …… 31
第三章　一元二次方程与一元二次函数 …… 40
第一节　一元二次方程 …… 40
第二节　一元二次函数 …… 46
第四章　不等式 …… 51
第五章　数列 …… 65
第一节　数列的概念 …… 65
第二节　等差数列 …… 68
第三节　等比数列 …… 74
第六章　应用题 …… 81
第一节　比例、百分比、利润率、变化率问题 …… 81
第二节　路程问题 …… 85
第三节　工程问题 …… 92
第四节　平均值问题 …… 93
第五节　浓度问题 …… 94
第六节　集合问题 …… 96
第七节　几何问题 …… 97
第八节　其他问题 …… 100
第七章　平面几何 …… 112
第一节　平行线、三角形、四边形 …… 112
第二节　圆和扇形 …… 122
第八章　解析几何 …… 131

第一节　直线的方程 …… 131
第二节　圆的方程 …… 140
第三节　综合应用 …… 143
第九章　立体几何 …… 153
第十章　排列、组合与二项式定理 …… 159
第一节　两个原理 …… 159
第二节　排列、组合 …… 160
第三节　二项式定理 …… 171
第十一章　概率 …… 175
第一节　随机事件的概率 …… 175
第二节　互斥事件的概率 …… 180
第三节　独立事件的概率 …… 185
第十二章　数据分析 …… 190

第二部分　强化篇

第十三章　实数的应用专题 …… 199
第十四章　方程、函数专题 …… 215
第十五章　不等式专题 …… 225
第十六章　数列专题 …… 243
第十七章　应用题专题 …… 252
第一节　比例问题 …… 253
第二节　增长率问题 …… 254
第三节　集合问题 …… 257
第四节　浓度问题 …… 257
第五节　工程问题 …… 259
第六节　行程问题 …… 261
第七节　利润问题 …… 264
第八节　数据分析问题 …… 265
第九节　最优化问题 …… 266
第十八章　几何专题 …… 271
第一节　平面几何 …… 271
第二节　解析几何 …… 276
第三节　立体几何 …… 281
第十九章　排列、组合专题 …… 289
第二十章　概率专题 …… 298
附　录 …… 309

第一部分　基础篇

第一章　实数的运算
第二章　整式与分式
第三章　一元二次方程与一元二次函数
第四章　不等式
第五章　数列
第六章　应用题
第七章　平面几何
第八章　解析几何
第九章　立体几何
第十章　排列、组合与二项式定理
第十一章　概率
第十二章　数据分析

第一章　实数的运算

第一节　整数、有理数、实数

知识要点

1. 实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\begin{cases}1\\ \text{质数：比 1 大的整数中，除了 1 和它本身没有其他约数}\\ \qquad\text{（注：2 是所有的质数中唯一的偶数）}\\ \text{合数：比 1 大的整数中，除了 1 和它本身，还有其他约数}\end{cases}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数：有限小数和无限循环小数}\end{cases}\\ \text{无理数：无限不循环小数}\end{cases}$$

2. 常见概念

（1）整除：若整数 a 除以非零整数 b，商为整数，且余数为零，我们就说 a 能被 b 整除（或者说 b 能整除 a），记做：$b|a$，其中 a 叫做 b 的倍数，b 叫做 a 的约数（或因数）。

（2）自然数：0 和正整数统称为自然数。

（3）公倍数：在两个或两个以上的自然数中，如果它们有相同的倍数，这些倍数就是它们的公倍数，其中这些公倍数中最小的，就称为这些整数的最小公倍数。

（4）公约数：如果一个整数同时是几个整数的约数，则称这个整数为它们的“公约数”，其中这些公约数中最大的，就称为这些整数的最大公约数。

（5）互质数：两个或多个整数的公因数只有 1 的非零自然数，通常把公因数只有 1 的两个非零自然数叫做互质数。

3. 常规模型

（1）有理数 ± 有理数 = 有理数

有理数 × 有理数 = 有理数

有理数 ÷ 有理数（非零）= 有理数

（2）a：有理数（$a\neq0$），b：无理数

$a \pm b$ = 无理数

$a \times b$ = 无理数

$a \div b =$ 无理数

(3)若 a 为有理数，b 为有理数，c 为无理数，且 $a+bc=0$，则有 $a=0$ 且 $b=0$

4. 实数运算中常见的公式

(1) $a^0=1(a\neq 0)$　(2) $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$　(3) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

(4) $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$　(5) $(ab)^n=a^n\cdot b^n$　(6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

(7) $(a^m)^n=a^{mn}$　(8) $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$　(9) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$

(10) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,\ b>0)$

5. 裂项公式

(1) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$　(2) $\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$

(3) $\frac{A}{n(n+k)}=\frac{A}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$

典型例题

题型 1　实数运算公式的应用

【例 1】下列各式中，正确的是(　　)。

(A) $a^3+a^3=a^6$　(B) $(3a^3)^2=6a^6$　(C) $a^3\cdot a^3=a^6$

(D) $(a^3)^2=a^5$　(E)以上均不正确

【解析】答案是 C。

$a^3+a^3=2a^3$，$(3a^3)^2=9a^6$，$a^3\cdot a^3=a^6$，$(a^3)^2=a^6$。

【点评】本题主要考查实数中常见公式的应用，解决此类问题的关键是公式要记忆准确。

【例 2】下列各式中，错误的是(　　)。

(A) $(-a^3b)^2\cdot(-ab^2)^3=-a^9b^8$　(B) $(-a^2b^3)^3\div(-ab^2)^3=a^3b^3$

(C) $(-a^3)^2\cdot(-b^2)^3=a^6b^6$　(D) $[(-a^3)^2\cdot(-b^2)^3]^3=-a^{18}b^{18}$

(E)以上均不正确

【解析】答案是 C。

$(-a^3b)^2\cdot(-ab^2)^3=(a^6b^2)\cdot(-a^3b^6)=-a^9b^8$

$(-a^2b^3)^3\div(-ab^2)^3=(-a^6b^9)\div(-a^3b^6)=a^3b^3$

$(-a^3)^2\cdot(-b^2)^3=a^6\cdot(-b^6)=-a^6b^6$

$[(-a^3)^2\cdot(-b^2)^3]^3=[a^6\cdot(-b^6)]^3=-a^{18}b^{18}$

【点评】考查指数运算的加法、乘法及乘方公式的熟练掌握。

题型2　裂项公式的应用

【例3】求值$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{10\times11}=$(　　)。

(A)$\frac{10}{11}$　　(B)$\frac{2}{11}$　　(C)$\frac{3}{11}$　　(D)$\frac{4}{11}$　　(E)$\frac{5}{11}$

【解析】答案是A。

原式$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

【点评】

1. 裂项求和是考试经常考到的一类计算题，应用裂项求和主要抓住两个外在结构特征：(1)若干个分式相加；(2)分母是两项相乘或者可以变换成两项相乘的形式。

同时，大家还要注意相消的时候什么项该留下，什么项该消除。

2. 变式1：$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+2)}=?$

【解析】原式$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{3n^2+5n}{4n^2+12n+8}$$

变式2：$\frac{1}{1^2+2\times1}+\frac{1}{2^2+2\times2}+\frac{1}{3^2+2\times3}+\frac{1}{4^2+2\times4}+\cdots+\frac{1}{10^2+2\times10}=?$

【解析】原式$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\right)\right]$$

$$=\frac{175}{264}$$

题型3　实数运算的综合应用

【例4】求值$\frac{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{9})}{0.1+0.2+0.3+0.4+\cdots+0.9}=$(　　)。

(A)$\frac{2}{81}$　　(B)$\frac{2}{9}$　　(C)$\frac{9}{2}$　　(D)$\frac{81}{2}$　　(E)$\frac{14}{9}$

【解析】答案是A。

因为分子$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{7}{8}\times\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$

分母 $=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\cdots+\frac{9}{10}=\frac{1}{10}(1+2+3+\cdots+9)=\frac{45}{10}=\frac{9}{2}$

所以原式 $=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{9}{2}}=\frac{2}{81}$。

【点评】处理此类实数运算，主要做好两件事情：(1)善于观察所求式子的外在结构特征，看是否可以应用一些常规模型来解决问题；(2)对于分子和分母形式不统一的，可以从分子和分母分别入手。

【例 5】有一个正的既约分数，如果分子加上 24，分母加上 54 后，其分数值不变，那么此既约分数的分子与分母的乘积为(　　)。

(A)30　　(B)24　　(C)32　　(D)38　　(E)36

【解析】答案是 E。

设既约分数为$\frac{n}{m}$，则$\frac{n+24}{m+54}=\frac{n}{m}$。

因为 $m(n+24)=n(m+54)$，所以 $24m=54n$，即$\frac{n}{m}=\frac{4}{9}$。

所以 $mn=36$。

【点评】此题的特点是文字性描述语言很多，我们解决问题的关键就是把文字语言转化为数学符号语言，什么是既约分数，是这个问题的切入点，也是解决问题的关键。

【例 6】(充分性判断)新分数比原来分数减少的百分率是 30%。(　　)

(1)分子减少 25%，分母增加 25%

(2)分子减少 25%，分母增加 20%

【解析】答案是 E。

由条件(1)可知，设原分数为$\frac{b}{a}$，则新分数为$\frac{b\left(1-\frac{1}{4}\right)}{a\left(1+\frac{1}{4}\right)}=\frac{3b}{5a}$。

所以$\frac{\frac{3b}{5a}}{\frac{b}{a}}=\frac{3}{5}\neq\frac{7}{10}$，即条件(1)不充分。

由条件(2)可知，设原分数为$\frac{b}{a}$，则新分数为$\frac{b\left(1-\frac{1}{4}\right)}{a\left(1+\frac{1}{5}\right)}=\frac{5b}{8a}$。

所以$\frac{\frac{5b}{8a}}{\frac{b}{a}}=\frac{5}{8}\neq\frac{7}{10}$，即条件(2)不充分；显然条件(1)和条件(2)无法联合。

【点评】熟练应用文字语言与数学符号语言的互相翻译。

【例 7】把无理数$\sqrt{3}$记作 a，它的小数部分记作 b，则 $a-\frac{1}{b}=$(　　)。

(A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B)$\sqrt{3}$　　(C)$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　(D)$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　(E)$2\sqrt{3}$

【解析】答案是 D。

因为 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}-1$，

所以 $a-\frac{1}{b}=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$。

【点评】

1. 掌握数的构成：实数 = 整数部分 + 小数部分。此题实则考查正难则反的解题思想，当无理数的小数部分无法直接表示时，可以利用整数部分来表示它。

2. 掌握一些常用无理数的近似值，例如：$\sqrt{2}\approx1.414$；$\sqrt{3}\approx1.732$；$\sqrt{5}\approx2.236$。

3. 变式：已知$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$的整数部分为 a，小数部分为 b，则 $ab-\sqrt{5}=$(　　)。

(A)3　　(B)2　　(C)-1　　(D)-2　　(E)0

【解析】答案是 C。

因为$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，

所以 $a=2$，$b=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $ab-\sqrt{5}=-1$。

题型 4　常规模型的应用

【例 8】(充分性判断)$a=b=0$。(　　)

(1)$ab\geqslant0$，$(\frac{1}{2})^{a+b}=1$

(2)a，b 是有理数，m 是无理数，且 $a+bm=0$

【解析】答案是 D。

条件(1)：因为$(\frac{1}{2})^{a+b}=1$，所以 $a+b=0$。

又因为 $ab\geqslant0$，所以 $a=b=0$，即条件(1)充分。

条件(2)：由常规模型可知 $a=b=0$，即条件(2)充分。

【点评】

1. 实数运算中常见指数运算的一些常规结论你熟悉吗?

2. 常规模型你掌握了吗？

【例 9】(充分性判断)等式 $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$成立。(　　)

(1)$x>3$　　(2)$x<3$

【解析】答案是 A。

先把结论进行化简，因为 $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$，所以$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\x-2>0\end{cases}$，即 $x>2$。

利用集合法进行判断，则条件(1)充分，条件(2)不充分。

【点评】请大家注意区分 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$和 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$成立的条件分别是什么。

同步练习

1. 如果 9121 除以一个质数，余数为 13，那么这个质数是(　　)。

   (A)7　(B)11　(C)17　(D)23　(E)29

2. 下列说法正确是(　　)。

   (A)有理数都是实数　(B)实数都是有理数

   (C)带根号的数都是无理数　(D)无理数都是开方开不尽的数

   (E)以上均不正确

3. 设 a，$b\in R$，则下列命题中正确的是(　　)。

   (A)若 a，b 均是无理数，则 $a+b$ 也是无理数

   (B)若 a，b 均是无理数，则 ab 也是无理数

   (C)若 a 是有理数，b 是无理数，则 $a+b$ 是无理数

   (D)若 a 是有理数，b 是无理数，则 ab 是无理数

   (E)以上均不正确

4. 最小的质数与最大的两位数合数相乘的积是(　　)。

   (A)99　(B)198　(C)98　(D)196　(E)96

5. 求值$\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{17\times 19}=$(　　)。

   (A)$\dfrac{18}{19}$　(B)$\dfrac{9}{19}$　(C)$\dfrac{8}{19}$　(D)$\dfrac{7}{19}$　(E)$\dfrac{16}{19}$

6. 已知 A 是小于 10 的一个质数，若 A+40 仍是一个质数，A+80 也是一个质数，则 A 是(　　)。

   (A)1　(B)2　(C)3　(D)5　(E)7

7. 正整数 N 的 8 倍与 5 倍之和，除以 10 的余数为 9，则 N 的最末一位数字为(　　)。

   (A)2　(B)3　(C)5　(D)7　(E)9

8. 四个互不相等的整数 a、b、c、d，它们的乘积 $a\cdot b\cdot c\cdot d=9$，则 $a+b+c+d=$(　　)。

   (A)0　(B)6　(C)8　(D)12　(E)15

9. (充分性判断)正整数 n 是 35 的倍数。(　　)

   (1)n 是 5 的倍数　(2)n 是 7 的倍数

10. 从 1 到 100 的自然数中，能被 2 整除或能被 3 整除的数有(　　)。

(A)16 个　(B)33 个　(C)50 个　(D)67 个　(E)72 个

11. 若正整数 n 既能被 8 整除，又能被 10 整除，则 n 一定可以被下列哪一项整除？(　　)

(A)5　(B)7　(C)9　(D)11　(E)13

12. (充分性判断)正整数 m 是偶数。(　　)

(1)m 被 3 除，余数为 2　(2)m 被 6 除，余数为 4

13. (充分性判断)$X=\frac{199}{100}$成立。(　　)

(1)$X=\dfrac{198+\left(\frac{1}{2345}\right)^0}{(2002+2000+1998+\cdots+4+2)-(2001+1999+1997+\cdots+3+1)}$

(2)$X=1+\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{99\times100}$

14. 若$(a^{m+1}\cdot b^{n+2})(a^{2n-1}\cdot b^{2m})=a^5b^3$，则 $m+n$ 的值为(　　)。

(A)1　(B)2　(C)3　(D)-3　(E)-2

15. 已知 $\sqrt{10}$在两个连续整数 a 和 b 之间，即 $a<\sqrt{10}<b$，则 a 与 b 的乘积是(　　)。

(A)6　(B)8　(C)9　(D)12　(E)15

参考答案

1.【解析】答案是 D。

令 $9121=a\cdot x+13$，则有 $a\cdot x=9108=2\times2\times3\times3\times11\times23$

由于 $13<x$ 且 x 为质数，所以 $x=23$。

2.【解析】答案是 A。

(B)错误：实数还包括无理数。

(C)错误：$\sqrt{4}=2$ 即为有理数。

(D)错误：π 也是无理数。

3.【解析】答案是 C。

(A)错误：若 $a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$，则 $a+b=0$ 是有理数。

(B)错误：若 $a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$，则 $ab=-2$ 是有理数。

(D)错误：若 $a=0$，$b=\sqrt{2}$，则 $ab=0$ 是有理数。

4.【解析】答案是 B。

由于最小的质数是 2，最大的两位数合数是 99，所以乘积是：$2\times99=198$。

5.【解析】答案是 B。

原式 $=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{19}\right)=\frac{9}{19}$。

6.【解析】答案是 C。

由于小于 10 的质数是：2，3，5，7，所以用列举法代入验证可得：$A=3$。

7.【解析】答案是 B。

由于 $8N+5N=13N$，令 $13N=10x+9$，由于 $10x+9$ 的末位数字是 9，所以 $13N$ 的末位数字是 9，则有 N 的末位数字是 3。

8.【解析】答案是 A。

由于 $a\cdot b\cdot c\cdot d=9$，且 9 的约数只有 1、3、9，所以 $9=1\times3\times(-1)\times(-3)$，则 $a+b+c+d=1+3+(-1)+(-3)=0$。

9.【解析】答案是 C。

条件(1)：令 $n=10$，显然不充分。

条件(2)：令 $n=14$，显然不充分。

条件(1)和条件(2)联合起来：由于 5 和 7 的最小公倍数是 35，所以 n 既是 5 的倍数又是 7 的倍数，即 n 是 35 的倍数，充分。

10.【解析】答案是 D。

由于 1 到 100 的自然数中，能被 2 整除的自然数是：$2n(n=1,2,3,\cdots,50)$，即有 50 个，能被 3 整除的自然数是：$3n(n=1,2,3,\cdots,33)$，即有 33 个，其中既能被 2 整除又能被 3 整除的自然数是：$6n(n=1,2,3,\cdots,16)$，即有 16 个，所以能被 2 整除或能被 3 整除的自然数有：$50+33-16=67$ 个。

11.【解析】答案是 A。

由于 8 和 10 的最小公倍数是 40，所以 $n=40k$，即在选项中找出 40 的因数即可。

12.【解析】答案是 B。

条件(1)：令 $m=3k+2$，若 $k=1$，则 $m=5$，不充分。

条件(2)：令 $m=6k+4=2(3k+2)$，则 m 一定是偶数，充分。

13.【解析】答案是 B。

条件(1)：

$X=\dfrac{198+1}{(2002-2001)+(2000-1999)+(1998-1997)+\cdots+(4-3)+(2-1)}=\dfrac{199}{1001}$，不充分。

条件(2)：$X=1+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}\right)=1+1-\dfrac{1}{100}=\dfrac{199}{100}$，充分。

14.【解析】答案是 B。

由于 $a^{m+2n}\cdot b^{n+2+2m}=a^5\cdot b^3$，所以 $m+2n=5$ 且 $n+2+2m=3$，解得：$m=-1$，$n=3$，所以 $m+n=2$。

15.【解析】答案是 D。

由于 a，b 是两个连续的整数，则有 $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$，所以 $a=3$，$b=4$，即 $a\cdot b=12$。

第二节　集合

知识要点

1. 定义

一般地，把研究对象统称为元素，这些元素组成的总体，叫做集合，简称集。

2. 集合常见的表示方法

(1)列举法：把集合中所有的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法。

(2)描述法：把集合中元素的公共属性用文字、符号或式子等描述出来，写在大括号内表示集合的方法。

3. 集合元素的特征

(1)确定性　　(2)互异性　　(3)无序性

4. 元素与集合的关系

(1)如果 a 是集合 A 的元素，即为 a 属于 A，记做 $a\in A$。

(2)如果 a 不是集合 A 的元素，即为 a 不属于 A，记做 $a\notin A$。

5. 常用数集及记法

N：非负整数集(或自然数集)

N*：正整数集

Z：整数集

Q：有理数集

R：实数集

6. 集合之间的关系

(1)子集：对于两个集合 A，B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 的元素，称为 A 包含于 B 或 B 包含 A，即 A 是 B 的子集，记作：$A\subseteq B$。

(2)相等：如果 A 是 B 的子集，且 B 是 A 的子集，则 A 与 B 中的元素是相同的，称为 A 与 B 相等，记作：$A=B$。

(3)真子集：如果 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$ 且 $x\notin A$，称为 A 是 B 的真子集，记作：$A\subset B$。

(4)空集：不含任何元素的集合，记作：$\varnothing$。

(5)并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，记作：$A\cup B$。

(6)交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，记作：$A\cap B$。

(7)补集：对于集合 A，且 $A\subseteq U$，由全集 U 中不属于 A 的元素组成的集合，称为 A 相对于 U 的补集，记作：C_UA。

7. 集合的性质

(1)若集合中含有 n 个元素，则这个集合的子集有 2^n 个，真子集有 2^n-1 个。

(2)若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$，$A\cup B=B$。

(3) $C_U(C_UA)=A$。

典型例题

题型 1　集合与实数的综合应用

【例 1】若 $A=\{(x, y)\mid xy<0\}$，则集合 A 中的点在第几象限内？(　　)

【解析】因为 $xy<0$，所以 x，y 异号，即集合 A 中的点在第二象限或第四象限内。

【点评】此题本质上是借助集合为载体考查实数运算。

【例 2】若 $A=\{(x, y)\mid y=x\}$，$B=\left\{(x, y)\,\middle|\,\dfrac{y}{x}=1\right\}$，则 A 与 B 的关系是(　　)。

(A) $B\subset A$　　(B) $A\subset B$　　(C) $A\in B$　　(D) $A\notin B$　　(E) $A=B$

【解析】答案是 A。

因为集合 A 中的点满足：$y=x$，集合 B 中的点满足：$y=x$ 且 $x\neq0$。

所以 B 是 A 的真子集。

【点评】首先要识别集合表示的意义，其次要熟练掌握集合与集合之间的包含关系。

题型 2　集合性质的应用

【例 3】集合 $M=\{1, 2, (1, 2)\}$有多少个子集？(　　)

【解析】因为集合 M 中包含 3 个元素，所以子集的个数：$2^3=8$。

【点评】$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$的子集的个数为 2^n，真子集的个数为(2^n-1)。

题型 3　集合之间的关系

【例 4】已知：$A=\{-4, 2, a-1, a^2\}$，$B=\{9, a-5, 1-a\}$，且 $A\cap B=\{9\}$，求 a 的值。

【解析】因为 $a-1=9$ 或 $a^2=9$，所以 $a=10, 3, -3$。

(1)若 $a=10$，则 $A=\{-4, 2, 9, 100\}$，$B=\{9, 5, -9\}$。

(2)若 $a=3$，则 $A=\{-4, 2, 2, 4\}$，因为集合元素的互异性，故舍去。

(3)若 $a=-3$，则 $A=\{-4, 2, -4, 9\}$，因为集合元素的互异性，故舍去。

所以 $a=10$。

【点评】1. $A\cap B=\{9\}$是解决问题的切入点。

2. 集合有三要素：确定性 、互异性、无序性，其中互异性是很重要的一个特征。

【例 5】若 $A=\{0, 2, 4\}$，$C_UA=\{-1, 1\}$，$C_UB=\{-1, 0, 2\}$，求集合 B。

【解析】因为 $U=\{0, 2, 4, -1, 1\}$，所以 $B=\{1, 4\}$。

【点评】对集合补集概念的理解是解决这个问题的关键。

题型 4　集合的表示方法

【例 6】若 $A=\left\{(x, y)\,\middle|\,\begin{cases}y=3x+2\\ y=2x-3\end{cases}\right\}$，则 $C_UA=$ ________。

【解析】由于 $A=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \begin{cases}x=-5\\ y=-13\end{cases}\right\}$,

则 A 的补集为全否，即 $C_UA=\{(x,\ y)\mid x\neq -5$ 或 $y\neq -13\}$。

【点评】集合 A 表达的意义是解决问题的突破口。

同步练习

1. 若 $A=\{(x,\ y)\mid x+y>0,\ xy>0\}$，$B=\{(x,\ y)\mid x>0$ 且 $y>0\}$，则 A 与 B 的关系是(　　)。

   (A)$A\subset B$　(B)$B\subset A$　(C)$A=B$　(D)$A\in B$　(E)$B\in A$

2. 若 $A=\{x\mid x<5\}$，$B=\{x\mid x>0\}$，$C=\{x\mid x\geqslant 10\}$，则 $A\cap B=$________；$B\cap C=$________；$A\cap B\cap C=$________。

3. 已知 $M=\{1\}$，$N=\{1,\ 2\}$，且 $A=\{(x,\ y)\mid x\in M,\ y\in N\}$，$B=\{(x,\ y)\mid x\in N,\ y\in M\}$，则 $A\cap B=$________；$A\cup B=$________。

4. 以正整数为元素的集合 S 中有两个元素，且满足“若 $x\in S$，则 $8-x\in S$”，求集合 S。

5. 下列命题正确的是(　　)。

   (A)若 $U=\{$四边形$\}$，$A=\{$梯形$\}$，则 $C_UA=\{$平行四边形$\}$

   (B)若 U 是全集，且 $A\subseteq B$，则 $C_UA\subseteq C_UB$

   (C)若 $U=\{1,\ 2,\ 3\}$，$A=U$，则 $C_UA=\varnothing$

   (D)若 $U=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，$A=\varnothing$，则 $C_UA=\{1,\ 2\}$

   (E)以上均不正确

6. 设 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$，$A=\{3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{4,\ 7,\ 8\}$，则 $C_UA=$________；$C_UB=$________；$(C_UA)\cap(C_UB)=$________；$(C_UA)\cup(C_UB)=$________。

7. 若 $A=\{(x,\ y)\mid (x+2)(y-3)=0\}$，则 $C_UA=$________。

8. 已知集合 $M=\{(x,\ y)\mid x+y=2\}$，$N=\{(x,\ y)\mid x-y=4\}$，那么集合 $M\cap N=$(　　)。

   (A)$x=3,\ y=-1$　(B)$(3,\ -1)$　(C)$\{3,\ -1\}$　(D)$\{(3,\ -1)\}$

   (E)$\{(-3,\ 1)\}$

参考答案

1. 【解析】答案是 C。

   集合 A：由于 $xy>0$，所以 x，y 同号，且 $x+y>0$，所以 $x>0$ 且 $y>0$，即等价于集合 B。

2. 【解析】$A\cap B=\{x\mid 0<x<5\}$，$B\cap C=\{x\mid x\geqslant 10\}$，$A\cap B\cap C=\varnothing$。

3. 【解析】由于 $A=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2)\}$，$B=\{(1,\ 1),\ (2,\ 1)\}$，所以 $A\cap B=\{(1,\ 1)\}$，$A\cup B=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$。

4. 【解析】由于 $x\in \mathrm{N}^*$，$8-x\in \mathrm{N}^*$，则有：(1)$x=1$，$8-x=7$；(2)$x=2$，$8-x=6$；

(3)$x=3$，$8-x=5$，所以集合 $S=\{1，7\}$，$\{2，6\}$，$\{3，5\}$。

5.【解析】答案是 C。

(A)错误：$C_UA=\{$不规则四边形$\}$。

(B)错误：由于 $A\subseteq B$，则 $C_UB\subseteq C_UA$。

(D)错误：由于 $A=\varnothing$，则 $C_UA=\mathrm{U}$。

6.【解析】$C_UA=\{1，2，6，7，8\}$，$C_UB=\{1，2，3，5，6\}$，$(C_UA)\cap(C_UB)=\{1，2，6\}$，$(C_UA)\cup(C_UB)=\{1，2，3，5，6，7，8\}$。

7.【解析】由于集合 A：$x=-2$ 或 $y=3$，所以 $C_UA=\{(x，y)\mid x\neq -2$ 且 $y\neq 3\}$。

8.【解析】答案是 D。

由于$\begin{cases}x+y=2\\x-y=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$，所以集合 $M\cap N=\{(3，-1)\}$。

第三节　绝对值

知识要点

1. 定义

$|a|\begin{cases}\text{从数的角度：}|a|\geqslant 0\text{，即一个实数的绝对值是非负数。}\\\text{从形的角度：表示数轴上点 }a\text{ 与原点之间的距离。}\end{cases}$

推广：$|a-b|\begin{cases}\text{从数的角度：}|a-b|\geqslant 0\text{。}\\\text{从形的角度：表示数轴上点 }a\text{ 与点 }b\text{ 之间的距离。}\end{cases}$

$|a+b|\begin{cases}\text{从数的角度：}|a+b|\geqslant 0\text{。}\\\text{从形的角度：表示数轴上点 }a\text{ 与点 }-b\text{ 之间的距离。}\end{cases}$

2. 常用公式

(1)$|a|=\begin{cases}a，a\geqslant 0\\-a，a\leqslant 0\end{cases}$　　(2)$|a|=a\Leftrightarrow a\geqslant 0$，$\dfrac{|a|}{a}=1\Leftrightarrow a>0$

(3)$|a|=-a\Leftrightarrow a\leqslant 0$，$\dfrac{|a|}{a}=-1\Leftrightarrow a<0$

3. 非负数模型

如果 $|A|+B^2+\sqrt{C}=0$，那么 $A=B=C=0$。

4. 绝对值方程

(1)若 $|x|=A(A\geqslant 0)$，则 $x=\pm A$。

(2)若 $|x|=|y|$，则 $x=y$ 或 $x=-y$。

5. 绝对值不等式

(1)若 $|x|\leqslant|y|$，则 $x^2\leqslant y^2$。　　(2)若 $|x|\geqslant|y|$，则 $x^2\geqslant y^2$。

(3)若 $|x|<A$，则 $-A<x<A$。　　(4)若 $|x|\leqslant A$，则 $-A\leqslant x\leqslant A$。

(5)若$|x|>A$，则$x>A$或$x<-A$。(6)若$|x|\geqslant A$，则$x\geqslant A$或$x\leqslant -A$。

6. 两个结论

(1) $|x-a|+|x-b|\geqslant|a-b|$

(2) $-|a-b|\leqslant|x-a|-|x-b|\leqslant|a-b|$

7. 四个成立

(1)如果$f(x)\geqslant A$恒成立，那么$f(x)$的最小值大于等于A。

(2)如果$f(x)\leqslant A$恒成立，那么$f(x)$的最大值小于等于A。

(3)如果$f(x)\geqslant A$能成立，那么$f(x)$的最大值大于等于A。

(4)如果$f(x)\leqslant A$能成立，那么$f(x)$的最小值小于等于A。

典型例题

题型1 绝对值常用公式的运用

【例1】已知$\left|\dfrac{3-2x}{3}\right|=\dfrac{2x-3}{3}$，求$x$的取值范围。

【解析】因为$\dfrac{3-2x}{3}\leqslant 0$，所以$3-2x\leqslant 0$，即$x\geqslant\dfrac{3}{2}$。

【点评】$|a|=a\Leftrightarrow a\geqslant 0$；$|a|=-a\Leftrightarrow a\leqslant 0$。

【例2】求满足下列条件的x。

(1) $|x-3|=8$　(2) $|x-3|\leqslant 8$　(3) $|x-3|>8$

【解析】(1)因为$x-3=8$或$x-3=-8$，所以$x=11$或-5。

(2)因为$-8\leqslant x-3\leqslant 8$，所以$-5\leqslant x\leqslant 11$。

(3)因为$x-3>8$或$x-3<-8$，所以$x>11$或$x<-5$。

【点评】

1. 解绝对值方程和绝对值不等式的常规方法是去绝对值符号。
2. 根据绝对值的常用公式去绝对值符号。

【例3】使得$\dfrac{2}{|x-2|-2}$不存在的x是(　　)。

(A)4　(B)0　(C)4或0　(D)1　(E)0或1

【解析】答案是C。

因为$|x-2|-2=0$，所以$x-2=\pm 2$，即$x=0$或4。

【点评】“‘不存在’是什么意思”这句话是解决问题的关键，进而转化为常见的绝对值方程来解决。

【例4】(充分性判断)$\dfrac{|a|}{a}-\dfrac{|b|}{b}=-2$。(　　)

(1) $a<0$　(2) $b>0$

【解析】答案是C。

显然条件(1)、条件(2)单独都不充分，那么条件(1)、条件(2)联合有$\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}$，

所以$\frac{|a|}{a}-\frac{|b|}{b}=-1-1=-2$，即条件(1)和条件(2)联合起来充分。

【点评】

1. 对绝对值概念的理解。

2. 处理充分性判断问题常见的解决方法要熟练和灵活。

题型 2　非负数模型的应用

【例 5】已知$(x-2y+1)^2+\sqrt{x-1}+|2x-y+z|=0$，则$x^{y+z}=(\quad)$。

(A)1　(B)2　(C)$\frac{1}{2}$　(D)3　(E)$\frac{2}{3}$

【解析】答案是 A。

由非负数模型可知$\begin{cases}x-2y+1=0\\x-1=0\\2x-y+z=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}x=1\\y=1\\z=-1\end{cases}$，

即$x^{y+z}=1^0=1$。

【点评】

1. 若干个非负数和等于 0 的模型考查。

2. 变式：若$\sqrt{x-1}+a^2+b^2=2a-6b-10$，则$x^2-2a+3b=(\quad)$。

(A)7　(B)-9　(C)10　(D)-10　(E)15

【解析】答案是 D。

由于$\sqrt{x-1}+(a^2-2a+1)+(b^2+6b+9)=0$，$\sqrt{x-1}+(a-1)^2+(b+3)^2=0$，所以$x=1$，$a=1$，$b=-3$，则$x^2-2a+3b=-10$。

题型 3　两个特例与四个成立的综合

【例 6】如果关于x的不等式$|3-x|+|x-2|<a$的解集是空集，则a的取值范围是

(A)$a<1$　(B)$a\leqslant1$　(C)$a>1$　(D)$a\geqslant1$　(E)$a\neq1$

【解析】答案是 B。

由于$|3-x|+|x-2|<a$的解集是空集，等价于$|3-x|+|x-2|\geqslant a$恒成立。

令$f(x)=|3-x|+|x-2|$。

由 4 个成立可知，$f(x)_{\min}\geqslant a$，又因为$f(x)\geqslant1$，则$f(x)_{\min}=1$，所以$a\leqslant1$。

【点评】

1."解集是空集"是解决问题的关键。从另外一个方面说明$|3-x|+|x-2|\geqslant a$恒成立。

2. 掌握常规模型

(1)$|x-a|+|x-b|\geqslant|a-b|$

(2) $-|a-b| \leqslant |x-a|-|x-b| \leqslant |a-b|$

3. 掌握恒成立与能成立的常规模型：

(1)如果 $f(x) \geqslant A$ 恒成立，那么 $f(x)$ 的最小值大于等于 A。

(2)如果 $f(x) \leqslant A$ 恒成立，那么 $f(x)$ 的最大值小于等于 A。

(3)如果 $f(x) \geqslant A$ 能成立，那么 $f(x)$ 的最大值大于等于 A。

(4)如果 $f(x) \leqslant A$ 能成立，那么 $f(x)$ 的最小值小于等于 A。

4. 变式 1：(充分性判断)不等式 $|x-2|+|4-x|<s$ 无解。(　　)

(1) $s \leqslant 2$　　　　　　　　(2) $s>2$

【解析】答案是 A。

先把结论进行化简，由于 $|x-2|+|4-x| \geqslant s$ 恒成立，

令 $f(x)=|x-2|+|4-x|$，

由 4 个成立可知，$f(x)_{\min} \geqslant s$，又因为 $f(x) \geqslant 2$，则 $f(x)_{\min}=2$，所以 $s \leqslant 2$。

利用集合法进行判断，则条件(1)充分，条件(2)不充分。

变式 2：若不等式 $|x+3|-|x-6|>a$ 有解，则 a 的取值范围是(　　)。

(A) $a>-9$　　(B) $a \leqslant -9$　　(C) $a \leqslant 9$　　(D) $a<9$　　(E) $a>9$

【解析】答案是 D。

由于 $|x+3|-|x-6|>a$ 能成立，令 $f(x)=|x+3|-|x-6|$：

由 4 个成立可知，$f(x)_{\max}>a$，又因为 $-9 \leqslant f(x) \leqslant 9$，则 $f(x)_{\max}=9$，所以 $a<9$。

【点评】

1. 注意区分变式

2. 请大家掌握好绝对值中的两个最值模型：

(1) $[|kx-a|+|kx-b|]_{\min}=|a-b|$

(2) $[|kx-a|-|kx-b|]_{\min}=-|a-b|$

$[|kx-a|-|kx-b|]_{\max}=|a-b|$

题型 4　用图像解决含绝对值的方程问题

【例 7】(充分性判断)方程 $|x+2|+|x-8|=a$ 有无数正根。(　　)

(1) $-4<a<4$　　　　　　　　(2) $a=4$

【解析】答案是 E。

先把结论进行化简，令 $f(x)=|x+2|+|x-8|$，则

$$f(x)=\begin{cases}-2x+6\,(x \leqslant -2)\\ 10\,(-2<x<8)\\ 2x-6\,(x \geqslant 8)\end{cases}$$

由于 $f(x)=a$ 表示平行于 x 轴的直线，由图 1-1 可知 $a=10$。

显然条件(1)，条件(2)单独和联合起来都不充分。

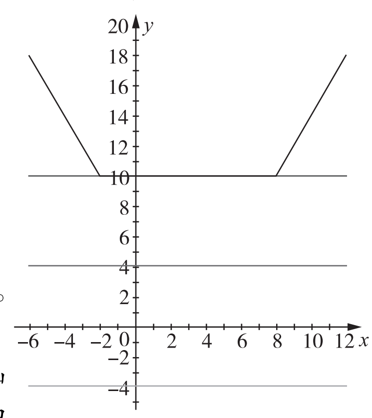


图 1-1

【点评】方程 $|x-2|+|x+8|=a$ 的解可以理解为函数 $y=|x+2|+|x-8|$ 的图像与 $y=a$ 的图像的交点，即

充分利用图像来解决问题。

同步练习

1. 如果 $|a|=\frac{1}{2}$，$|b|=1$，那么 $|a+b|=$（　　）。

(A) $\frac{3}{2}$ 或 0　(B) $\frac{1}{2}$ 或 0　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$　(E) $\frac{1}{2}$ 或 -1

2. 如果 $\frac{|x+y|}{x-y}=2$，那么 $\frac{x}{y}=$（　　）。

(A) $\frac{1}{2}$　(B) 3　(C) $\frac{1}{3}$ 或 3　(D) $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$　(E) 3 或 $\frac{1}{2}$

3. 若 $|a-1|=3$，$|b|=4$，$b>ab$，则 $|a-1-b|=$（　　）。

(A) 1　(B) 7　(C) 5　(D) 16　(E) 9

4. 若 $x<-2$，则 $|1-|1+x||$ 的值等于（　　）。

(A) $-x$　(B) x　(C) $2+x$　(D) $-2-x$

(E) 以上均不正确

5. 若 $|a-b|=|a|+|b|$ 成立，a，$b\in R$，则下列各式中一定成立的是（　　）。

(A) $ab<0$　(B) $ab\leqslant 0$　(C) $ab>0$　(D) $ab\geqslant 0$

(E) 以上均不正确

6. 使得 $\frac{2}{|x-2|-1}$ 不存在的 x 是方程 $(x^2-4x+4)-a(x-2)^2=b$ 的一个根，则 $a+b=$（　　）。

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2　(E) 5

7. 若 a、b、c 是非零实数，则代数式 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的所有值的集合是（　　）。

(A) $\{-4,\ -2,\ 2,\ 4\}$　(B) $\{-4,\ 0,\ 4\}$　(C) $\{4,\ 2,\ 0,\ -4\}$

(D) $\{-3,\ 0,\ 2\}$　(E) 无法确定

8. 若 $|x^2-4xy+5y^2|+\sqrt{z+1}-2y+1=0$，则 $x^{y+z}=$（　　）。

(A) 0　(B) 1　(C) 4　(D) 5　(E) 6

9. 已知 a，b，c 为实数，且 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=1$，那么 $6-\frac{abc}{|abc|}$ 的值为（　　）。

(A) 3　(B) 5　(C) 7　(D) 9　(E) 10

10. 已知 $|ab-2|$ 与 $|a-1|$ 互为相反数，那么 $\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+2)(b+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+2014)(b+2014)}=$（　　）。

(A) $\frac{2013}{2014}$　(B) $\frac{2014}{2015}$　(C) $\frac{2015}{2016}$　(D) $\frac{2016}{2017}$　(E) $\frac{2017}{2018}$

11. 若$|a-1|+(b+2)^2=0$，则$(a+b)^{2013}+(a+b)^{2012}+\cdots+(a+b)^2+a+b=($　　)。

(A) -2　　(B) -1　　(C)0　　(D)1　　(E)2

12. 满足关系式$\dfrac{|x-1|-1}{x-2}=0$的x是(　　)。

(A)0　　(B) 2　　(C)0 或 2　　(D)0 或 -2　　(E)2 或 -2

13. (充分性判断) $\left|\dfrac{3}{2x-1}\right|=\dfrac{3}{1-2x}$。(　　)

(1)$x\in(0,\ \dfrac{1}{2})$　　(2)$x\in(-\infty,\ \dfrac{1}{2}]$

14. (充分性判断)$|x-2|+|x+1|=3$。(　　)

(1)$x<2$　　(2)$x>-1$

15. (充分性判断)不等式$|ax+2|<6$的解集为$-1<x<2$。(　　)

(1)$a=2$　　(2)$a=-1$

16. 不等式$|x+1|(2x-1)\geqslant 0$的解集为(　　)。

(A)$x\geqslant\dfrac{1}{2}$　　(B)$x\geqslant\dfrac{1}{2}$或$x\leqslant -1$　　(C)$x\geqslant\dfrac{1}{2}$或$x=-1$

(D) $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$　　(E)$x\leqslant -1$

17. (充分性判断)$|x|(1-2x)>0$。(　　)

(1)$x<0$　　(2)$0<x<\dfrac{1}{2}$

18. (充分性判断)存在x使得不等式$|x+1|+|x-3|\leqslant a$成立。(　　)

(1)$a=1$　　(2)$a=2$

19. 若$\dfrac{\sqrt{3a-b}+|a^2-49|}{\sqrt{a+7}}=0$，则$b-a$的值为(　　)。

(A)14 或 28　　(B)14　　(C)28　　(D)30　　(E)28 或 30

20. (充分性判断)不等式$|x-5|-|x+2|\leqslant a$有解。(　　)

(1)$a\leqslant -7$　　(2)$a\geqslant 7$

参考答案

1.【解析】答案是 D。

由于$a=\pm\dfrac{1}{2}$，$b=\pm 1$，所以：

(1)若$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$，则有$|a+b|=\dfrac{3}{2}$；

(2)若$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=-1$，则有$|a+b|=\dfrac{3}{2}$；

(3)若 $a=-\frac{1}{2}$，$b=1$，则有 $|a+b|=\frac{1}{2}$；

(4)若 $a=\frac{1}{2}$，$b=-1$，则有 $|a+b|=\frac{1}{2}$。

综上所述：$|a+b|=\frac{3}{2}$或$\frac{1}{2}$。

2.【解析】答案是 C。

(1)若 $x+y\geqslant 0$，则有 $x+y=2x-2y$，即 $3y=x$，所以$\frac{x}{y}=3$。

(2)若 $x+y<0$，则有 $-(x+y)=2x-2y$，即 $3x=y$，所以$\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$。

综上所述：$\frac{x}{y}=3$ 或$\frac{1}{3}$。

3.【解析】答案是 B。

由于 $a-1=\pm 3$，所以 $a=-2$ 或 4，且 $b=\pm 4$。

由于 $b(1-a)>0$，解得：$b>0$，$a<1$ 或 $b<0$，$a>1$，则有 $b=4$，$a=-2$ 或 $b=-4$，$a=4$，所以$|a-1-b|=7$。

4.【解析】答案是 D。

由于 $x<-2$，则有 $1+x<-1$ 为负数。

所以$|1-|1+x||=|1+(1+x)|=|x+2|=-(x+2)=-x-2$。

5.【解析】答案是 B。

由绝对值的几何意义可知：

(1)若 a，b 都是正数，则$|a-b|=|b|-|a|$或$|a|-|b|$；

(2)若 a，b 都是负数，则$|a-b|=|b|-|a|$或$|a|-|b|$；

(3)若 a，b 是一个正数一个负数，则$|a-b|=|a|+|b|$；

(4)若 $a=0$，则$|-b|=|b|$成立；

(5)若 $b=0$，则$|a|=|a|$成立。

综上所述：$ab\leqslant 0$。

6.【解析】答案是 C。

由于$|x-2|-1=0$，解得：$x=3$ 或 1。

由于$(x-2)^2-a(x-2)^2=b$，所以$(x-2)^2(1-a)=b$。

(1)当 $x=3$ 时，则有 $1-a=b$；

(2)当 $x=1$ 时，则有 $1-a=b$。

综上所述：$a+b=1$。

7.【解析】答案是 B。

(1)若 a，b，c 都是正数，则原式 $=1+1+1+1=4$；

(2)若 a，b，c 都是负数，则原式 $=-1-1-1-1=-4$；

(3)若 a，b，c 是一个正数两个负数，则原式 $=1-1-1+1=0$；

(4)若 a，b，c 是一个负数两个正数，则原式 $=-1+1+1-1=0$。

综上所述：原式 $=\{4,0,-4\}$。

8.【解析】答案是 B。

由于 $|(x-2y)^2+y^2|+\sqrt{z+1}-2y+1=0$，所以 $(x-2y)^2+\sqrt{z+1}+(y-1)^2=0$。

由非负数模型可知 $\begin{cases}x-2y=0\\z+1=0\\y-1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=-1\end{cases}$，所以 $2^0=1$。

9.【解析】答案是 C。

(1)若 a，b，c 都是正数，则 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=1+1+1=3$；

(2)若 a，b，c 都是负数，则 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=-1-1-1=-3$；

(3)若 a，b，c 是一个正数两个负数，则 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=1-1-1=-1$；

(4)若 a，b，c 是一个负数两个正数，则 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}=-1+1+1=1$；

所以 a，b，c 是一个负数两个正数，则有 $6-\frac{abc}{|abc|}=6-(-1)=7$。

10.【解析】答案是 C。

由于 $|ab-2|+|a-1|=0$，所以 $ab=2$，$a=1$，解得：$b=2$，$a=1$。

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2015\times2016}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right)\\&=1-\frac{1}{2016}=\frac{2015}{2016}\end{aligned}$$

11.【解析】答案是 B。

由于 $a=1$，$b=-2$，则有 $a+b=-1$，

所以原式 $=(-1)^{2013}+(-1)^{2012}+\cdots+(-1)^2+(-1)=-1+1-\cdots+1-1=-1$。

12.【解析】答案是 A。

由于 $|x-1|=1$ 且 $x\neq2$，解得：$x=0$。

13.【解析】答案是 A。

先把结论进行化简，由于 $2x-1<0$，解得：$x<\frac{1}{2}$。

由集合法可知，条件(1)充分，条件(2)不充分。

14.【解析】答案是 C。

先把结论进行化简，

令 $y=|x-2|+|x+1|=\begin{cases}2x-1(x\geqslant2)\\3(-1<x<2)\\-2x+1(x\leqslant-1)\end{cases}$，由于 $y=3$，所以 $-1<x<2$。

显然条件(1)，条件(2)单独都不充分，条件(1)和条件(2)联合起来充分。

15.【解析】答案是 E。

先把结论进行化简，由于 $-6<ax+2<6$，所以 $-8<ax<4$。

(1)若 $a>0$，则有 $-\frac{8}{a}<x<\frac{4}{a}$，即 $-\frac{8}{a}=-1$ 且 $\frac{4}{a}=2$，此时 a 无解；

(2)若 $a<0$，则有 $\frac{4}{a}<x<-\frac{8}{a}$，即 $\frac{4}{a}=-1$ 且 $-\frac{8}{a}=2$，此时 $a=-4$。

显然条件(1)，条件(2)单独和联合起来都不充分。

16.【解析】答案是 C。

(1)若 $|x+1|=0$，则 $x=-1$；

(2)若 $|x+1|>0$，则 $x\neq-1$ 且 $2x-1\geqslant0$，解得：$x\geqslant\frac{1}{2}$。

综上所述：$x=-1$ 或 $x\geqslant\frac{1}{2}$。

17.【解析】答案是 D。

先把结论进行化简，由于 $x\neq0$ 且 $1-2x>0$，解得：$x<\frac{1}{2}$且 $x\neq0$。

由集合法可知，条件(1)充分，条件(2)充分。

18.【解析】答案是 E。

先把结论进行化简，令 $y=|x+1|+|x-3|$，由于 $y\leqslant a$ 能成立，则有 $y_{\min}\leqslant a$。

由于 $y\geqslant4$，则有 $4\leqslant a$。

由集合法可知，条件(1)，条件(2)单独和联合起来都不充分。

19.【解析】答案是 B。

由非负数模型可知$\begin{cases}3a-b=0\\a^2-49=0\\a+7>0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=7\\b=21\end{cases}$，所以 $b-a=14$。

20.【解析】答案是 B。

先把结论进行化简，令 $y=|x-5|-|x+2|$，由于 $y\leqslant a$ 能成立，则有 $y_{\min}\leqslant a$。

由于 $-7\leqslant y\leqslant7$，所以 $-7\leqslant a$。

由集合法可知，条件(1)不充分，条件(2)充分。