第 3 章

CHAPTER 3

电路的暂态过程

前面我们讲过无源元件，包括电阻、电容和电感元件。电阻元件是将电能转化为热能，这种转换是不可逆的，故称为耗能元件。而电容和电感元件能将电源提供的能量转换为其他形式的能量并存储起来，称为储能元件。

直流电路的分析与计算，是在电路长期处于稳定状态下进行的，稳定状态简称“稳态”。而在含有储能元件的电路中，电路发生变化的瞬间到稳定状态之间，或者电路由一种稳定状态到另一种稳定状态之间总有一个“过渡过程”，即“暂时状态”，简称“暂态”。本章主要分析暂态过程中电路的电压和电流。

3.1 电容元件和电感元件

3.1.1 电容元件

电容器由两块彼此靠近、中间被线性介质绝缘的金属板构成，介质有空气、绝缘纸、云母、陶瓷等。电容器能够存储和释放电场能量。用电容元件来表示电容器存储电荷的电磁特性，其符号及规定的电压和电流参考方向如图 3.1 所示。

图 3.1 电容元件

在电容元件两端加上电压 u，电容被充电，两极板上将出现电量相等的异性电荷 q（单位库仑），两极板间形成电场。两极板的电荷量为

$$q = Cu \tag{3.1}$$

其中，C 为电容器的电容量，简称电容，反映了电容器存储电荷的能力。电容的单位是法拉（F），工程上常用微法（μF）或皮法（pF），换算关系为

$$1\mu F = 10^{-6} F$$

$$1pF = 10^{-6}\mu F = 10^{-12} F$$

根据式（3.1），电容可以表示为

$$C = \frac{q}{u} \tag{3.2}$$

电容的大小与制造工艺有关，有

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{3.3}$$

其中，A 为两个极板相对面积，d 为极板间距离，ε 为介质的介电常数。

当两极板上的电荷量 q 发生变化时，电路中就会产生电流，即电流等于极板间电荷的时

间变化率：

$$i=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.4}$$

式(3.4)是在 u 和 i 关联参考方向下(如图 3.1 所示)得出的，如果 u 和 i 是非关联参考方向，则等式右边要加一个负号。当电压恒定时，电压变化率为零，电流为零，故**电容元件在直流电路中相当于开路**。

当电容元件两端电压增加时，电容元件从电源取用能量(充电)，并以电场能量的形式储存在极板之间，电场能量增大；当电压减小时，电容元件将储存的电能释放出来(放电)，电容的电场能量减小。它通过加在两端电压的变化来进行能量交换，本身不消耗能量。电容器存储能量的计算公式为

$$W_C=\int_0^t ui\,\mathrm{d}t=\int_0^u Cu\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}Cu^2 \tag{3.5}$$

3.1.2 电感元件

电感器是用漆包线或纱包线在绝缘管上绕一定的圈数构成，绝缘管可以是空心的，也可以装有磁心或铁芯。若线圈中无铁磁物质(即空心)，称为线性线圈，它能够存储和释放磁场能量。电感元件用来表示电感器的主要电磁特性，如图 3.2 所示。

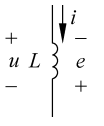


图 3.2 电感元件

线圈中通以电流 i，将在其周围激发磁场，从而在线圈中形成与电流相交链的磁通 Φ，两者的方向遵循右手定则。假设该线圈有 N 匝，将每匝线圈相连的磁通之和称为该线圈的磁链，记为 Ψ，则有

$$\Psi=N\Phi \tag{3.6}$$

磁链 Ψ 与通过线圈的电流 i 之比，称为电感，即

$$L=\frac{\Psi}{i}\quad 或\quad \Psi=Li \tag{3.7}$$

Ψ 和 Φ 的单位为韦伯(Wb)，电感的单位为亨利(H)，工程上常使用毫亨(mH)，换算关系为

$$1\mathrm{mH}=10^{-3}\mathrm{H}$$

当电路中的电流发生变化时，Ψ 和 Φ 都将发生变化，并在线圈中产生感生电动势 e。图 3.2 中，由电磁感应定律可得线圈的感生电动势为

$$e=-N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \tag{3.8}$$

将式(3.7)代入，得

$$u=-e=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{3.9}$$

当电流恒定时，电流变化率为零，电压为零，故**电感元件在直流电路中相当于短路**。

当流过电感元件的电流增大时，电感元件从电源取用能量，并转换为磁场能量存储在电感元件中，磁场能量增大；当电流减小时，电感元件释放能量，转换为其他形式的能量，磁场能量减小。因此，电感元件是一种储能元件，它通过流过电流的变化进行能量转换，本身不消耗能量。电感元件存储能量的计算公式为

$$W_L = \int_0^t ui\,\mathrm{d}t = \int_0^i Li\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}Li^2 \tag{3.10}$$

3.2　换路定则和初始值

电路的暂态过程是在电路发生变化(如接通、切断、短路、参数变化、连接形式的改变等)时出现的,将这些改变简称为“换路”。在换路过程中,电路中的能量将发生变化,但能量是不能跃变的,因此,换路之后必然出现一个能量连续变化的过程。

含有储能元件的电路中,稳态时,电容元件存储的电场能量和电感元件存储的磁场能量通常不能发生跃变,原因很简单,如电容元件,当其电场能量跃变时,根据式(3.4),其电压将发生跃变,使得 $\mathrm{d}u(t)/\mathrm{d}t=\infty$,则 $i=\infty$,这显然是不可能的。根据式(3.9)同样可知,电感元件的磁场能量也不可能跃变。

由以上分析可以看出:含有储能元件的电路发生换路时,在换路瞬间,电容元件的电压 u_C 和电感元件的电流 i_L 均不能跃变,即保持换路前瞬间的数值,称之为**换路定则**。

设 $t=0$ 为换路瞬间,$t=0_-$ 为换路前的一瞬间,$t=0_+$ 为换路后的一瞬间,则换路定则可表示为

$$u_C(0_+)=u_C(0_-) \tag{3.11}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-) \tag{3.12}$$

在 $t=0_+$ 瞬间,电路中各元件的电压和电流,称为**初始值**,如电容元件的电压初始值表示为 $u_C(0_+)$,电感元件的电流初始值表示为 $i_L(0_+)$等。

式(3.11)和式(3.12)说明换路瞬间,电容元件两端的电压和电感元件流过的电流是“连续的”。换路定则使用时应注意以下几点。

(1) 换路定则只适用于换路瞬间。

(2) 0_+ 和 0_- 在数值上都等于 0,0_+ 指从正值趋于 0,0_- 指从负值趋于 0。

(3) 在换路过程中,除了电容元件的电压 u_C 和电感元件的电流 i_L,其他元件的电压、电流都可以跃变。

(4) 在 $t=0_+$ 瞬间,电容元件可用 $U_S=u_C(0_-)$的电压源置换,电感元件可用 $I_S=i_L(0_-)$的电流源置换,进而求解除 $u_C(0_+)$和 $i_L(0_+)$之外的初始值。

下面举例说明如何用换路定则确定电路元件参数的初始值。

【例 3.1】 在如图 3.3 所示电路中,$R_1=1\mathrm{k}\Omega$,$R_2=2\mathrm{k}\Omega$,$C=10\mu\mathrm{F}$,$L=10\mathrm{mH}$,$I_S=1\mathrm{mA}$,$t=0$ 时开关 S 打开,求电路中各支路电流、电感和电容元件电压的初始值。

【解】 由换路定则得

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$

由 KCL 得

$$i_1(0_+)=0$$

$$i_C(0_+)=I_S-i_L(0_+)=1-0=1(\mathrm{mA})$$

由 KVL 得

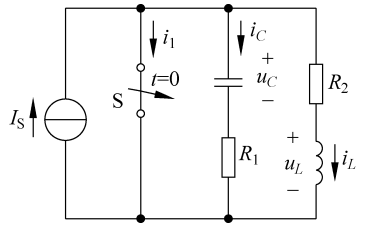


图 3.3　例 3.1 图

视频 3.1

$$u_L(0_+)=u_C(0_+)+R_1 i_C(0_+)-R_2 i_L(0_+)$$
$$=0+1\times10^3\times1\times10^{-3}-0$$
$$=1(\mathrm{V})$$

3.3 RC 电路的响应

只包含一个储能元件或者经过等效简化后只有一个独立储能元件的线性电路，其微分方程都是一阶常系数线性微分方程，这种电路统称为一阶电路。

3.3.1 RC 电路的零输入响应

零输入响应是指电路中没有外加激励的作用，仅由储能元件的原始储能引起的响应。在如图 3.4 所示电路中，换路前开关 S 处在位置 1 上，电源对电容充电。换路后开关 S 处在位置 2 上，RC 电路与电源断开，于是电容 C 通过电阻 R 放电，电路中的响应 u_C、u_R、i 均是由电容元件的原始储能引起的，即 RC 电路的零输入响应。

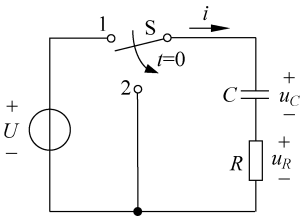


图 3.4 RC 电路零输入响应电路

换路后，根据 KVL 可列出电路方程为：

$$u_C+u_R=0 \tag{3.13}$$

即

$$u_C+Ri=0 \tag{3.14}$$

代入 $i=C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$，得

$$u_C+RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=0 \tag{3.15}$$

式(3.15)为一阶常系数齐次微分方程，令其通解为：

$$u_C=A\mathrm{e}^{pt} \tag{3.16}$$

代入式(3.15)，消除公因子 $A\mathrm{e}^{pt}$，得该微分方程的特征方程为：

$$RCp+1=0$$

其特征根为：

$$p=-\frac{1}{RC}$$

故式(3.15)的通解为：

$$u_C=A\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \tag{3.17}$$

可以通过电路的初始值确定积分常数 A。设 $t=0_+$ 时刻，电容元件充电电压 $u_C(0_+)=U_0$，则 $A=U_0$，式(3.17)可写为：

$$u_C=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}=U_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \tag{3.18}$$

其随时间按照指数规律衰减，当暂态过程结束，电路处于稳定状态时，电容两端的电压等于 0。设

$$\tau=RC \tag{3.19}$$

τ 具有时间的量纲，称其为 RC 电路的时间常数。式(3.18)可重写为：

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

当 $t=\tau$ 时，得

$$u_C = U_0 e^{-1} = 0.368U_0 \tag{3.20}$$

可见，时间常数 τ 是电容元件从初始值 U_0 放电到 $0.368U_0$ 所需的时间。τ 与 R 和 C 的乘积有关，R、C 越大，τ 也越大。在一定的初始电压 U_0 下，R 越大，放电电流越小，电容两极板的电荷全部放掉需要的时间就越长；而 C 越大，电容充到电压 U_0 所存储的电荷就越多，放电时间也就越长。时间常数 τ 反映了暂态过程持续时间的长短，从理论上来看，只有经过 $t=\infty$ 时间，电路才会达到新的稳定状态。但实际工程上认为经过 $t=3\tau\sim5\tau$ 时间，暂态过程就已结束。暂态过程非常短暂，时间常数 τ 的数量级在毫秒或微秒范围。

【例 3.2】 图 3.5 所示电路中，电源电压 $U=100\text{V}$，$R_1=3\Omega$，$R_2=6\Omega$，$R=2\Omega$，$C=10\mu\text{F}$，开关 S 打开前电路已处于稳定状态，$t=0$ 时开关 S 打开，经过 $t_1=10\mu\text{s}$ 时，试计算电容元件的电压 $u_C(t_1)$。

【解】 $t=0_-$ 时，

$$u_C(0_-) = \frac{R_1//R_2}{R_1//R_2+R}U = \frac{\frac{3\times6}{3+6}}{\frac{3\times6}{3+6}+2}\times100 = 50(\text{V})$$

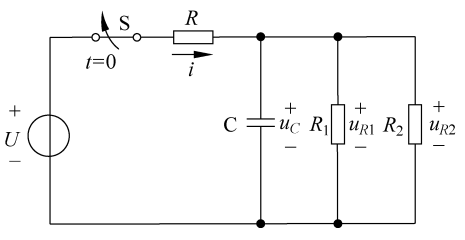


图 3.5　例 3.2 图

视频 3.2

根据换路定则，得

$$U_0 = u_C(0_+) = u_C(0_-) = 50(\text{V})$$

换路后，电压源与右侧电路断开，不起作用，电容元件 C 通过电阻 R_1 和 R_2 支路放电，时间常数为

$$\tau = (R_1//R_2)C = \frac{3\times6}{3+6}\times10\times10^{-6} = 20(\mu\text{s})$$

根据 RC 电路零输入响应表达式，得

$$u_C(t_1) = 50e^{-\frac{10\times10^{-6}}{20\times10^{-6}}} = 50e^{-0.5} = 50\times0.607 = 30.35(\text{V})$$

3.3.2　RC 电路的零状态响应

零状态响应是指电路中储能元件的原始储能为 0，电路的响应是由电源激励所产生的。在如图 3.6 所示电路中，换路前开关 S 断开，电容两极板上没有电荷，电容元件电压等于 0。换路后开关 S 闭合，电容元件开始充电，当电容电压等于电源电压时，电路达到稳态，电路中的响应 u_C、u_R、i 均是由电源作用引起的，即 RC 电路的零状态响应。

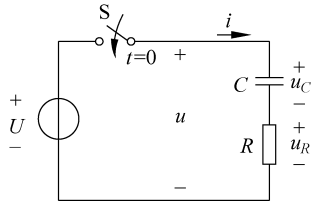


图 3.6　RC 电路零状态响应电路

换路前后的电路相当于在 RC 支路电路加上一个阶跃电压 u，其表达式为

$$u = \begin{cases} 0, & t<0 \\ U, & t\geqslant0 \end{cases} \tag{3.21}$$

换路后，根据 KVL 可列出电路方程为

$$U = u_R + u_C = Ri + u_C = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C \tag{3.22}$$

式(3.22)为一阶常系数非齐次微分方程，其通解包括两部分：齐次方程通解和非齐次方程特解。齐次方程通解即为式(3.16)的解 $A\mathrm{e}^{pt}$，且 $p=-1/(RC)$。非齐次方程的特解即换路后的稳态值，故式(3.22)的通解为

$$u_C = A\mathrm{e}^{pt} + U = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} + U \tag{3.23}$$

积分常数 A 仍可以通过电路的初始值确定，即 $A=-U$。

因此，RC 电路的零状态响应为

$$u_C = A\mathrm{e}^{pt} + U = U - U\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} = U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = u_C(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{3.24}$$

$$u_R = U - u_C = U\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3.25}$$

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3.26}$$

其中，时间常数 $\tau=RC$。可见，式(3.24)由两个分量组成：一个是不随时间变化的稳态分量 $u'_C=U$，其变化规律和大小都与电源电压有关；另一个是按指数规律衰减的暂态分量 $u''_C=-U\mathrm{e}^{-t/\tau}$，其大小与电源电压有关。当 $t=\tau$ 时，得

$$u_C = U(1-\mathrm{e}^{-1}) = U(1-0.368) = 0.632U \tag{3.27}$$

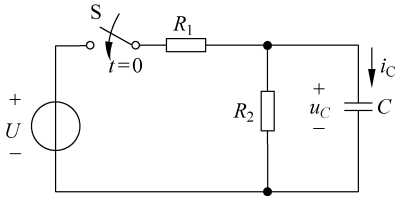


图 3.7　例 3.3 图

【例 3.3】　在如图 3.7 所示的电路中，$U=9\mathrm{V}$，$R_1=6\mathrm{k\Omega}$，$R_2=9\mathrm{k\Omega}$，$C=1000\mathrm{pF}$，$u_C(0_-)=0\mathrm{V}$。当 $t=0$ 时开关闭合，求 $t\geqslant 0$ 时的电压 u_C。

【解】

$$\tau = (R_1 // R_2)C = \frac{6\times10^3\times9\times10^3}{(6+9)\times10^3}\times1000\times10^{-12} = 3.6(\mu\mathrm{s})$$

$$u_C = U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = 9 - 9\mathrm{e}^{-\frac{t}{3.6\times10^{-6}}}\mathrm{V}$$

3.3.3　RC 电路的全响应

全响应是指电源激励和储能元件的初始值均不为 0，电路的响应称为全响应，即零输入响应和零状态响应的叠加。在如图 3.6 所示的电路中，若换路前 $u_C(0_-)=U_0$，换路后电路 KVL 方程同式(3.22)，故其通解为 $u_C=A\mathrm{e}^{pt}+U$。但两种情况下电容两极板上电压初始值不同，因此积分常数 A 的值不同，但仍可以通过电路的初始值来确定。

在 $t=0_+$ 时刻，$u_C(0_+)=U_0$，则 $A=U_0-U$，此时电容电压为

$$u_C = U + A\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} = U + (U_0-U)\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} = U + (U_0-U)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3.28}$$

或

$$u_C = U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{3.29}$$

其中，时间常数 $\tau=RC$。显然，式(3.29)中第一项同式(3.19)，即零输入响应；第二项同式(3.24)，即零状态响应。故一阶电路的全响应可写为

全响应＝零输入响应＋零状态响应

因此，**电路暂态分析中的全响应是零状态响应和零输入响应叠加的结果**。

式(3.28)也包括两项：第一项是稳态分量，即换路后达到稳定状态时电容的电压值；第二项是暂态分量，故全响应还可以写为

全响应＝稳态分量＋暂态分量

3.4　RL 电路的响应

3.4.1　RL 电路的零输入响应

图 3.8 所示是一个 RL 串联电路，$t<0$ 时，开关位于 1 处，电路已处于稳态，当 $t=0$ 时，开关位于位置 2 处。由图 3.8 可知，当 $t\geqslant 0$ 时，无外接激励，电路为零输入电路。当 $t<0$ 时，有

$$i_L(0_-)=\frac{U}{R}$$

$t>0$ 时，根据 KVL 方程，有

$$u_R+u_L=0$$

即

$$i_L R+L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=0$$

这是一个一阶常系数齐次线性方程，对应的特征方程为

$$p+\frac{R}{L}=0$$

特征根为

$$p=-\frac{R}{L}$$

通解为

$$i_L(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\frac{L}{R}}}$$

根据换路定则有 $i_L(0_-)=i_L(0_+)$，代入上式得电感元件电流的零输入响应为

$$i_L(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\frac{L}{R}}}=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3.30}$$

其中

$$\tau=\frac{L}{R} \tag{3.31}$$

称为 RL 电路的时间常数。当电阻单位为欧姆，电感单位取亨时，单位为秒。RL 电路的零输入响应与 RC 电路的零输入响应类似，当 t 为$(3\sim5)\tau$ 时，i_L 稳态值仅为 $i_L(0_+)$时的 5%～0.7%。

3.4.2　RL 电路的零状态响应

对于如图 3.9 所示的电路，当 $t<0$ 时，电路处于稳态，即 $i_L(0_-)=0$，电路为零状态。

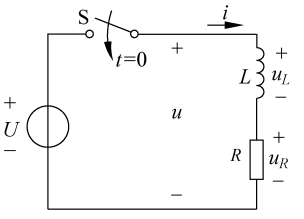


图 3.9　RL 电路零状态响应电路

当 $t=0$ 时，开关闭合。$t>0$ 时，根据 KVL 方程，有

$$u_R+u_L=U$$

即

$$i_L R+L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=U$$

上式是一个非齐次线性方程，通解为

$$i_{L1}(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\frac{L}{R}}}$$

特解为

$$i_{L2}(t)=\frac{U}{R}$$

于是有

$$i_L(t)=\frac{U}{R}+A\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}}$$

根据换路定则，有 $i_L(0_-)=i_L(0_+)=0$，代入上式得

$$A=-\frac{U}{R}$$

则零状态响应为

$$i_L(t)=\frac{U}{R}(1-\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}})$$

其中，$\frac{U}{R}$是电路达到稳态时电感的电流 $i_L(\infty)$，因此上式可以写成

$$i_L(t)=i_L(\infty)(1-\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}}) \tag{3.32}$$

3.4.3　RL 电路的全响应

在如图 3.10 所示的电路中，换路前电路达到稳态，$i_L(0_-)=\frac{U}{R_0+R}$。当 $t=0$ 时，开关闭合。

1. 零输入响应

当 $t>0$ 时，可得

$$i_L(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\frac{L}{R}}}$$

根据换路定则，有

$$i_L(0_-)=i_L(0_+)=\frac{U}{R_0+R}$$

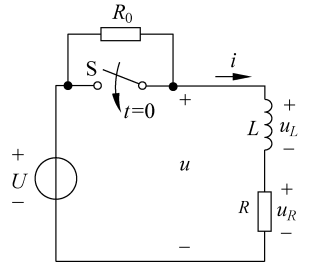


图 3.10　RL 电路的全响应电路

2. 零状态响应

换路后电路与图 3.9 相同，故其零状态响应为

$$i_L(t)=i_L(\infty)(1-\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}})$$

3. 全响应

由于全响应＝零输入响应＋零状态响应，则该电路的全响应为

$$i_L(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}}+i_L(\infty)(1-\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}})$$

$$=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3.33}$$

式(3.33)右边第一项是稳态分量，第二项是暂态分量。同样地，RL 电路的全响应还可以表示为稳态响应与暂态响应的和，即

全响应＝稳态响应＋暂态响应

3.5　一阶线性电路的三要素法

由 3.3 节和 3.4 节的分析可知，RC、RL 一阶电路的全响应均可以表示为稳态分量和暂态分量两部分。当外加激励为直流电源时，其通式可写为

$$f(t)=f(\infty)+A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3.34}$$

其中，$f(t)$是待求的电压或电流，$f(\infty)$是稳态分量(即稳态值)，$A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ 是暂态分量。在 $t=0_+$时刻，$f(t)=f(0_+)$，代入式(3.34)，得

$$A=f(0_+)-f(\infty)$$

式(3.34)可写为

$$f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3.35}$$

式(3.35)是分析一阶线性电路暂态过程中电压电流响应的一般公式，只要得到$f(0_+)$、$f(\infty)$和 τ 3 个“要素”，就可以写出电路的响应，该方法也称为**三要素法**。要素中的时间常数 τ 与特征根有关，而特征根又是由对应的齐次线性常微分方程求得的，因此，τ 只取决于电路的参数和结构，与激励无关。求取时，首先去掉激励(理想电压源短路，理想电流源开路)，然后求从储能元件两端看过去的戴维宁等效电阻 R，则 RC、RL 电路的时间常数 τ 可分别由式(3.19)和式(3.31)求得。

【例 3.4】 如图 3.11 所示的电路原处于稳态，当 $t=0$ 时，开关闭合。$I_S=2\mathrm{A}$，$R_1=2\Omega$，$R_2=2\Omega$，$L=1\mathrm{H}$，求换路后电感的电流。

【解】 根据换路定则，有

$$i_L(0_-)=i_L(0_+)=1\mathrm{A}$$

换路后电路达到稳态时有

$$i_L(\infty)=0\mathrm{A}$$

求换路后电路的等效电阻，得到时间常数为

$$\tau=\frac{L}{R_2}=0.5\mathrm{s}$$

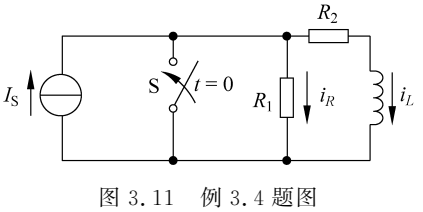


图 3.11　例 3.4 题图

视频 3.3

代入式(3.33)得

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{A}$$

【例 3.5】 如图 3.12 所示电路在换路前已达稳态。当 $t=0$ 时开关接通，求 $t>0$ 的 $u_C(t)$。

【解】 换路前电路已达稳定状态，有

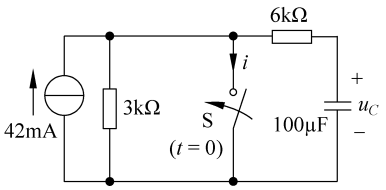


图 3.12　例 3.5 图

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=42\times10^{-3}\times3\times10^{3}=126(\mathrm{V})$$

换路后，电容元件放电，再次达到稳定状态，有

$$u_C(\infty)=0$$

$$\tau=RC=6\times10^{3}\times100\times10^{-6}=0.6(\mathrm{s})$$

换路后电容元件的电压为

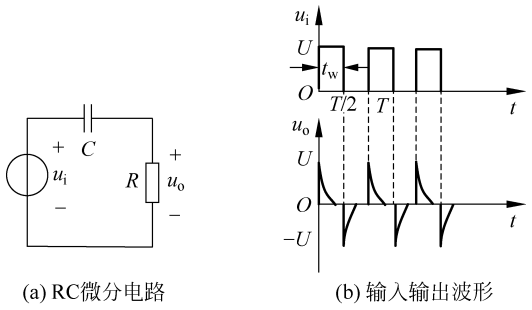
$$\begin{aligned}u_C(t)&=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\\&=0+(126-0)\times\mathrm{e}^{-\frac{t}{0.6}}\\&=126\mathrm{e}^{-\frac{5t}{3}}(\mathrm{V})\end{aligned}$$

3.6　工程应用

在电子技术中，一阶电路有着广泛的应用，例如，微分电路、积分电路、去抖动电路等。本节将对这些电路做一简单介绍。

3.6.1　微分电路

把 RC 电路连接成如图 3.13(a)所示电路。设 $u_C(0_-)=0$，输入信号是占空比为 50% 的脉冲信号，幅度为 U，其输入波形如图 3.13(b)中 u_i 所示。



(a) RC微分电路　　(b) 输入输出波形

图 3.13　RC 微分电路波形

由三要素法可知，当 $0\leqslant t<t_w$ 时，输出电压 $u_o(t)=U\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$。如果时间常数 $\tau\ll t_w$（一般取 $\tau<0.2t_w$），则电容的充电过程很快完成，输出电压也跟着很快衰减到 0，因而输出 $u_o(t)$ 是一个峰值为 U 的尖脉冲。

当 $t_w\leqslant\tau<T$ 时，输入信号为 0，电容放电，其输出电压 $u_o(t)=-U\mathrm{e}^{-\frac{t-t_w}{\tau}}$。如果时间常数 $\tau\ll t_w$，则放电过程很快完成，输出 $u_o(t)$ 是一个峰值为 $-U$ 的负尖脉冲，波形如图 3.13(b)中 u_o 所示。

因为 $\tau\ll t_w$，电路充放电很快，除了电容刚开始充电或放电极短的一段时间外，有

$$u_C(t)\approx u_i(t)$$

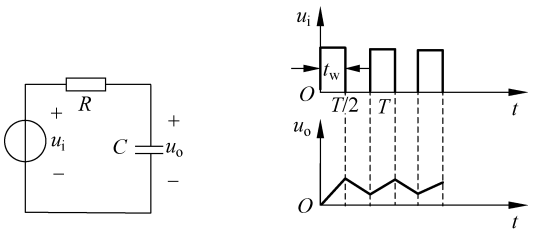
则输出 $u_o(t)$ 的表达式为

$$u_o(t)=i(t)R=RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\approx RC\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}\tag{3.36}$$

式(3.36)表明输出电压近似地与输入电压的微分成正比，因此称为微分电路。在电子技术中，常用微分电路把矩形脉冲变换成尖脉冲，作为触发器的触发信号，或用来触发可控硅(晶闸管)，用途十分广泛。

3.6.2　积分电路

把 RC 电路连接成如图 3.14(a)所示电路。当时间常数 $\tau \gg t_w$ 时，在整个脉冲持续时间内，电容两端电压缓慢增长，$u_C(t)$还未增长到稳态值脉冲已消失，电容开始缓慢放电，输出电压 $u_o(t)$如图 3.14(b)所示。



(a) RC微分电路　　(b) 输入输出波形

图 3.14　RC 积分电路波形

因为充放电过程非常缓慢，所以有

$$u_o(t) = u_C(t) \ll u_R(t)$$

则

$$u_i(t) = u_R(t) + u_o(t) \approx u_R(t) = i(t)R$$

进而

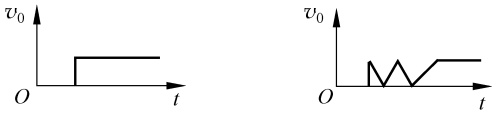
$$u_o(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{1}{RC}\int u_i(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.37}$$

式(3.37)表明输出电压近似地与输入电压的积分成正比，因此称这种电路为积分电路。在脉冲电路中，可应用积分电路把矩形脉冲变换为锯齿波电压。锯齿波信号的应用很广泛，在开关电源设计、示波器、测量仪器和通信系统中极其常见。在开关电源设计中，锯齿波电压信号常在 PWM 控制方式中作为与误差电压信号比较的参考信号。电视机中显像管荧光屏上的光点，是靠磁场变化进行偏转的，也是用锯齿波电流来控制的。

3.6.3　去抖动开关

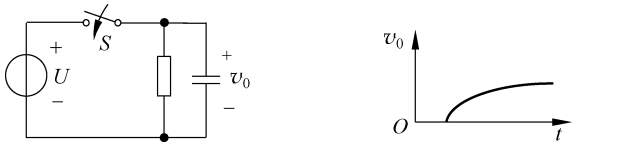
当开关闭合时，两触点在完全闭合前，存在接触抖动，进而产生电压抖动，这就是所谓的开关抖动。如图 3.15(a)所示为一个理想开关的响应，而图 3.15(b)是一个实际开关的响应。通常情况下，对于一些基本电路，如电灯、收音机、电动机等，开关抖动不是主要问题。但是对于数字电路，如计算机，开关抖动就存在潜在的问题。例如，敲击键盘按键时出现开关抖动，计算机无法计算敲击了多少次，因此，数字电路通常需要去抖动的开关。图 3.16(a)为一个 RC 开关去抖动电路，图 3.16(b)为去抖动开关的暂态响应。由图 3.16(a)可以看出，开关闭合后，电容充电，即使出现抖动，由于 C 两端的电压不能突变，v_0 缓慢上升；开关断开后，电容通过负载电阻 R 放电。必须保证 C 由稳态电压充电到开启电压或放电到关闭电

压的延迟时间大于或等于 10ms。



(a) 理想开关　　(b) 实际开关

图 3.15　开关瞬态响应



(a) 去抖动开关电路　　(b) 去抖动开关的暂态响应

图 3.16　去抖动开关

3.6.4　延时熄灯控制电路

如图 3.17 所示是一个延时熄灯控制电路，开关 SW1 按下后，电容充电，三极管导通，继电器作用使电灯回路接通，电灯点亮。当开关 SW1 断开，电容开始放电，当电容两端电压小于 0.7V 时，三极管截止，继电器关闭，电灯熄灭。

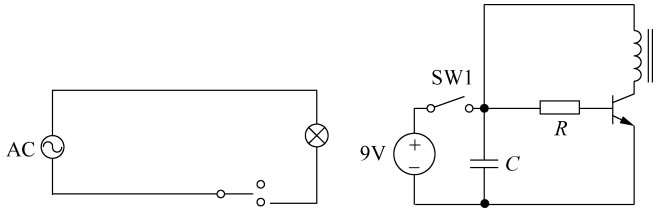


图 3.17　延时熄灯控制电路

习题

3.1　在如图 3.18 所示的电路中，$R_1=200\Omega$，$R_2=100\Omega$，$C=10\mu F$，$L=1H$，$U=100V$，$I=2A$，试求 i_1、i_2 和 i_3 的稳态值。

3.2　在如图 3.19 所示的电路中，开关已断开很长一段时间，在 $t=0$ 时刻开关闭合。试求 i_1、i_2、i_3、i_4 和 u_C 的初始值和稳态值。

3.3　电路如图 3.20 所示，试求 i_L、u 和 u_C 的稳态值。

3.4　在如图 3.21 所示的电路中，开关闭合时电路已达到稳定状态。$t=0$ 时开关打开，求换路后电容 u_C 和电流 i_C 的初始值和稳态值。

3.5　在如图 3.22 所示的电路中，$I_S=1mA$，$R=10k\Omega$，$C=1\mu F$。在 $t=0$ 时刻断开开关，试求电压 $u(t)$ 的表达式。

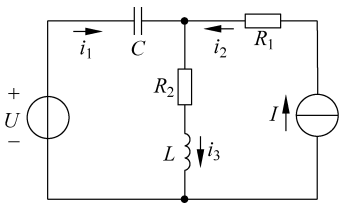


图 3.18　习题 3.1 图

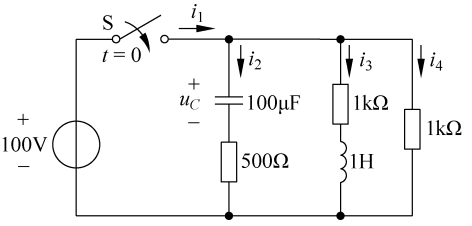


图 3.19　习题 3.2 图

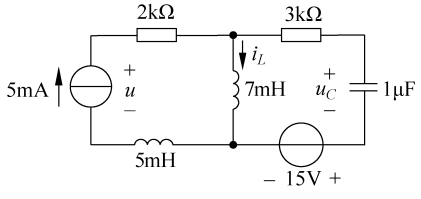


图 3.20　习题 3.3 图

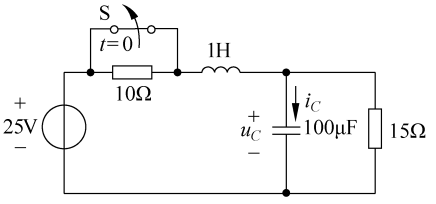


图 3.21　习题 3.4 图

3.6　在 $t=0$ 时刻，将一个已充电的 10μF 电容与一个伏特表相连，电路如图 3.23 所示。该伏特表的模型为电阻，在 $t=0$ 时刻，电表的读数为 50V；当 $t=30$s 时，电表的读数为 25V。试求伏特表的电阻。

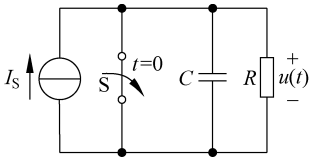


图 3.22　习题 3.5 图

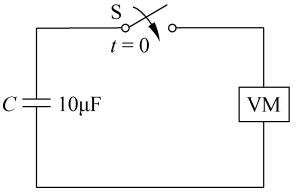


图 3.23　习题 3.6 图

3.7　在如图 3.24 所示的电路中，电源电压 $U=100$V，$R_1=3\Omega$，$R_2=6\Omega$，$R=2\Omega$，$C=10\mu$F，开关 S 闭合前电路已处于稳定状态。$t=0$ 时开关 S 闭合，试求电压 $u_{R1}(t)$、$u_{R2}(t)$ 和 $u_C(t)$ 的表达式。经过 $t_1=5\mu$s 时，试计算电容元件的电压 $u_C(t_1)$。

3.8　电路如图 3.25 所示，$u_C(0_-)=8$V，试求 $t\geqslant 0$ 时的 u_C 和 u_o。

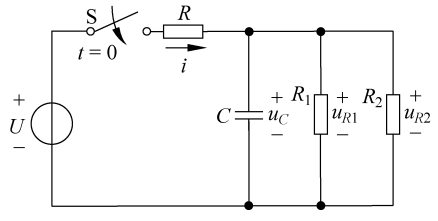


图 3.24　习题 3.7 图

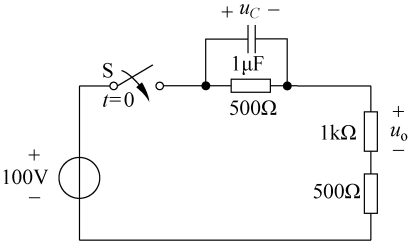


图 3.25　习题 3.8 图

3.9　电路如图 3.26 所示，换路前已处于稳态，$t=0$ 时刻开关 S 闭合，试求 $t\geqslant 0$ 时电容

的电压 u_C。

3.10　电路如图 3.27 所示，已知：$I_S=2A$，$L=1H$，$R_1=20\Omega$，$R_2=R_3=10\Omega$，开关 S 动作前电路已达稳态，$t=0$ 时开关 S 打开，求换路后 $i_L(t)$ 的全响应表达式，并画出其变化曲线。

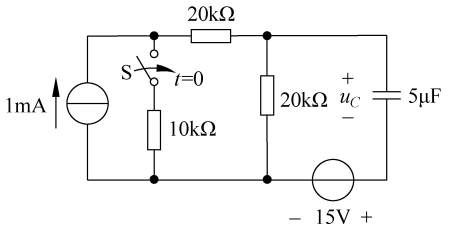


图 3.26　习题 3.9 图

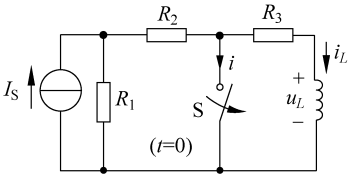


图 3.27　习题 3.10 图

3.11　在如图 3.28 所示的电路中，开关闭合前电路已处于稳态，已知 $U_{S1}=100V$，$U_{S2}=50V$，$L=5H$，$R_1=100\Omega$，$R_2=50\Omega$。求换路后 $i_L(t)$ 的表达式。

3.12　如图 3.29 所示电路在换路前已处于稳态，已知 $U_S=100V$，$L=0.1H$，$R_1=20\Omega$，$R_2=R_3=50\Omega$。求换路后 a、b 两端的电压 $u_{ab}(t)$，并定性地画出其变化曲线。

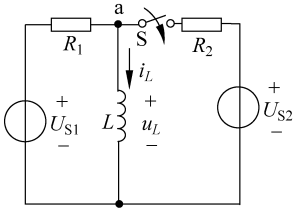


图 3.28　习题 3.11 图

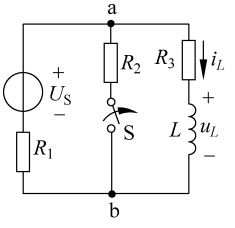


图 3.29　习题 3.12 图

3.13　在如图 3.30 所示的电路中，当 $t=0$ 时开关 S 闭合，求换路后 $i_L(t)$ 的表达式。

3.14　在如图 3.31 所示的电路中，如在稳定状态下 8Ω 电阻被短路，试问短路后经过多少时间电流 i 达到 15A。

3.15　电路如图 3.32 所示，开关 S 闭合时电路已处于稳定状态，R_L 与 L 分别表示某发电机励磁绕组的等效电阻和等效电感，R 是续流电阻。已知：$R_L=0.173\Omega$，$L=0.237H$，$R=1.73\Omega$，$U_S=36V$。求 S 断开后，电流 i 和电压 u 随时间变化的规律。

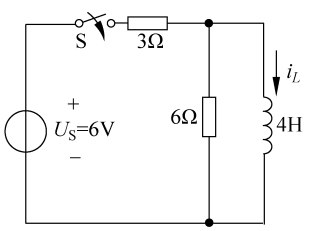


图 3.30　习题 3.13 图

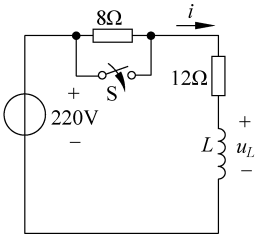


图 3.31　习题 3.14 图

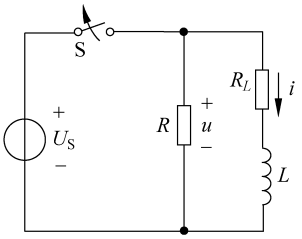


图 3.32　习题 3.15 图

3.16　电路如图 3.33 所示，换路前电路已处于稳态，试用三要素法求 $t \geqslant 0$ 时的 i_1、i_2 和 i_L。

3.17　电路如图 3.34 所示，换路前电路已处于稳态，试用三要素法求 $t \geqslant 0$ 时的 u_C。

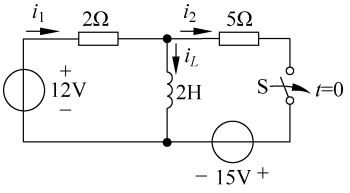


图 3.33　习题 3.16 图

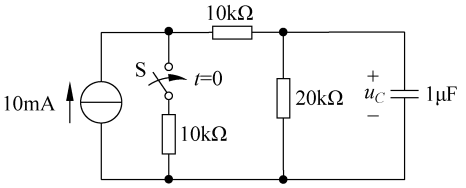


图 3.34　习题 3.17 图