第 1 章　集合与点集

<<<

实变函数论作为现代分析数学的基础，其知识结构是建立在集合论之上的. 集合论产生于 19 世纪 70 年代，由德国数学家康托尔(Cantor)创立，它是整个现代数学的开端及逻辑基础. 作为本科教材，本章只介绍必需的集合论知识，而不涉及有关集合论公理的讨论.

1.1　集合及相关概念

大家在中学就认识了集合这个概念. 所谓集合，是指具有某种特定性质的对象的全体. 集合中的对象称为该集合的元素. 集合通常用大写英文字母 A，B，C，…表示；元素通常用小写英文字母 a，b，c，…表示. 今后用一些特殊的记号表示特殊的集合：$\mathbb{R}$ 表示全体实数形成的集合；$\mathbb{C}$ 表示全体复数形成的集合；$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$ 分别表示自然数集、整数集和有理数集. 另外，不含任何元素的集合称为空集，用记号 $\varnothing$ 表示.

集合的具体表示方法一般有两种：一种是枚举法，如集合 $\{1,2,3,4,5\}$；一种是描述法，例如，大于 20 的自然数组成的集合，可写为 $\{x \mid x>20$，且 x 为自然数$\}$. 一般地，若 A 是具有某种性质 P 的元素组成的集合，通常记为 $A=\{x \mid x$ 具有性质 $P\}$. 对于给定的某集合 A 及某对象 a，若 a 是 A 中的元素，就说 a 属于集合 A，记为 $a\in A$；否则，就说 a 不属于集合 A，记为 $a\notin A$. 给定两个集合 A 和 B，若 A 中的元素都属于 B，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$；进而，若同时有 $A\subset B$ 和 $B\subset A$，则 $A=B$. 对于任意的非空集合 A，空集 $\varnothing$ 和 A 当然是 A 的子集，这两个子集称为平凡子集. 除此之外的子集称为真子集.

例 1.1.1　写出 $\{1,2,3\}$ 的所有子集，由此计算 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集的个数，其中 $n\in\mathbb{N}$.

$\{1,2,3\}$ 的所有子集是：$\varnothing$，$\{1,2,3\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，

共 $2^3=8$ 个. 一般地, $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集的个数是:

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n,$$

其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(k\in\{0,1,\cdots,n\})$ 为组合数公式.

任给集合 A, 它的所有子集构成的集合称为它的幂集, 记为 2^A.

1.1.1　集合的运算

我们知道, 数可以进行运算, 并由此生成新的数. 类似地, 集合之间也可以进行运算, 并由此生成新的集合. 其中, 最常用的运算有"并""交""差"三种.

定义 1.1.1　任意给定集合 A 和 B, 集合 $\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的并集, 并集也称为和集, 记为 $A\cup B$, 或 $A+B$; 集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为它们的交集, 交集也称为积集, 记为 $A\cap B$, 或 AB; 推而广之, 给定集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, 其中 Γ 是指标集, 则此集合族的并集与交集分别为

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\{x\mid \exists\alpha\in\Gamma, x\in A_\alpha\}; \tag{1.1}$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\{x\mid \forall\alpha\in\Gamma, x\in A_\alpha\}. \tag{1.2}$$

集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为 A 与 B 的差集, 又称补集, 记为 $A\backslash B$, 或 $A-B$. 注意: 一般来说 $(A-B)\cup B$ 未必等于 A. 如果已知 $A\supset B$, 则 $A-B$ 称为 B 相对于 A 的余集, 记为 C_AB, 特别地, 如果我们在某一问题中所考虑的一切集合都是某一给定集合 S 的子集时, 集合 B 相对于 S 的余集就简称为 B 的余集, C_SB 简记为 B^c. 而集合

$$(A-B)\cup(B-A)$$

称为 A 与 B 的对称差, 记为 $A\triangle B$.

例 1.1.2　设

$$A_j=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 1+\frac{1}{j}\right\}, j=1,2,\cdots,$$

$$B_i=\left\{x\,\middle|\,-1+\frac{1}{i}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{i}\right\}, i=1,2,\cdots,$$

$$C_k=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{k}<x<\frac{1}{k}\right\}, k=1,2,\cdots,$$

则

$$\bigcap_{j=1}^{n}A_j=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 1+\frac{1}{n}\right\},\quad \bigcup_{i=1}^{m}B_i=\left\{x\,\middle|\,-1+\frac{1}{m}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{m}\right\},$$

$$\bigcap_{k=1}^{p} C_k=\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{p}<x<\frac{1}{p}\right\}.$$

其中 $n,m,p\in\mathbb{N}$. 由此可知

$$\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\},\quad \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i=\{x\mid -1<x<1\},\quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k=\{0\}.$$

集合的并、交、差(补)运算满足下面的运算律：

定理 1.1.1　(1) 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$$

特别地

$$A\cap A=A,\quad A\cup A=A,\quad A\cup\varnothing=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

(2) 结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(3) 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

一般地

$$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha).$$

(4) 大小关系

$$(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B).$$

(5) 若 $A_\alpha\subset B_\alpha$, $\forall\alpha\in\Gamma$, 则

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha,\quad \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha;$$

特别地, 若 $A_\alpha\subset C$ 或 $C\subset B_\alpha$, $\forall\alpha\in\Gamma$, 则

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\subset C,\quad C\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha.$$

证明　下面仅证

$$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha).$$

任取 $x\in A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha\right)$, 则 $x\in A$ 且 $\exists\alpha_0\in\Gamma$, 使得 $x\in B_{\alpha_0}$, 于是 $x\in\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha)$, 由 x 的任意性得 $A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha\right)\subset\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha)$.

反过来，任取 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha)$，则 $\exists\alpha_0\in\Gamma$，使得 $x\in A\cap B_{\alpha_0}$，即 $x\in A$ 且$x\in B_{\alpha_0}$，从而 $x\in A$ 且 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha$，故 $x\in A\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)$，由 x 的任意性得 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha)\subset A\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)$. 综合起来，等式成立. □

以下给出关于余集计算的部分性质.

定理 1.1.2　(1) $A-B=A\cap C_SB$；

(2) 若 $A\subset B$，则 $C_SA\supset C_SB$，$B\backslash A=B\cap A^c$；

(3) 对偶律(德摩根(De Morgan)律)　若 $A,B\subset X$，则

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\quad (A\cap B)^c=A^c\cup B^c.$$

一般地

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c,\quad \left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c.$$

证明　下面仅证对偶律：若 $A,B\subset X$，则$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，其余结合相关定义类似可得. 事实上，由补集定义，

$$\begin{aligned}(A\cup B)^c&=\{x\mid x\in X\text{ 且 }x\notin A\cup B\}=\{x\mid x\in X,x\notin A\text{ 且 }x\notin B\}\\&=\{x\mid x\in X,x\in A^c\text{ 且 }x\in B^c\}=A^c\cap B^c.\end{aligned}$$ □

德摩根律使我们通过余集的运算把并集变为交集，把交集变为并集. 这种转化在集合的运算及论证中是很有用的.

1.1.2　集合列的上极限和下极限

众所周知，数列可以讨论极限. 类似地，集合列也可以讨论极限. 以下我们给出集合列及其极限的定义.

定义 1.1.2　一列集合$\{A_n\}(n=1,2,\cdots)$称为集合列，也可记为$\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$. 属于上述集合列中无限多个集的元素的全体所形成的集称为该集合列的上极限，或称为上限集，记为$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}A_n$，或 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup A_n$；对于上述集合列，那些除了有限个下标外，属于该集合列中每个集合的元素的全体形成的集称为这个集合列的下极限，或称为下限集，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}A_n$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty}\inf A_n$.

等价地，

$$\lim_{n\to+\infty}\sup A_n=\{x\mid\text{对于任意的自然数 }n\text{，存在 }k\geqslant n\text{，使得 }x\in A_k\},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\inf A_n=\{x \mid 存在\ n_0\in\mathbb{N}\ ,当\ n\geqslant n_0\ 时,x\in A_n\}.$$

由此定义可知,

$$\lim_{n\to+\infty}\inf A_n\subset\lim_{n\to+\infty}\sup A_n.$$

进而,对于给定集合列$\{A_n\}$,若其上、下极限相等,则称集合列$\{A_n\}$收敛,其极限即为它的上(或下)极限,记为 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$. 集合列的上(下)极限可以用"并"与"交"运算来表达.

定理 1.1.3 给定集合列$\{A_n\}$,则

$$\lim_{n\to+\infty}\sup A_n=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_k,\quad \lim_{n\to+\infty}\inf A_n=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty}A_k.$$

证明 利用

$$\lim_{n\to+\infty}\sup A_n=\{x \mid \forall\, n\in\mathbb{N}\ ,\exists\, k\geqslant n,使得\ x\in A_k\}\tag{1.3}$$

来证明关于上极限的等式,关于下极限的情况可类似证得. 记 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\sup A_n$, $B=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{+\infty}A_m$. 事实上,设 $x\in A$,则对任意取定的 n,存在 $m>n$,使得 $x\in A_m$,即对任意 n,总有 $x\in\bigcup\limits_{m=n}^{+\infty}A_m$,故 $x\in B$,继而 $A\subset B$.

反之,设 $x\in B$,则对任意的 $n>0$,总有 $x\in\bigcup\limits_{m=n}^{+\infty}A_m$,即总存在 $m(m\geqslant n)$,使得 $x\in A_m$,故 $x\in A$,继而 $B\subset A$,从而 $A=B$,另一等式可同样证明. □

若集合列$\{A_n\}$满足:$A_n\subset A_{n+1}$,$n\in\mathbb{N}$,则称$\{A_n\}$是单调增加集合列;若 $A_n\supset A_{n+1}$,$n\in\mathbb{N}$,则称之为单调减少集合列. 统称为单调集合列. 由定理 1.1.3 易知,单调集合列是收敛的. 具体地,若$\{A_n\}$为单调增加集合列,则

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n;$$

若$\{A_n\}$为单调减少集合列,则

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n.$$

例 1.1.3 设$\{A_n\}$是如下一列点集:

$$A_{2m+1}=\left[0,2-\frac{1}{2m+1}\right],\quad m=0,1,2,\cdots,$$

$$A_{2m} = \left[0,1+\frac{1}{2m}\right],\quad m=1,2,\cdots,$$

我们来确定$\{A_n\}$的上、下极限.

因为闭区间$[0,1]$中的点属于每个A_n，$n=1,2,\cdots$，而对于开区间$(1,2)$中的每个点x，必存在自然数$N(x)$，使得当$n>N(x)$时，有

$$1+\frac{1}{2n}<x\leqslant 2-\frac{1}{2n+1},$$

即当$n>N(x)$时，$x\notin A_{2n}$，但$x\in A_{2n+1}$.

换言之，对于开区间$(1,2)$中的x，具有充分大的奇数指标的集合都含有x，即$\{A_n\}$中有无限多个集合含有x，而充分大的偶数指标的集合都不含有x，即$\{A_n\}$中不含有x的集合不会是有限个. 又区间$[0,2)$以外的点都不属于任何A_n，因此

$$\lim_{n\to+\infty}\sup A_n=[0,2),\quad \lim_{n\to+\infty}\inf A_n=[0,1].$$

例 1.1.4　设$\{A_n\}$：当$n=2k$时，

$$A_{2k}=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 2k,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2k}\right\},\quad k\in\mathbb{N};$$

当$n=2k+1$时，

$$A_{2k+1}=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2k+1},0\leqslant y\leqslant 2k+1\right\},\quad k\in\mathbb{N}.$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}\sup A_n=\{(x,0)\mid x\geqslant 0\}\cup\{(0,y)\mid y\geqslant 0\};\quad \lim_{n\to+\infty}\inf A_n=\{(0,0)\}.$$

定义 1.1.3　设A,B是两个集合，称一切有序“元素对”(x,y)(其中$x\in A,y\in B$)形成的集合为A与B的直积集或笛卡儿(Descartes)积，记为$A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\},$$

其中$(x,y)=(x',y')$是指$x=x'$，$y=y'$，$X\times X$也记为X^2.

例 1.1.5　设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，则

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}.$$

例 1.1.6　$[0,1]\times[0,1]$为平面上单位闭正方形.

例 1.1.7　$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^2$为平面上有理点集.

习　　题

1. 试证：

(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(2) $(A\backslash B)\cup B=(A\cap B)\backslash B$ 的充要条件是 $B=\varnothing$；

(3) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

2. 证明：

(1) $A\triangle B=B\triangle A$；

(2) $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$；

(3) $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$；

(4) 对任意的 A,B，存在 C 使得 $A\triangle C=B$.

3. 设$\{A_n\}$是一集合列，作 $B_1=A_1$，$B_n=A_n-\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}A_k\right)$，$n=2,3,\cdots$，试证$\{B_n\}$互不相交，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\bigcup\limits_{j=1}^{n}B_j$，$n=1,2,\cdots,+\infty$.

4. 设 $f(x)$，$g(x)$是点集 E 上定义的两个函数，a，k 为任意实数，但 $k\neq 0$. 则

(1) $\{x\mid f(x)\geqslant a\}=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\left\{x\,\middle|\,f(x)>a-\dfrac{1}{n}\right\}$；

(2) $\{x\mid |f(x)g(x)|>a\}\subset\{x\mid |f(x)|>k\}\cup\left\{x\,\middle|\,|g(x)|>\dfrac{a}{k}\right\}$.

5. 试证：

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}(A\backslash B_i)=A\left\backslash\left(\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}B_i\right)\right.$；　　(2) $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}(A\backslash B_i)=A\left\backslash\left(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}B_i\right)\right.$.

6. 设 $A_{2n-1}=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，$A_{2n}=(0,n)$，$n=1,2,\cdots$. 求出集合列$\{A_n\}$的上限集和下限集.

7. 设

$$A_n=\begin{cases}E, & n=2k-1,\\ F, & n=2k,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots,$$

求集合列 A_n 的上限集和下限集.

8. 设 $A_n=\left\{\dfrac{m}{n}\,\middle|\,m\text{ 为整数}\right\}$，$n=1,2,\cdots$，试证

$$\lim_{n\to+\infty}\sup A_n=\mathbb{Q}\ ,\ \lim_{n\to+\infty}\inf A_n=\mathbb{Z}\ .$$

9. 设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上的一列函数，且存在 $E\subset[a,b]$使得

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b]\setminus E,\\ 0, & x\in E.\end{cases}$$

令 $E_n=\left\{x\,\middle|\,x\in[a,b],\ f_n(x)\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$，求集合$\lim\limits_{n\to+\infty}E_n$.

10. 设$\{f_n(x)\}$以及 $f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的实值函数，则使$\{f_n(x)\}$不收敛于 $f(x)$的一切点 x 所形成的集合为

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty}\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{n=N}^{+\infty}\left\{x\,\middle|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right\}.$$

11. 设 $\varepsilon_k>0(k=1,2,\cdots)$，$\varepsilon_k$ 随着 $k\to+\infty$单调下降趋于 0. $f(x)$，$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$定义在 E 上，$\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)(x\in E)$，试证：对任意的 a 有

(1) $E[f>a]=\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\varliminf\limits_{n\to+\infty}E[f_n\geqslant a+\varepsilon_k]$；

(2) $E[f\leqslant a]=\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}\varliminf\limits_{n\to+\infty}E[f_n<a+\varepsilon_k]$；

(3) $E[f<a]=\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\varliminf\limits_{n\to+\infty}E[f_n\leqslant a-\varepsilon_k]$.

注：$E[f>a]=\{x\in E\,|\,f(x)>a\}$.

1.2　映射、基数与可数集

我们都知道，实数是可以比较大小的，那么自然地联想一下，集合有没有大小的差别呢？直观地想，如果是有限集合，可能集合元素的个数多集合就大，那么对于含有无限个元素的集合，集合的大小该怎么比较呢？全体实数构成的集合就一定比全体正实数构成的集合大吗？在对集合的定义和基础运算有了一定的了解之后，我们接下来就介绍一下用以刻画集合大小的概念：基数. 在此之前，我们要引入映射的概念，本节的最后，我们还将向大家介绍一种最常见的集合：可数集.

1.2.1　映 射

大家都熟悉函数概念，下面要讲到的映射是函数概念的抽象化.

定义 1.2.1　给定两个非空集合 X,Y，若对于 X 中每个元素 x 在 Y 中都

存在唯一的元素 y 与之对应，则称这个对应为映射. 若用 φ 表示这种对应，则记为

$$\varphi: X \to Y,$$

并称 φ 是从 X 到 Y 的一个映射. 此时，$x\in X$ 在 Y 中对应元 y 称为 x 在映射 φ 下的像，x 称为 y 的一个原像，记为 $y=\varphi(x)$. 进而，y 的原像集为 $\{x \mid y=\varphi(x), x\in X\}$，记为 $\varphi^{-1}(y)$.

$$\varphi(X) = \{y \mid y = \varphi(x), \forall\, x \in X\} \subset Y$$

称为映射 $\varphi: X\to Y$ 的值域，而 X 为定义域.

特别地，若 $\varphi(X)=Y$，则称映射 φ 是满射，也称为到上的映射（X 到 Y 上的映射）；若对于每个 $y\in\varphi(X)$ 其原像集 $\varphi^{-1}(y)$ 是单点集，等价地，若 $\forall\, x_1, x_2\in X$，当 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$ 时必有 $x_1=x_2$，则称该映射是单射.

注 1.2.1 单射存在逆映射，即 $\varphi^{-1}: \varphi(X)\to X, \varphi^{-1}(y)=x$，当 $\varphi(x)=y$ 时. 进而，到上的单射称为双射，也称为一一对应.

给定映射 $\varphi: X\to Y$，及 $A\subset X$，$B\subset\varphi(X)$，则 A 的像集为 $\varphi(A)=\{y\mid y=\varphi(x), \forall\, x\in A\}$，$B$ 的原像集为 $\varphi^{-1}(B)=\{x\mid \varphi(x)\in B\}$. 综上易得下面关于映射与集合的并和交运算的关系式：

$$\varphi\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma}\varphi(A_\alpha), \quad \varphi\Big(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\Big) \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma}\varphi(A_\alpha);$$

$$\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma}\varphi^{-1}(A_\alpha), \quad \varphi^{-1}\Big(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma}\varphi^{-1}(A_\alpha).$$

例 1.2.1 给定非空集合 X，定义其非空子集 A 上的特征函数为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

于是 $A\to\chi_A$ 是从 X 的幂集 2^X 到 $\{0,1\}$ 上的映射. 而且可以利用特征函数来反馈集合本身的特征：

$$\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)\Leftrightarrow A\subset B, \quad \chi_A(x)\chi_B(x)=0\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing.$$

1.2.2 基数（势）

给定一个集合，若它只含有限个元素则称为有限集；否则，就称为无限集. 对于有限集来说，若不考虑元素的具体特性，则所含元素的个数是一个基本而重要的量，因与元素个数有关的问题一般会涉及元素个数的比较. 两个有限集是否含有相同数量的元素可用能否建立一一对应来衡量. 受此启发，尽管对于

无限集来说谈论个数没有实际意义，但比较两个无限集所含元素的多少，仍然可以用能否建立一一对应来度量.

定义 1.2.2　给定集合 A,B，若存在从 A 到 B 的一一对应，则称集合 A 与 B 对等，记为 $A\sim B$.

对等关系有下述性质.

定理 1.2.1　任给集合 A,B,C，有

(1)（自反性）$A\sim A$；

(2)（对称性）若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(3)（传递性）若 $A\sim B$，且 $B\sim C$，则 $A\sim C$.

符合上述三条的关系称为等价关系. 因此，集合之间的对等是一种等价关系.

下面，我们描述性地给出集合基数的概念.

定义 1.2.3　设 A,B 为给定两个集合，如果 $A\sim B$，那么就称集合 A 与集合 B 的基数或者势相同. 记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

因此，对等的集合具有相同的基数（势）. 特别地，当 A 是非空有限集时，则存在某自然数 n_0 使得 A 与 $\{1,2,\cdots,n_0\}$ 一一对应，而 $\{1,2,\cdots,n_0\}$ 由 n_0 唯一确定，于是可以认为 $\overline{\overline{A}}=n_0$. 由此知，基数（势）的概念是通常元素个数的推广. 以下给出一些常见的集合的例子.

例 1.2.2　$(0,1)\sim\mathbb{R}$. 事实上，令 φ：$x\to\tan\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，则易知 φ 建立了 $(0,1)$ 与 $\mathbb{R}$ 之间的一一对应.

例 1.2.3　任意两个圆周上的点集具有相同的基数. 事实上，不妨令任给的两个圆同圆心，于是让从圆心出发的同一条射线与两个圆的交点相互对应，则该对应是一一对应.

有了集合大小的概念——基数，接下来，我们给出基数大小比较的法则.

定义 1.2.4　给定两个集合 A 和 B，若存在 B 的子集 B_1 使得 $A\sim B_1$，则称 A 的基数不大于 B 的基数，记为 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$；若 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，并且 $\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$，此时称 A 的基数小于 B 的基数，记为 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$.

自然数可以比较大小，类似地，基数也可以比较大小. 即，对于任意给定的两个基数 α,β，关系式 $\alpha<\beta,\alpha=\beta,\alpha>\beta$，这三者中有且仅有一式成立. 证明要涉及集合论的公理系统，超出本教材范围，故略.

对于自然数 a,b，若 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a$ 则 $a=b$. 对于基数也有类似的结论，也

就是说集合的大小在某种意义下也是可以比较的.

定理 1.2.2(伯恩斯坦(Bernstein)定理) 给定集合 A,B,若 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$ 且 $\overline{\overline{A}}\geqslant\overline{\overline{B}}$,则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

证明 由题设,存在双射 φ: $A\to\varphi(A)\subset B$,及双射 ψ: $B\to\psi(B)\subset A$. 下面用迭代法寻找 $A'\subset A$ 及 $B'\subset B$,使得 $\varphi(A')=B\backslash B'$,同时 $\psi(B')=A\backslash A'$. 为此,考虑下面的方程组:

$$\varphi(A') = B\backslash B', \quad \psi(B') = A\backslash A',$$

等价地

$$A' = A\backslash\psi(B'), \quad B' = B\backslash\varphi(A'). \tag{1.4}$$

为了求解方程组(1.4),运用迭代法,逐次作

$$\begin{aligned}
A_1 &= A\backslash\psi(B), \quad B_1 = B\backslash\varphi(A_1),\\
A_2 &= A\backslash\psi(B_1), \quad B_2 = B\backslash\varphi(A_2),\\
&\vdots\\
A_n &= A\backslash\psi(B_{n-1}), \quad B_n = B\backslash\varphi(A_n),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

由上述构造知,$A_i\subset A, B_i\subset B, i=1,2,\cdots$.

注意到 ψ 是单射,于是有

$$\psi\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i\right)=\bigcap_{i=1}^{+\infty}\psi(B_i).$$

再结合德摩根律,有

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i=\bigcup_{i=1}^{+\infty}(A\backslash\psi(B_{i-1}))=A\bigg\backslash\bigcap_{i=1}^{+\infty}\psi(B_{i-1})=A\bigg\backslash\psi\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_{i-1}\right)=A\bigg\backslash\psi\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i\right),$$

此处记 $B_0=B$.

类似地,可得

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i=\bigcap_{i=1}^{+\infty}(B\backslash\varphi(A_i))=B\bigg\backslash\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right).$$

从而,式(1.4)有解

$$A'=\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i, \quad B'=\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i.$$

定义映射

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in A',\\ \psi^{-1}(x), & x\in A\backslash A'.\end{cases}$$

由上述构造知，$\varphi(A')=B\backslash B'$，$\psi^{-1}(A\backslash A')=B'$，于是 Φ 是满射. 至于 Φ 的单射性由 φ 及 ψ 的单射性即得. 因此，Φ 是从 A 到 B 上的一一对应. 从而，$A\sim B$. □

推论 1.2.1　设 $A\subset B\subset C$，$A\sim C$，则 $A\sim B$，$B\sim C$.

证明　以 $A\sim B$ 为例，设 φ 是 A 和 C 之间的一个一一对应，令 $A^*=\{x\mid x\in A,\varphi(x)\in B\}$，则 $A^*\subset A$，$A^*\sim B$，取 $B^*=A$，则自然有 $B^*\sim A$. 于是由伯恩斯坦定理有 $A\sim B$. □

1.2.3　可数集

本小节我们给出最常见的一种无穷集合——可数集的定义，并研究其相关性质.

定义 1.2.5　与自然数集对等的集合称为可数集，或称为可列集. 于是任意的可数集 A 均可写成 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，反之，这种形式的集合均为可数集. 可数集的基数记为 $\aleph_0$.

下面的定理表明，可数集的基数在无限集中是最小的.

定理 1.2.3　任意无限集均包含可数子集.

证明　设 A 是任意给定的无限集，任意取定 $a_1\in A$，因 $A\backslash\{a_1\}$ 仍然是无限集，再任意取定 $a_2\in A\backslash\{a_1\}$，依次类推，在 $A\backslash\{a_1,a_2\}$ 中取出 $a_3,\cdots$，在 $A\backslash\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中取出 a_{n+1}，照此继续，即得 A 的可数子集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$. □

进一步，我们有下述定理.

定理 1.2.4　若 X 是一个无限集，Y 是有限集或可数集，则 $\overline{\overline{X\cup Y}}=\overline{\overline{X}}$.

证明　因 $X\cup Y=X\cup(Y\backslash X)$，故不妨设 $X\cap Y=\varnothing$. 若 Y 是可数集，记 $Y=\{y_1,y_2,\cdots\}$. 由于 X 是无限集，由定理 1.2.3 知，X 有可数子集 $X_1=\{x_1,x_2,\cdots\}$，于是有分解 $X=X_1\cup(X\backslash X_1)$. 令 φ: $X\cup Y\to X$，使得 $\varphi(x_n)=x_{2n}$，$\varphi(y_n)=x_{2n-1}$，$n=1,2,\cdots$；$\varphi(x)=x$，$x\in X\backslash X_1$. 由此构造知 φ 是 X 与 $X\cup Y$ 之间的一一对应；

若 Y 为有限集，则对应的 X_1 取为与 Y 有相同个数的 X 中的有限集，然后类似于上面的证明即得. □

众所周知，有限集不可能和它的任意真子集建立一一对应关系. 无限集与有限集的本质区别就在于此，即下面的定理.

定理 1.2.5　集合 X 是无限集的充要条件是，存在 X 的真子集 Y 有 $Y \sim X$.

证明　因若 X 是有限集时，X 不可能与它的任意真子集对等，由此得证充分性；下证必要性：任取 X 的一个有限子集 A，因 X 是无限集，故 $X \backslash A$ 亦是无限集，利用定理 1.2.4 得，$\overline{\overline{X \backslash A}} = \overline{\overline{(X \backslash A) \cup A}} = \overline{\overline{X}}$，记 $Y = X \backslash A$，得证. □

下面一系列定理关心的是集合及其子集的可数性问题.

定理 1.2.6　可数集的子集如果不是有限集，则一定是可数集.

证明　设 A 是可数集，A_1 是 A 的一个无限子集. 首先，因 $A_1 \subset A$，故 $\overline{\overline{A_1}} \leqslant \overline{\overline{A}}$；其次，因 A_1 是无限集，由定理 1.2.3 可知，$\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{A_1}}$. 于是由伯恩斯坦定理得，$\overline{\overline{A_1}} = \overline{\overline{A}}$，即 A_1 是可数集. □

定理 1.2.7　设 A 为可数集，B 为有限或可数集，则 $A \cup B$ 为可数集.

证明　设 $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$，$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 或 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$.

(1) 先设 $A \cap B = \varnothing$，由于可数集总可排成无穷序列，当 B 有限时，$A \cup B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, a_1, a_2, \cdots\}$；当 B 可数时，$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots\}$，可见 $A \cup B$ 总可以排成无穷序列，从而是可数集.

(2) 一般情况下，此时令 $B^* = B - A$，则

$$A \cap B^* = \varnothing, \quad A \cup B^* = A \cup B.$$

由于 B 至多可数，故 B^* 作为 B 的子集，也至多可数(有限集或可数集)，由(1)的证明知，$A \cup B^*$ 可数，故 $A \cup B$ 也可数. □

推论 1.2.2　设 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是有限集或可数集，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 也是有限集或可数集，但如果至少有一个 A_i 是可数集，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 必为可数集.

定理 1.2.8　可列个可数集的并集是可数集.

证明　设$\{A_n\}(n=1,2,\cdots)$是一列可数集.

(1) 先设$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$,因为$A_i$都是可数集,于是可记

$$A_n=\{a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nk},\cdots\},\quad n,k=1,2,\cdots,$$

从而$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$中元素可按下述方式排成一列:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n=\{a_{11},a_{21},a_{12},a_{31},a_{22},a_{13},a_{41},\cdots,a_{ij},\cdots\},$$

规则是:a_{11}排第一位,当$i+j>2$时,a_{ij}排在第$j+\sum\limits_{k=1}^{i+j-2}k$位. 因此$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$是可数集(注:当部分$A_i$是有限集时仍适用).

(2) 一般情况下,各A_i可能相交,令

$$A_1^*=A_1,$$

$$A_i^*=A_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\quad(i\geqslant 2),$$

则$A_i^*\cap A_j^*=\varnothing(i\neq j)$且

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i^*.$$

由A_i可数易知A_i^*都是有限集或可数集,如果只有有限个A_i^*不为空集,则由推论 1.2.2 易知$\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i^*$为可数集(因为至少$A_1^*=A_1$为可数集);如果有无限多个(必为可数个)$A_i^*$不为空集,则由(1)知

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i^*$$

也是可数集,故在任何场合$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$都是可数集. □

推论 1.2.3　(1) 有限集与可数集的并是一可数集;

(2) 有限个可数集的并是一可数集;

(3) 可数个互不相交的非空有限集的并是一可数集;

(4) 可数个可数集的并是一可数集.

例 1.2.4　整数集,有理数集均为可数集.

事实上,整数集$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup(-\mathbb{N})$,其中$-\mathbb{N}$为负自然数全体的集合. 因映射$f:\mathbb{N}\to-\mathbb{N},f(n)=-n$,建立了$\mathbb{N}$与$-\mathbb{N}$之间的一一对应,故$-\mathbb{N}$是可数集. 于是由定理 1.2.7 知$\mathbb{Z}$是可数集. 对于有理数集,记$\mathbb{Q}^+$为正有理数全体的

集；$\mathbb{Q}^-$为负有理数全体的集，于是$\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^+\cup\mathbb{Q}^-\cup\{0\}$. 令

$$A_n=\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\cdots\right\}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则$A_n(n\in\mathbb{N})$是一列可数集，而$\mathbb{Q}^+=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$，从而由定理 1.2.8 知$\mathbb{Q}^+$亦可数；又$\mathbb{Q}^-$与$\mathbb{Q}^+$通过映射$f(x)=-x(x\in\mathbb{Q}^+)$建立了一一对应，于是$\mathbb{Q}^-$也可数. 再利用定理 1.2.7 即得$\mathbb{Q}$是可数集.

由例 1.2.4 易得下面一些今后很有用的结论：有理系数多项式全体所构成的集合是可数集；$\mathbb{R}$中无限个互不相交的开区间所形成的集是可数集. 事实上，在每一个开区间中任意取定一个有理数，由题设可知开区间与取定的有理数是一一对应的. 因此这些有理数形成$\mathbb{Q}$的一个无限子集，记为$\mathbb{Q}_1$，由定理 1.2.6 得$\mathbb{Q}_1$可数，从而得证.

注 1.2.2 若A中每个元素可由n个互相独立的记号一对一地加以决定，各记号跑遍一个可数集，即

$$A=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_n}\mid x_k=x_k^{(1)},x_k^{(2)},x_k^{(3)},\cdots;k=1,2,\cdots,n\},$$

则A为可数集.

例 1.2.5 元素$(n_1,n_2,\cdots,n_k)$是由k个正整数所组成的集合，其全体构成一可数集

$$A=\{(n_1,n_2,\cdots,n_k)\mid n_i\in\mathbb{Z}^+\}.$$

例 1.2.6 整系数多项式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的全体是一可数集. 记

$$a_{a_0,a_1,\cdots,a_n}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

则整系数多项式的全体可记为$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$，为可数集，其中$A_n=\{a_{a_0,a_1,\cdots,a_n}\}$.

代数数的全体是一个可数集(所谓代数数，就是整系数多项式的根). 事实上，整系数多项式的全体可数，而每一个整系数多项式只有有限个根，故代数数的全体是一个可数集.

例 1.2.7 $\mathbb{N}$与$\mathbb{R}$不对等，即$\overline{\overline{\mathbb{N}}}\neq\overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

若不然，存在$\mathbb{N}$与$\mathbb{R}$的一个一一对应ϕ，将与$\mathbb{N}$中n对应的元素$\phi(n)$记为r_n，则$\mathbb{R}$上至少有一个单位长度的区间不含r_1，不妨设此区间为$I_1=[0,1]$，将$[0,1]$分为三等份，则$\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$中至少有一个不含$r_2$，以$I_2$表示这个区

间,将 I_2 三等分,其左、右两个区间中至少有一个区间不含 r_3,记为 I_3,依此类推,可得一串闭区间 $\{I_n\}$,满足:

(1) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$,且 I_n 的长度趋于 0;

(2) $r_n \notin I_n, n=1,2,\cdots$.

由闭区间套定理知 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} I_i \neq \varnothing$,但对任意的 m,$r_m \notin \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} I_i$,换言之,$\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} I_i$ 不在 $\mathbb{R}$ 中,这是不可能的.这一矛盾说明,$\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{R}$ 不可能对等.

例 1.2.8 $\mathbb{R}$ 上任一单调函数的不连续点全体的集至多可数,即或为空集,或为有限集,或为可数集.

不妨设 $f(x)$ 是单调递增函数.若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续,则其不连续点集为空集;若存在间断点 x_1,由柯西(Cauchy)收敛原理可知,$f(x_1-0)$ 与 $f(x_1+0)$ 均存在,于是

$$f(x_1-0)=\lim_{x\to x_1-} f(x) < \lim_{x\to x_1+} f(x) = f(x_1+0).$$

表明 x_1 对应开区间 $(f(x_1-0), f(x_1+0))$.对于两个不同间断点 x_1 和 x_2,由函数 $f(x)$ 的单调性可得,开区间 $(f(x_1-0), f(x_1+0))$ 与 $(f(x_2-0), f(x_2+0))$ 互不相交.进而,由上面的分析知,$f(x)$ 的不连续点集与上述开区间形成的集合之间存在一一对应,于是,或为有限集,或为可数集.

1.2.4 不可数集与连续基数

对于一个无限集,若不是可数集,则称之为不可数集.

定理 1.2.9 开区间 $(0,1)$ 是不可数集.

证明 用反证法:假若 $(0,1)$ 是可数集,则可记 $(0,1)=\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \cdots\}$.而每个 $a^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots)$ 均可按下述方式唯一表示成十进制纯小数:

$$a^{(1)} = 0.a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \cdots,$$
$$a^{(2)} = 0.a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \cdots,$$
$$a^{(3)} = 0.a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \cdots,$$
$$\vdots$$

规定,上述各数不能从某位起全为 0.令 $0.b_1b_2b_3\cdots$ 满足:$b_n=1$,当 $a_n^{(n)} \neq 1$;$b_n=2$,当 $a_n^{(n)}=1$.由上述构造知,$0.b_1b_2b_3\cdots \in (0,1)$,但

$$0.b_1b_2b_3\cdots \notin \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \cdots\}$$

这与假设 $(0,1)=\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \cdots\}$ 矛盾. □

由前面的例 1.2.2 及定理 1.2.9 得，实数集$\mathbb{R}$是不可数集. 今后用 c 表示实数集$\mathbb{R}$的基数，称之为连续基数(势). 而且由定理 1.2.9 知 $c>\aleph_0$.

例 1.2.9 $\overline{\overline{(a,b)}}=c$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$.

事实上，令 $\varphi(x)=a+x(b-a)$，$x\in(0,1)$，则 φ 建立了$(0,1)$与(a,b)之间的一一对应，于是$\overline{\overline{(a,b)}}=\overline{\overline{(0,1)}}=c$.

类似地，可证

$$\overline{\overline{(-\infty,0)}}=\overline{\overline{(0,+\infty)}}=\overline{\overline{[a,b]}}=\overline{\overline{(a,b]}}=\overline{\overline{[a,b)}}=\overline{\overline{[0,1]}}=\overline{\overline{(0,1)}}=c.$$

下面的定理关心的是连续基数的性质问题.

定理 1.2.10 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一列互不相交的集合，它们均有连续基数，则并集 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$ 也有连续基数.

证明 注意到$[n-1,n)\cap[m-1,m)=\varnothing$，$n\neq m$，$n,m\in\mathbb{N}$ 及$[n-1,n)\sim A_n$，$n\in\mathbb{N}$，故

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\sim\bigcup_{n=1}^{+\infty}[n-1,n)=[0,+\infty),$$

即 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$ 有连续基数. □

由定理 1.2.10 易知，平面$\mathbb{R}^2$有连续基数，即$\overline{\overline{\mathbb{R}^2}}=c$. 类似地有$\overline{\overline{\mathbb{R}^n}}=\overline{\overline{\mathbb{R}^{+\infty}}}=c$，此处$\mathbb{R}^{+\infty}$是指可数个$\mathbb{R}$的笛卡儿积.

定理 1.2.3 告诉我们，可数集在无限集中间基数最小，那么有没有最大的基数呢？答案是否定的，即下面的结论.

定理 1.2.11 任给一个非空集合 A，2^A 是其幂集，即由 A 的所有子集形成的集合. 则$\overline{\overline{2^A}}>\overline{\overline{A}}$.

证明 假若 $A\sim 2^A$，则存在一一对应 φ: $A\to 2^A$. 于是对于每个 $a\in A$，都唯一存在 A 的子集 $\varphi(a)$与之对应. 作 A 的子集 $A_0=\{x\in A\mid x\notin\varphi(x)\}$. 根据假定，应有 A 中元素 a_0 与 A_0 对应. 由此，若 $a_0\in A_0$，则与 A_0 的定义矛盾；若 $a_0\notin A_0$，则由 A_0 的定义知 a_0 又应该属于 A_0，矛盾. 于是 A 与 2^A 不对等. 进而，单点集全体形成 2^A 的真子集，记为 $\tilde{A}$，显然 $\tilde{A}\sim A$，因此$\overline{\overline{2^A}}>\overline{\overline{A}}$. □

例 1.2.10 $\overline{\overline{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}}=c$，其中$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$表示从自然数集$\mathbb{N}$到两点集$\{0,1\}$

的所有映射形成的集合.

事实上,对于任意的 $f\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$,令

$$\varphi:\ f\to\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{2^n},$$

则 φ 是从 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 到 $(0,1]$ 的单射,于是有 $\overline{\overline{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}}\leqslant\overline{\overline{(0,1]}}$;另一方面,每个 $x\in(0,1]$ 均可唯一表示(规定下面二进制表达式中必须出现无限多个 1)为

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{2^n},\quad x_n\in\{0,1\}.$$

令 $f_x(n)=x_n,n\in\mathbb{N}$,则 $f_x\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.进而,定义映射 $\varphi:\ x\to f_x,x\in(0,1]$,则 φ 是从 $(0,1]$ 到 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 的单射,于是有 $\overline{\overline{(0,1]}}\leqslant\overline{\overline{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}}$,再利用伯恩斯坦定理即得 $\overline{\overline{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}}=\overline{\overline{(0,1]}}=c$.

注意到 $\overline{\overline{\mathbb{N}}}=\aleph_0$,例 1.2.10 用记号表示,即 $2^{\aleph_0}=c$.

既然没有最大的基数,那么限定在 $\aleph_0$ 与 c 之间情况又如何呢?集合论的奠基者康托尔于 1878 年提出下面的猜想:在 $\aleph_0$ 与 c 之间没有基数存在,即不存在集合 X,使得 $\aleph_0<\overline{\overline{X}}<c$.这个问题又被称为连续统假设问题.20 世纪伟大的数学家希尔伯特(Hilbert)在 1900 年国际数学家大会上提出了 23 个重大数学问题,其中就包括连续统假设问题.而连续统假设问题直到 1963 年才由科恩(Korn)和哥德尔(Godel)解决,他们证明了:连续统假设与已有的集合论公理系统是相容的,既不能被证明也不能被否定.

习　　题

1. 设 $f:X\to Y$ 是一个满射,证明下列 3 个命题等价:

(1) f 是单射;

(2) 对任意的 $A,B\subset X$,有 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$;

(3) 对任意的 $A,B\subset X$,若 $A\cap B=\varnothing$,则 $f(A)\cap f(B)=\varnothing$.

2. 设 $f:X\to Y$,证明 f 是满射的充要条件是,对任意的 $A\subset Y$,有 $f(f^{-1}(A))=A$.

3. 设映射 $f:X\to Y,A_\alpha\subset X,B_\alpha\subset Y,\alpha\in I$($I$ 为指标集),试证:

(1) $f\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$;

(2) $f\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcap_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$;

(3) 若 $B_{\alpha_1}\subset B_{\alpha_2}$，则 $f^{-1}(B_{\alpha_1})\subset f^{-1}(B_{\alpha_2})$，$\alpha_i\in I$，$i=1,2$；

(4) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；

(5) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$；

(6) $f^{-1}(Y-B_\alpha)=f^{-1}(Y)-f^{-1}(B_\alpha)$.

4. 设 E 是 X 的子集，定义在 X 上的特征函数为

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in X-E.\end{cases}$$

如果 $A,B,A_n(n=1,2,\cdots)$都是 X 的子集.证明：

(1) $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$；

(2) $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$；

(3) $\chi_{A-B}(x)=\chi_A(x)(1-\chi_B(x))$；

(4) $\chi_{\lim\limits_{n\to+\infty}\sup A_n}(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\chi_{A_n}(x)$；

(5) $\chi_{\lim\limits_{n\to+\infty}\inf A_n}(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\inf\chi_{A_n}(x)$.

5. 设 $A_1\subset A_2$，$B_1\subset B_2$，φ_1，φ_2 分别是 A_1 到 B_1，A_2 到 B_2 的一一对应，问是否一定存在 $A_2\backslash A_1$ 到 $B_2\backslash B_1$ 的一一对应?

6. 试构造$(0,1)$与$[0,1)$间的一一对应.

7. 试构造出一个从无理数集$\mathbb{Q}^c$到实数集$\mathbb{R}$之间的一一对应.

8. 试证：若集合 A 中每个元素由 n 个独立的记号决定，各记号跑遍一可数集 B，即

$$A=\{a_{x_1x_2\cdots x_n}\mid x_k\in B,k=1,2,\cdots,n\},$$

则 A 为可数集.

9. 平面点集 A 中任意两点之间的距离都大于某一固定常数 d，且 $d>0$，则 A 至多为可数集.

10. 设 $A=B\cup C$，$\overline{\overline{A}}=c$，则 B 与 C 中至少有一个集合的势为 c.

11. 如果 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$，$\overline{\overline{A}}=c$，则至少有一个 A_n 的势为 c.

12. 试证：若 $A\subset B$，且 $A\sim A\cup C$，则有 $B\sim B\cup C$.

13. 证明：$[0,1]$上的全体无理数作成的集合其基数是 c.

14. 证明：若 E 是可列集，则 E 中存在可列个互不相交的真子集.

15. 若 $f(x)$是$\mathbb{R}$ 上的实值函数，则集合

$$A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, f(x) \text{ 在 } x \text{ 处不连续,但右极限 } f(x+0) \text{ 存在}\}$$

是至多可数集.

16. 证明$[a,b]$上的连续函数全体$C[a,b]$的势为 c.

17. 设 $f(x)$是$\mathbb{R}$上的实值函数,若$\exists M>0$,对任意有限个 x:$x_1,x_2,\cdots,x_n$,使得 $\left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \right\| \leqslant M$ 成立,试证,能使 $f(x)\neq 0$ 的 x 的集合至多为可数集.

18. 证明(a,b)上的凸函数在除一个至多可数集的点外都是可微的.

1.3 $\mathbb{R}^n$中的点集

1.3.1 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}$是实数集,其几何表示即数轴;$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$是有序实数对全体形成的集合,其几何表示即坐标平面. 对于任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$,定义两种线性运算:

(1) 加法,$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2)$;

(2) 数乘,$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2)$,$\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$.

则$\mathbb{R}^2$关于这两种运算构成线性空间,$(0,1)$,$(1,0)$是$\mathbb{R}^2$的一组基,因个数为两个,故$\mathbb{R}^2$称为二维线性空间. 因平面上的点与从原点出发以该点为终点的向量一一对应,故$\mathbb{R}^2$又称为向量空间,其中的元素又称为向量. 平面几何(欧几里得(Euclid)几何)及平面解析几何就是建立在$\mathbb{R}^2$基础之上的.

推而广之,有下面的定义.

定义 1.3.1 n 维欧氏空间为集合

$$\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\cdots,n(n\in\mathbb{N})\},$$

记为$\mathbb{R}^n$,或记为$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$,共 n 个$\mathbb{R}$.

类似地,$\mathbb{R}^n$关于上述加法及数乘运算构成一个线性空间,$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)$,$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0)$,$\cdots$,$\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,0,1)$为$\mathbb{R}^n$的一组基. 沿用二维线性空间的称谓,$\mathbb{R}^n$也称为 n 维向量空间,其中的元素称为点或向量.

对于任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$,定义

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

则 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$有下述 3 条性质: