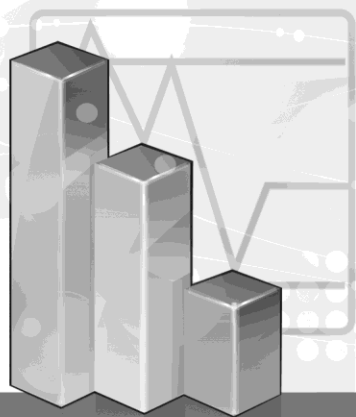


第3章 随机向量

在实际问题中,有些试验的结果需要同时用两个或两个以上的随机变量来描述,如射击试验弹着点的具体位置要由它的横坐标 X 和纵坐标 Y 来确定。又如,为了考察炼出的每炉钢的质量,需要考虑含碳量、含硫量和硬度等基本指标,这就涉及 3 个随机变量——含碳量 X 、含硫量 Y 和硬度 Z ; 如果还需要考察其他指标,则应引入更多的随机变量。在研究的问题中,由于这些随机变量之间通常存在着某种内部联系,因此需要把这些随机变量看作一个整体来加以研究。

若 X 和 Y 都是随机变量,则由 X 、 Y 组成的一个整体 $\xi=(X,Y)$ 称为二维随机向量。二维随机向量 $\xi=(X,Y)$ 中, X 、 Y 均称为它的分量。在讨论二维随机变量时,可以把 $\xi=(X,Y)$ 看作是平面上具有随机坐标 (X,Y) 的点。

一般来说,对某一随机试验涉及的 n 个随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 记为 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 称为 n 维随机向量或 n 维随机变量。

显然,第 2 章所讨论的随机变量是一维随机变量。和一维随机变量类似,二维随机向量也可分为连续型和离散型等几类。为了叙述方便,本章主要讨论二维随机向量,至于多维随机向量不难类推。

3.1 二维随机向量及其分布函数

二维随机向量 (X,Y) 中的两个随机变量 X 和 Y 是有联系的,它们是定义在同一样本空间上的两个随机变量。其性质不仅与 X 的性质及 Y 的性质有关,而且还依赖于这两个随机变量的相互关系,因此仅仅逐个研究 X 和 Y 的性质是不够的,必须把 (X,Y) 作为一个整体加以研究。

首先引入其分布函数的概念。

定义 3.1 设 (X,Y) 是二维随机向量,对于任意实数 x,y , 称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\leq x,Y\leq y\} \quad (-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty) \quad (3.1)$$

为 $\xi=(X,Y)$ 的分布函数。



分布函数 $F(x, y)$ 表示事件 $\{X \leq x\}$ 和事件 $\{Y \leq y\}$ 同时发生的概率。如果将 (X, Y) 看成平面上随机点的坐标, 取定 $(x_0, y_0) \in (-\infty, +\infty)$, $F(x_0, y_0)$ 就是点 (X, Y) 落在平面上, 以 (x_0, y_0) 为顶点, 且位于该点左下方无限矩形区域上的概率, 如图 3.1 所示。

由上面的几何解释可知, 随机点 (X, Y) 落在矩形区域 $x_1 < x \leq x_2$ 、 $y_1 < y \leq y_2$ 内的概率为

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \\ = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

分布函数的性质如下。

(1) $F(x, y)$ 是变量 x 、 y 的不减函数, 即对于任意固

定的 y , 当 $x_1 < x_2$ 时, $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$; 对于任意固定的 x , 当 $y_1 < y_2$ 时, $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$ 。

$$(2) \quad 0 \leq F(x, y) \leq 1 \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)。 \quad (3.3)$$

(3) 对于固定的 y , 有

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$$

对于固定的 x , 有

$$F(x, -\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$$

还有

$$F(-\infty, -\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0$$

$$F(\infty, \infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F(x, y) = 1$$

由以上可知, 当变量 $x \rightarrow -\infty$ 时, 在图 3.1 中随机点 (X, Y) 落在矩形内这一事件趋于不可能事件, 其概率为零; 而当 $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ 时, 图 3.1 中的矩形扩展到全平面, 随机点 (X, Y) 落在矩形内这一事件趋于必然事件, 其概率为 1。

二维随机向量也分为离散型与连续型, 下面分别加以讨论。

3.2 二维离散型随机向量

如果二维随机向量 (X, Y) 的每个分量都是离散型随机变量, 则称 (X, Y) 是二维离散型随机向量。因为离散型随机变量只能取有限或可列无穷个值, 因此二维离散型随机向量 (X, Y) 所有可能取的值也是有限或可列无穷个。

定义 3.2 设二维离散型随机向量 (X, Y) 所有可能取的值为 (x_i, y_j) ($i=1, 2, L; j=1, 2, L$), 记为

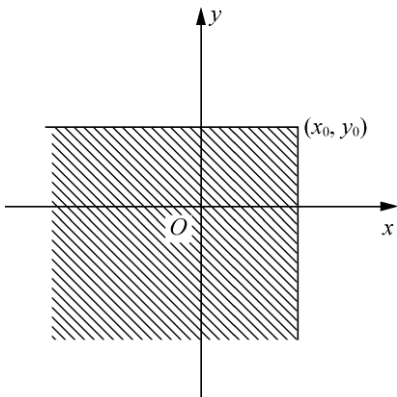
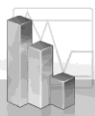


图 3.1 $F(x_0, y_0)$ 的意义



$$P\{(X,Y)=(x_i,y_j)\}=p_{ij} \quad (i=1,2,L;j=1,2,L) \quad (3.4)$$

称式(3.4)为二维离散型随机向量 (X,Y) 的概率分布或联合分布律。

(X,Y) 的联合分布律如表 3.1 所示。

表 3.1 (X,Y) 的联合分布律

Y X		y_1	y_2	L	y_j	L
x_1		p_{11}	p_{12}	L	p_{1j}	L
x_2		p_{21}	p_{22}	L	p_{2j}	L
M		M	M		M	
x_i		p_{i1}	p_{i2}	L	p_{ij}	L
M		M	M	M	M	M

(X,Y) 的联合分布律具有下列性质。

$$(1) \quad p_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,L;j=1,2,L)。 \quad (3.5)$$

$$(2) \quad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1。 \quad (3.6)$$

二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布函数与概率分布之间具有如下关系式

$$F(x,y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij} \quad (3.7)$$

其中和式对一切满足 $x_i \leq x, y_j \leq y$ 的 i 和 j 求和。

例 3.1 一盒中有 3 个球, 它们依次标有数字 1、2、2。从这盒中任取一球后, 不返回盒中, 再从盒中任取一球。设每次取球时, 盒中各球被取到的可能性相同。以 X 、 Y 分别记第一次、第二次取得的球上标有的数字, 求 (X,Y) 的联合分布律。

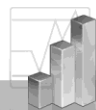
解 (X,Y) 可能取的值为(1,2)、(2,1)、(2,2), 对应的概率分别为:

第一次取 1 的概率是 $\frac{1}{3}$, 第一次已取得 1 后, 第二次取得 2 的概率是 1。按乘法定理, 得 $P\{X=1,Y=2\} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ 。

第一次取 2 的概率是 $\frac{2}{3}$, 第一次已取得 2 后, 第二次取得 1(或 2)的概率是 $\frac{1}{2}$ 。

即 $P\{X=2,Y=1\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$; $P\{X=2,Y=2\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ 。

(X,Y) 的联合分布律如表 3.2 所示。

表 3.2 (X,Y) 的联合分布律

$X \backslash Y$	1	2
1	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

例 3.2 设有 10 件产品，其中 7 件正品、3 件次品。现从中任取两次，每次取一件产品，取后不放回。令

$X=1$ ，若第一次取到的产品是次品；

$X=0$ ，若第一次取到的产品是正品；

$Y=1$ ，若第二次取到的产品是次品；

$Y=0$ ，若第二次取到的产品是正品。

求二维随机向量 (X,Y) 的概率分布。

解 (X,Y) 所有可能取的值是 $(0,0)$ 、 $(0,1)$ 、 $(1,0)$ 、 $(1,1)$ 。

先求 $P\{X=0,Y=0\}$ ，即第一次取到正品、第二次也取到正品的概率，这是古典概型，易得

$$P\{X=0,Y=0\} = \frac{7 \times 6}{10 \times 9} = \frac{7}{15}$$

同理，可分别求得

$$P\{X=0,Y=1\} = \frac{7}{30}$$

$$P\{X=1,Y=0\} = \frac{7}{30}$$

$$P\{X=1,Y=1\} = \frac{1}{15}$$

(X,Y) 的联合分布律如表 3.3 所示。

表 3.3 (X,Y) 的联合分布律

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{30}$
1	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{15}$



3.3 二维连续型随机向量及其分布函数

3.3.1 二维连续型随机向量

与一维连续型随机变量类似,对于二维连续型随机向量,也用“密度”函数来全面描述它的取值概率。

定义 3.3 对于二维随机向量 $\xi=(X,Y)$,若存在一个定义于全平面 $(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)$ 的非负可积的二元函数 $f(x,y)$, D 为任意平面区域,都有

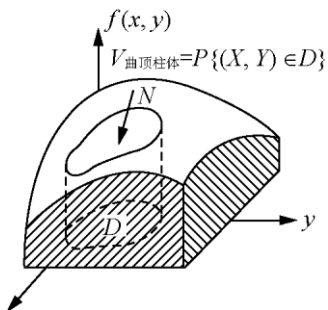


图 3.2 曲顶柱体的体积

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u,v) du dv \quad (3.8)$$

则称 $\xi=(X,Y)$ 为二维连续型随机向量,并称 $f(x,y)$ 为 ξ 的联合概率密度,简称联合密度。

可见,如果知道二维连续型随机变量的联合密度 $f(x,y)$,那么它落入区域 D 内的概率只需计算一个二重积分即可。其几何意义是以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶、以区域 D 为底的曲顶柱体的体积,如图 3.2 所示。

与一维随机变量类似,联合密度具有如下基本性质。

- (1) $f(x,y) \geq 0$ (非负性)。
- (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1$ (规范性)。
- (3) 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续,则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

例 3.3 设随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 确定常数 k 。
- (2) 求 $P\{0 < X < 1, 2 < Y < 3\}$ 。
- (3) 求 $P\{X < 1.5\}$ 。
- (4) 求 $P\{X+Y \leq 4\}$ 。

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1$ 有

$$\int_0^2 dx \int_2^4 k(6-x-y) dy = 8k = 1$$

所以 $k = \frac{1}{8}$ 。

(2) 设 $D_1 = \{0 < x < 1, 2 < y < 3\}$, 则由式(3.8)



$$\begin{aligned}
 P\{0 < X < 1, 2 < Y < 3\} &= P\{(X, Y) \in D_1\} \\
 &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} \frac{1}{8} (6 - x - y) dx dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_2^3 \frac{1}{8} (6 - x - y) dy = \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

(3) 设 $D_2 = \{x < 1.5, -\infty < y < +\infty\}$, 则由式(3.8)

$$\begin{aligned}
 P\{X < 1.5\} &= P\{(X, Y) \in D_2\} \\
 &= \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_2} \frac{1}{8} (6 - x - y) dx dy \\
 &= \int_0^{1.5} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{8} (6 - x - y) dy = \int_0^{1.5} dx \int_2^4 \frac{1}{8} (6 - x - y) dy \\
 &= \frac{27}{32}
 \end{aligned}$$

(4) 设 D_3 为 $x + y \leq 4$ 所确定的半平面, 则有

$$\begin{aligned}
 P\{X + Y \leq 4\} &= \iint_{D_3} f(x, y) dx dy \\
 &= \iint_{D_4} \frac{1}{8} (6 - x - y) dx dy \quad (D_4 \text{ 为 } D_3 \text{ 与第一象限的交集}) \\
 &= \int_0^2 dx \int_2^{4-x} \frac{1}{8} (6 - x - y) dy = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

下面介绍两种重要的二维连续型随机向量的分布。

3.3.2 均匀分布

定义 3.4 如果二维随机向量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{当 } (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.9)$$

其中区域 D 的面积为 $a (0 < a < +\infty)$, 则称 (X, Y) 服从 D 上的均匀分布。

容易验证, 这里的 $f(x, y)$ 满足联合密度的性质。

(X, Y) 服从均匀分布的实质是 (X, Y) 只可能在 D 上取值, 并且 (X, Y) 取值于 D 内任何子区域内的概率与该子区域的面积成正比。这与第 2 章中已经研究过的一维均匀分布是相似的。

例 3.4 设 (X, Y) 服从圆域 $x^2 + y^2 \leq 4$ 上的均匀分布 (见图 3.3), 计算 $P\{(X, Y) \in A\}$, 这里 A 是图 3.3 中阴影部分的区域。

解 圆域 $x^2 + y^2 \leq 4$ 的面积 $d = 4\pi$; 随机变量 (X, Y)

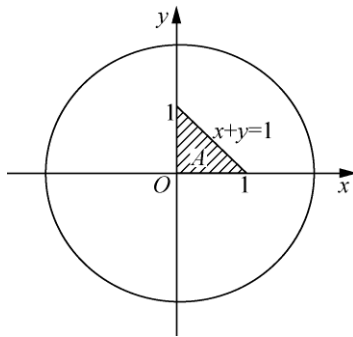


图 3.3 例 3.4 用图



的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}, & \text{当 } x^2 + y^2 \leq 4 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 > 4 \text{ 时} \end{cases}$$

区域 A 是 $x=0$ 、 $y=0$ 和 $x+y=1$ 的 3 条直线所围成的三角区域, 并且包含在圆域 $x^2 + y^2 \leq 4$ 内, 面积=0.5。则

$$P\{(X, Y) \in A\} = \iint_A \frac{1}{4\pi} dx dy = \frac{1}{8\pi}$$

一般来说, 具有均匀分布的二维连续型随机向量 (X, Y) 落在区域 A 的概率可用区域 A 的面积除以整个区域 D 的面积, 例 3.4 所求可为

$$P\{(X, Y) \in A\} = \frac{0.5}{4\pi} = \frac{1}{8\pi}$$

3.3.3 二维正态分布

定义 3.5 如果二维随机向量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]} \quad (-\infty < x, y < +\infty) \quad (3.10)$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$ 是 5 个参数, 则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布, 或称 (X, Y) 是二维正态向量, 记为

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$$

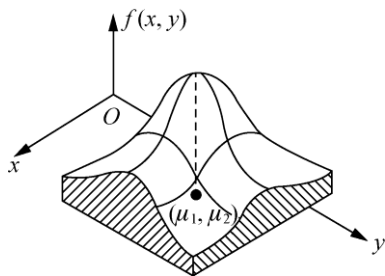


图 3.4 二维正态联合分布密度的图形

这里 $f(x, y) > 0$ 是显然的, $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ 的验证在后面进行。

二维正态联合分布密度的图形如图 3.4 所示, 它是一个以 (μ_1, μ_2) 为极大值点的单峰曲面。

二维正态向量是最重要的二维随机向量, 它与一维正态变量的关系以及参数的具体意义将在以后讨论。

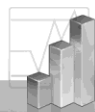
最后指出, 不论什么类型的二维随机向量, 都可以用二维随机向量的分布函数来描述它的概率情况。

3.4 边缘分布

3.4.1 边缘分布密度

二维随机向量 (X, Y) 作为一个整体, 有分布函数 $F(x, y)$, 其分量 X 与 Y 都是随机变量, 有各自的分布函数, 分别记成 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 分别称为 X 的边缘分布函数和 Y 的边缘分布函数; 称 $F(x, y)$ 为 (X, Y) 的联合分布函数。

需要注意的是, X 与 Y 的边缘分布函数实质上就是一维随机变量 X 或 Y 的分布函数。称其为边缘分布函数是相对于 (X, Y) 的联合分布而言的。同样地, (X, Y) 的联合分布



函数 $F(x, y)$ 是相对于 (X, Y) 的分量 X 和 Y 的分布而言的。

边缘分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 可以由 $F(x, y)$ 求得, 即

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty) \quad (3.11)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X < \infty, Y \leq y\} = F(\infty, y) \quad (3.12)$$

3.4.2 二维离散型随机向量 (X, Y) 边缘分布

设 (X, Y) 是二维离散型随机向量, 联合概率分布为

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad (i, j = 1, 2, L)$$

由式(3.11)和式(3.12)可得

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq \infty} p_{ij} = \sum_{x_i \leq x} \sum_j p_{ij}$$

则 X 的边缘概率分布为

$$p_{i\bullet} = P(X = x_i) = \sum_j p_{ij} \quad (i = 1, 2, L) \quad (3.13)$$

Y 的边缘概率分布为

$$p_{\bullet j} = P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij} \quad (j = 1, 2, L) \quad (3.14)$$

例 3.5 求例 3.1 中 (X, Y) 的分量 X 和 Y 的边缘分布。

解 X 所有可能取的值为 1 和 2, 分别记为 x_1 和 x_2 ; Y 所有可能取的值也是 1 和 2,

分别记为 y_1 和 y_2 。于是 $p_{11} = 0$, $p_{12} = \frac{1}{3}$, $p_{21} = \frac{1}{3}$, $p_{22} = \frac{1}{3}$ 。

由式(3.13)得到 X 的边缘分布为

$$p_{1\bullet} = P\{X = x_1\} = \sum_{j=1}^2 p_{1j} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p_{2\bullet} = P\{X = x_2\} = \sum_{j=1}^2 p_{2j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

由式(3.14)得到 Y 的边缘分布为

$$p_{\bullet 1} = P\{Y = y_1\} = \sum_{i=1}^2 p_{i1} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p_{\bullet 2} = P\{Y = y_2\} = \sum_{i=1}^2 p_{i2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(X, Y) 的边缘分布律如表 3.4 所示。

表 3.4 边缘分布律

$X \backslash Y$	1	2	$p_{i\bullet}$
1	0	1/3	1/3
2	1/3	1/3	2/3
$p_{\bullet j}$	1/3	2/3	1

注意, $p_{1\bullet}$ 和 $p_{2\bullet}$ 分别是表 3.2 中的第一行和第二行的数之和; $p_{\bullet 1}$ 和 $p_{\bullet 2}$ 分别是表 3.2



中的第一列和第二列的数之和。分别将 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}$ 填在表 3.2 的最右边和最下边,可得到表 3.4。由于 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}$ 位于这张表的边缘,于是就称其为边缘分布。

例 3.6 从 1、2、3、4 这 4 个数中随机取一个数,记所取的数为 X ,再从 1 到 X 中随机取一个数,记所取的数为 Y ,试求 (X,Y) 的联合分布律与 X 和 Y 的边缘分布律。

解 X 与 Y 的取值都是 1、2、3、4,并且 $Y \leq X$,所以,当 $i < j$ 时, $P\{X=i, Y=j\}=0$ 。当 $i \geq j$ 时,由乘法公式,可得 (X,Y) 与 X 及 Y 的边缘分布律如表 3.5 所示。

表 3.5 例 3.6 用表

$Y \backslash X$	1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{25}{48}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{48}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{48}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{48}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

3.4.3 二维连续型随机向量的边缘概率密度

定义 3.6 设 (X,Y) 为二维连续型随机向量,其分量 X (或 Y) 的密度函数 $f_X(x)$ (或 $f_Y(y)$) 称为 (X,Y) 关于 X (或 Y) 的边缘概率密度,简称边缘密度。

随机变量 (X,Y) 的边缘分布密度可以通过对其联合密度的广义积分求得,有下面的定理。

定理 3.1 若 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)$,则两个边缘密度函数可表示为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \quad (3.15)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \quad (3.16)$$

例 3.7 设 (X,Y) 服从区域 D (抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=x$ 所夹的区域)上的均匀分布,求其联合密度和边缘密度,如图 3.5 所示。

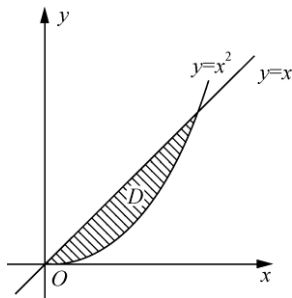


图 3.5 例 3.7 用图



解 因为 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布, 所以它的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{当 } (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 a 为区域 D 的面积。由于

$$a = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$$

则联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & \text{当 } (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由式(3.15)与式(3.16), 可得 (X, Y) 的边缘密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例 3.8 设 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1, \rho$ 的二维正态分布, 试求边缘密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 。

解 由式(3.15)与式(3.16), 有

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)} dy \end{aligned}$$

由于

$$x^2 + y^2 - 2\rho xy = (y - \rho x)^2 + (1 - \rho^2)x^2$$

于是

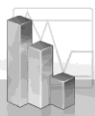
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}} dy$$

上式积分号内被积函数是一个正态分布密度 ($\mu = \rho x, \sigma = \sqrt{1-\rho^2}$), 因而该积分值为 1, 所以

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

同理,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (-\infty < y < +\infty)$$



可见,该二维正态变量的两个边缘密度都是一维标准正态密度,这个结论与 ρ 的取值是无关的,这说明仅由两个分量 X 、 Y 的分布密度一般不能确定 (X,Y) 的联合密度。在第4章将指出:对于二维正态分布而言,参数 ρ 正好刻画了 X 和 Y 之间关系的密切程度。

经过类似的计算可得,如果 (X,Y) 服从参数为 μ_1 、 μ_2 、 σ_1 、 σ_2 、 ρ 的二维正态分布,则 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 、 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,即二维正态变量的两个分量均是一维正态变量。

这里还可验证二维正态联合密度 $f(x,y)$,满足

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx = 1 \end{aligned}$$

3.5 条 件 分 布

3.5.1 条件分布的概念

在第1章中曾经介绍了条件概率的概念,在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率为

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

将其推广到随机变量:设有两个随机变量 X 与 Y ,在给定 Y 取某个或某些值的条件下,求 X 的概率分布,这个分布就是条件分布。

例如,考虑某大学的全体学生,从中随机抽取一个学生,分别以 X 和 Y 表示其体重和身高,则 X 和 Y 都是随机变量,它们都有一定的概率分布。现在限制 $180 < Y < 190(\text{cm})$,在这个条件下求 X 的条件分布,这就意味着要从该校的学生中把身高在180cm和190cm之间的那些人都挑出来,然后在挑出来的学生中求其体重的分布。容易想象,这个分布与不加这个条件时的分布是不一样的,如在条件分布中体重取大值的概率会显著增加。

因此,弄清了 X 的条件分布随着 Y 值而变化的情况,就能了解身高对体重的影响。由于在许多问题中有关的变量往往是相互影响的,这使得条件分布成为研究变量之间相互关系的一个有力工具。

3.5.2 离散型随机向量的条件分布

设 (X,Y) 是二维离散型随机向量,概率分布为

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} \quad (i, j = 1, 2, L)$$

(X,Y) 的边缘概率分布分别为

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij} \quad (i = 1, 2, L)$$

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{ij} \quad (j = 1, 2, L)$$



设 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}$ 都大于 0, 现求在事件 $Y = y_j$ 发生的条件下, 事件 $X = x_i$ 发生的概率为

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} \quad (i=1, 2, L)$$

由条件概率的定义, 有

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad (i=1, 2, L)$$

并且, 上述条件概率满足:

$$(1) P\{X = x_i, Y = y_j\} \geq 0 \quad (i=1, 2, L).$$

$$(2) \sum_i P\{X = x_i | Y = y_j\} = 1.$$

从而 $P\{X=x_i|Y=y_j\}(i=1, 2, L)$ 可以作为概率分布, 条件概率 $P\{Y=y_j | X=x_i\}(j=1, 2, L)$ 也与此类似。

定义 3.7 设二维离散型随机向量 (X, Y) 的概率分布为

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} \quad (i, j=1, 2, L)$$

X 和 Y 的边缘概率分布分别为

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij} \quad (i=1, 2, L); \quad p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{ij} \quad (j=1, 2, L)$$

对于固定的 j , 若 $P(Y = y_j) > 0$, 则称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad (i=1, 2, L) \quad (3.17)$$

为在 $Y = y_j$ 条件下, 随机变量 X 的条件概率分布, 简称条件分布。

对于固定的 i , 若 $P\{X = x_i\} > 0$, 则称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \quad (j=1, 2, L) \quad (3.18)$$

为在 $X = x_i$ 条件下, 随机变量 Y 的条件概率分布。

例 3.9 在一汽车工厂中, 一辆汽车有两道工序是由机器人完成的: 其一是紧固 3 只螺栓, 其二是焊接两处焊点。以 X 表示由机器人紧固的螺栓紧固不良的数目, 以 Y 表示由机器人焊接的不良焊点的数目。据积累的资料知 (X, Y) 具有分布律, 如表 3.6 所示。

表 3.6 例 3.9 用表

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	0.840	0.060	0.010	0.910
1	0.030	0.010	0.005	0.045
2	0.020	0.008	0.0040	0.032
3	0.010	0.002	0.001	0.013
$p_{\cdot j}$	0.900	0.080	0.020	1.000

(1) 求在 $X=1$ 的条件下, Y 的条件分布律;

(2) 求在 $Y=0$ 的条件下, X 的条件分布律。



解 边缘分布律已经求出, 列在表 3.6 中。在 $X=1$ 的条件下, Y 的条件分布律为

$$\begin{aligned} P\{Y=0|X=1\} &= \frac{P(X=1, Y=0)}{P(X=1)} = \frac{0.030}{0.045} = \frac{6}{9} \\ P\{Y=1|X=1\} &= \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} = \frac{0.010}{0.045} = \frac{2}{9} \\ P\{Y=2|X=1\} &= \frac{P(X=1, Y=2)}{P(X=1)} = \frac{0.005}{0.045} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

或写为如图 3.6 所示。

$Y=k$	0	1	2
$P\{Y=k X=1\}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

图 3.6 Y 的条件分布律

同理, 可得在 $Y=0$ 的条件下, X 的条件分布律, 如图 3.7 所示。

$X=k$	0	1	2	3
$P\{X=k Y=0\}$	$\frac{84}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{90}$

图 3.7 X 的条件分布律

例 3.10 为了进行吸烟与肺癌关系的研究, 随机调查了 23000 个 40 岁以上的人, 得出吸烟与肺癌的关系, 其结果列在表 3.7 中。

表 3.7 吸烟与肺癌的关系

是否吸烟 X	是否患肺癌 Y		X 的边缘分布
	患肺癌 $\{Y=0\}$	未患肺癌 $\{Y=1\}$	
吸 烟 $\{X=0\}$	0.00013	0.19987	0.20000
不吸烟 $\{X=1\}$	0.00004	0.79996	0.80000
Y 的边缘分布	0.00017	0.99983	1

其中 $X=1$ 表示被调查者不吸烟; $X=0$ 表示被调查者吸烟; $Y=1$ 表示被调查者未患肺癌; $Y=0$ 表示被调查者患肺癌。试求被调查者吸烟的条件下得肺癌的概率和不吸烟的条件下得肺癌的概率。

解 边缘分布律已经求出, 列在表 3.7 中。在 $X=0$ 的条件下, $Y=0$ 的条件概率为

$$P\{Y=0|X=0\} = \frac{P\{Y=0, X=0\}}{P\{X=0\}} = \frac{0.00013}{0.2} = 0.00065$$

在 $X=1$ 的条件下, $Y=0$ 的条件概率为

$$P\{Y=0|X=1\} = \frac{P\{Y=0, X=1\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.00004}{0.8} = 0.00005$$



3.5.3 连续型随机向量的条件概率密度

设 (X, Y) 是二维连续型随机向量, 由于对任意 $x, y, P(X=x)=0, P(Y=y)=0$, 所以不能直接用条件概率公式得到条件分布, 这时要使用极限的方法得到条件概率密度。

给定 y , 对于任意固定的正数 ε , 若概率 $P\{y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\} > 0$, 于是, 对于任意 x , 有

$$P\{X \leq x | y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\} = \frac{P\{X \leq x, y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}}$$

是在条件 $y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon$ 下 X 的条件分布。

定义 3.8 设 X 和 Y 是随机向量, 给定 y , 若对任意固定正数 $\varepsilon, P\{y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\} > 0$, 且对任意实数 x , 极限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P\{X \leq x, y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}} \quad (3.19)$$

存在, 则称此极限为在条件 $Y=y$ 下 X 的条件分布函数, 记为 $F_{X|Y}(x|y)$ 。

若存在 $f_{X|Y}(x|y)$, 使得

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(u|y) du \quad (3.20)$$

则称 $f_{X|Y}(x|y)$ 为在条件 $Y=y$ 下 X 的条件概率密度函数, 简称条件概率密度。

定理 3.2 设随机向量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$ 。

若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续, 当 $f_Y(y) > 0$ 时, 有

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad (3.21)$$

证明 设 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, Y 的边缘分布函数为 $F_Y(y)$, 由式(3.19)得

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x|y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P\{X \leq x, y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon\}} \\ &= \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(x, y+\varepsilon) - F(x, y-\varepsilon)] / (2\varepsilon)}{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F_Y(y+\varepsilon) - F_Y(y-\varepsilon)] / (2\varepsilon)} \\ &= \frac{\partial F(x, y) / \partial y}{dF_Y(y) / dy} = \frac{\int_{-\infty}^x f(u, y) dy}{f_Y(y)} \end{aligned}$$

所以, $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 。

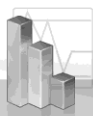
定理证毕。

同理, 当 $f_X(x) > 0$ 时, 有

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad (3.22)$$

例 3.11 设 (X, Y) 的概率密度是

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y}, & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



求 $P\{X > 1 | Y = y\}$ 。

解 $P\{X > 1 | Y = y\} = \int_1^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx$, 为此需求出 $f_{X|Y}(x|y)$ 。

由于 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} dx = \frac{e^{-y}}{y} [-ye^{-x/y}]_0^{\infty} = e^{-y} \quad (0 < y < \infty)$$

于是, 对 $y > 0$, $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-x/y}}{y}$, $x > 0$ 。

故对 $y > 0$, $P\{X > 1 | Y = y\} = \int_1^{\infty} \frac{e^{-x/y}}{y} dx = -e^{-x/y} \Big|_1^{\infty} = e^{-1/y}$ 。

例 3.12 设 (X, Y) 服从单位圆上均匀分布, 即其概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/\pi, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $f_{Y|X}(y|x)$ 。

解 X 的边缘密度为 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

当 $|x| < 1$ 时, 有

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

即当 $|x| < 1$ 时, 有

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0, & y \text{ 取其他值} \end{cases}$$

例 3.13 设二维随机向量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{21}{4} x^2 y, & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求条件概率密度和条件概率 $P\left\{Y > \frac{3}{4} \mid X = \frac{1}{2}\right\}$ 。

解 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4} x^2 y dx, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{7}{2} y^{5/2}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



当 $y \in (0, 1]$ 时, $f_Y(y) > 0$, 故

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2y^{-3/2}, & x \in [-\sqrt{y}, \sqrt{y}] \\ 0, & x \notin [-\sqrt{y}, \sqrt{y}] \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_{x^2}^1 \frac{21}{x^2} x^2 y dy, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4), & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f_X(x) > 0$, 有

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{2y}{1-x^4}, & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

将 $x = \frac{1}{2}$ 代入 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{1-x^4}, & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

得 $f_{Y|X}\left(y\left|\frac{1}{2}\right.\right) = \begin{cases} \frac{32}{15}y, & \frac{1}{4} \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$P\left\{Y > \frac{3}{4} \mid X = \frac{1}{2}\right\} = \int_{3/4}^1 f_{Y|X}\left(y\left|\frac{1}{2}\right.\right) dy$$

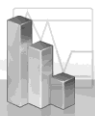
$$= \int_{3/4}^1 \frac{32}{15} y dy = \frac{7}{15}$$

例 3.14 设数 X 在区间 $(0, 1)$ 上随机取值, 当观察到 $X = x (0 < x < 1)$ 时, 数 Y 在区间 $(x, 1)$ 上随机取值, 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 。

解 由题意, X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

对于任意给定的值 $x (0 < x < 1)$, 在 $X = x$ 的条件下, Y 的概率密度为



$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是得关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3.6 随机向量的独立性

二维随机向量 (X, Y) 的两个分量都是随机变量, 有时它们之间存在着某种联系, 而有时其中任意一个的取值情况对另一个没有影响。这就是两个随机变量是否相互独立的问题。下面首先给出两个随机变量相互独立的定义, 然后给出判断两个随机变量是否相互独立的充要条件。

定义 3.9 设二维随机向量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 其边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y) \quad (3.23)$$

则称随机变量 X 与 Y 是相互独立的。

根据分布函数的定义, 式(3.23)可写为

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} P\{Y \leq y\} \quad (3.24)$$

所以, 随机向量 X 与 Y 相互独立是指对任意实数 x, y , 随机事件 $\{X \leq x\}$ 和 $\{Y \leq y\}$ 相互独立。

若 (X, Y) 是二维离散型随机向量, 对 (X, Y) 所有可能取值 $(x_i, y_j) (i=1, 2, L; j=1, 2, L)$, 则 X 与 Y 是相互独立的条件可以写为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\} \quad (i=1, 2, L; j=1, 2, L) \quad (3.25)$$

若 (X, Y) 是二维连续型随机向量, 其联合密度为 $f(x, y)$, 其边缘密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 则 X 与 Y 是相互独立的条件可以写为

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (3.26)$$

可见, 当随机向量 X 与 Y 是相互独立时, (X, Y) 的两个边缘密度可以决定其联合密度。

例 3.15 设 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6xy^2, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试问: X 与 Y 是否相互独立?



解 先求出两个边缘密度。

当 $x \notin (0,1)$ 时, $f_X(x)=0$ 。

当 $x \in (0,1)$ 时, $f_X(x) = \int_0^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 6xy^2 dy = 2x$ 。

所以

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

同理

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

故有

$$f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 6xy^2, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

由式(3.26)可知, X 与 Y 是相互独立的。

例 3.16 考察例 3.10(吸烟与肺癌关系的研究)中随机变量 X 与 Y 的独立性。

解 因

$$\begin{aligned} 0.2 \times 0.00017 &= P\{X=0\}P\{Y=0\} \\ &\neq P\{X=0, Y=0\} = 0.00013 \end{aligned}$$

故 X 和 Y 不相互独立。

例 3.17 设 $(X,Y): N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 。求证: X 与 Y 独立的充要条件为 $\rho = 0$ 。

证明 因

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} \\ f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \end{aligned}$$

充分性 将 $\rho=0$ 代入联合概率密度函数, 得

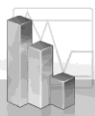
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \\ &= f_X(x) f_Y(y) \end{aligned}$$

所以, X 与 Y 相互独立。

必要性 若 X 和 Y 相互独立, 则 $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, 有 $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ 。

特别地, 将 $x=\mu_1, y=\mu_2$ 代入上式, 有

$$f(\mu_1, \mu_2) = f_X(\mu_1) f_Y(\mu_2)$$



即

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

从而, $\rho=0$ 。

在实际问题中, 随机变量的独立性往往不是从其数学定义验证出来的; 相反, 常常从随机变量产生的实际背景判断它们的独立性, 然后再使用独立性的性质和结论。

3.7 随机向量函数的分布

同一维随机向量的函数一样, 二维随机向量的函数 $Z=g(X,Y)$ 也是一个一维随机向量。例如, 众所周知, 射击命中点的坐标 (X,Y) 是一个二维随机向量, 人们往往关心的是击中点偏离中心 O 的距离 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$, 则 Z 也是一个随机变量。下面将根据已知的二维随机变量的分布求出随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布。

这里仅对二维连续型随机向量 (X,Y) 的情形加以讨论, 并且只对两种特殊的函数关系解决分布问题, 这两种函数关系如下。

(1) $Z=X+Y$ 。

(2) $Z=\max(X,Y)$ 及 $Z=\min(X,Y)$, 其中 X 与 Y 相互独立。

3.7.1 $Z=X+Y$ 的分布

设二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)$, 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数。

$Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x,y) dx dy$$

这里积分区域 $G: x+y \leq z$ 是直线 $x+y=z$ 及其左下方的半平面, 如图 3.8 所示。

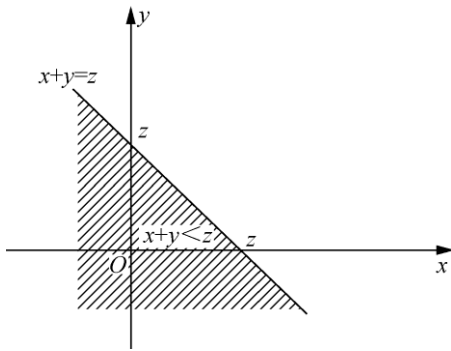


图 3.8 $Z=X+Y$ 的分布

转化成累次积分得

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y) dx \right] dy$$

令

$$x=u-y, \text{ 则 } \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^z f(u-y,y) du \right] dy = \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y) dy \right] du$$



由概率密度的定义, 即得 Z 的概率为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy \quad (3.27)$$

由 X, Y 的对称性, $f_Z(z)$ 又可写成

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx \quad (3.28)$$

式(3.27)与式(3.28)皆是两个随机向量和的概率密度的一般公式。

特别地, 当 X 和 Y 相互独立时, 设 (X, Y) 关于 X, Y 的边缘密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 式(3.27)与式(3.28)分别化为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \quad (3.29)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \quad (3.30)$$

例 3.18 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量。它们都服从 $N(0, 1)$ 分布, 其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (-\infty < y < +\infty)$$

求和函数 $Z = X + Y$ 的概率密度。

解 由式(3.30), 得

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} dx \end{aligned}$$

令 $t = x - \frac{z}{2}$, 得

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

即 Z 服从 $N(0, 2)$ 分布。

一般来说, 设 X, Y 相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 、 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。由式(3.30)经过计算知 $Z = X + Y$ 仍然服从正态分布, 且有 $Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 。

例 3.19 设 X, Y 是两个相互独立的随机变量, 且都服从 $N(0, \sigma^2)$, 求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的分布函数和概率密度。

解 由已知 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x, y < +\infty)$$

因 Z 是非负的, 故当 $z < 0$ 时, 其分布函数 $F_Z(z) = 0$ 。

当 $z > 0$ 时, $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z\}$

$$= \iint_D \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy \quad (\text{其中 } D \text{ 为由 } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \text{ 所确定的圆域})$$



作极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot 2\pi\sigma^2 \left(1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \right) = 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

于是 Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这就是瑞利(Rayleigh)分布的概率密度。

本节开始提出的射击问题中的距离 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 是一个随机变量, 它服从瑞利分布。因为一般都假定命中点的坐标 X 、 Y 相互独立, 且服从同样的正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 。

例 3.20 设某种商品在一周内的需要量是一个随机变量, 概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

如果各周的需要量相互独立, 求两周需要量的概率密度函数。

解 分别用 X 和 Y 表示该种商品在第一周、第二周内的需要量, 则其概率密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}; \quad f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

两周需要量 $Z = X + Y$ 概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

当 $\begin{cases} x > 0 \\ z-x > 0 \end{cases}$ 时, 被积函数不为零。因此, 当 $Z \leq 0$ 时, $f_Z(z) = 0$ 。

当 $Z > 0$ 时, $f_Z(z) = \int_0^z xe^{-x} \cdot (z-x)e^{-(z-x)} dx = \frac{z^3}{6} e^{-z}$ 。

所以, Z 的概率密度为 $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{6} e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

3.7.2 $Z = \max\{X, Y\}$ 和 $Z = \min\{X, Y\}$ 的分布

设 X 、 Y 是两个相互独立的随机变量, 分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 现在来求



$Z = \max\{X, Y\}$ 及 $Z = \min\{X, Y\}$ 的分布函数。

由于 “ $Z = \max\{X, Y\} \leq z$ ” 等价于 “ $X \leq z, Y \leq z$ ”，故有

$$P\{Z \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\}$$

再由 X 和 Y 相互独立，得到 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = P\{X \leq z\}P\{Y \leq z\}$$

即

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z) \quad (3.31)$$

类似地，可得 $Z = \min\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = 1 - P\{Z > z\} = 1 - P\{X > z, Y > z\}$$

即有

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] \\ &= F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)F_Y(z) \\ F_{\min}(z) &= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] \end{aligned} \quad (3.32)$$

例 3.21 如图 3.9 所示，系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1 、 L_2 连接而成，连接方式分别为：

- (1) 串联。
 - (2) 并联。
 - (3) 备用(开关完全可靠，子系统 L_2 在储备期内不失效，当 L_1 损坏时， L_2 开始工作)。
- 设 L_1 、 L_2 的寿命分别为 X 和 Y ，概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}; \quad f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

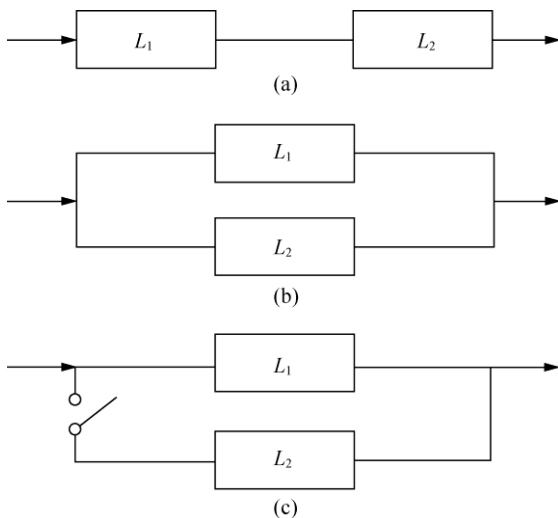
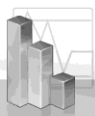


图 3.9 例 3.21 用图

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 且 $\alpha \neq \beta$ 为常数。分别对以上 3 种连接方式写出系统寿命 Z 的概率密度。

解 先求 X 、 Y 的分布函数



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

(1) 串联时:

$$Z = \max\{X, Y\}$$

$$\begin{aligned} F_{\min}(z) &= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

概率密度函数为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

(2) 并联时:

$$Z = \max\{X, Y\}$$

$$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}), & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

概率密度函数为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

(3) 备用时:

$$Z = X + Y$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

当 $z \leq 0$ 时, $f_Z(z) = 0$; 当 $z > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x) dx \\ &= \int_0^z \alpha e^{-\alpha x} \cdot \beta e^{-\beta(z-x)} dx = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} (e^{-\beta z} - e^{-\alpha z}) \end{aligned}$$

从而得

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} (e^{-\beta z} - e^{-\alpha z}), & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

3.8 n 维随机向量

在实际问题中, 除了二维随机向量外, 常常还会遇到 $n(n \geq 3)$ 维随机向量, 比如一炉钢的好坏, 要涉及含碳量 X 、含硫量 Y 和硬度 Z 3 个随机变量, 从而形成一个三维随机向



量 (X, Y, Z) 。又如, 在讨论某工厂每年产品的生产情况时, 用 X_i 表示该工厂第 i 月份产品的产量, $i=1, 2, \dots, 12$, 形成了一个12维随机向量 $(X_1, X_2, \dots, X_{12})$ 。有关二维随机向量的概念和结论, 可以推广到 n 维随机向量上去。

3.8.1 定义和分布函数

设随机试验 E 的样本空间为 Ω , $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是定义在 Ω 上的 n 维随机向量。 n 维随机向量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的性质不仅与每个分量的性质有关, 而且还依赖于它们之间的相互关系。

分布函数仍然是描述 n 维随机向量分布的重要工具。设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 n 维随机向量, 对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, n 元函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \quad (3.33)$$

为 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的分布函数。 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 具有类似于二维随机向量分布函数的性质。

现在只讨论 n 维连续型随机向量, 因为这种类型更常见。

3.8.2 n 维连续型随机向量

对于 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 如果存在非负函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 使得对于任意实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \quad (3.34)$$

则称 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 n 维连续型随机向量, 称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的概率密度函数, 简称概率密度。

函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 具有二维连续型随机向量概率密度函数的类似性质。

n 维连续型随机向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的边缘分布比二维情况要复杂, 其中常用的是每个分量 X_i 的边缘概率密度 $f_{X_i}(x_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$)。以 X_1 为例, 其边缘概率密度为

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \quad (3.35)$$

若对于任意实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 有

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n) \quad (3.36)$$

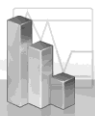
则称 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立。

例 3.22 三维连续型随机向量 (X_1, X_2, X_3) 的概率密度函数为

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2+x_3)}, & x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

判断 X_1, X_2, X_3 是否相互独立。

解 先求 X_1, X_2, X_3 的边缘概率密度



$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3$$

当 $x_1 \leq 0$ 时, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, 于是 $f_{X_1}(x_1) = 0$ 。当 $x_1 > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1+x_2+x_3)} dx_2 dx_3 \\ &= e^{-x_1} \left(\int_0^{\infty} e^{-x_2} dx_2 \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-x_3} dx_3 \right) \\ &= e^{-x_1} \end{aligned}$$

因此

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} e^{-x_1}, & x_1 > 0 \\ 0, & x_1 \leq 0 \end{cases}$$

同理, 有

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} e^{-x_i}, & x_i > 0 \\ 0, & x_i \leq 0 \end{cases} \quad (i = 2, 3)$$

对于任意实数 x_1, x_2, x_3 , 有

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3)$$

所以 X_1, X_2, X_3 相互独立。

3.8.3 n 维随机向量函数的分布

对于 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 设其 n 个分量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的函数 $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$, Z 是一个随机变量, 现由 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布求 Z 的分布。下面只对两种重要的情况给出结果。

(1) 设 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) (i=1, 2, \dots, n)$, 并且 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 则

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2) \quad (3.37)$$

(2) $Z = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 和 $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立。

设 X_i 的分布函数为 $F_{X_i}(x_i) (i=1, 2, \dots, n)$, 则 $Z = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z) F_{X_2}(z) \dots F_{X_n}(z) \quad (3.38)$$

$Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)] [1 - F_{X_2}(z)] \dots [1 - F_{X_n}(z)] \quad (3.39)$$

特别地, 如果 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 具有相同的分布函数 $F(z)$, 有

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n \quad (3.40)$$



$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n \quad (3.41)$$

例 3.23 设某种型号灯泡的寿命(以h计)近似地服从 $N(1000, 20^2)$ 分布, 现随机选取4只灯泡, 求其中没有一只灯泡的寿命小于1020h的概率。

解 设 $X \sim N(1000, 20^2)$, 4只灯泡的寿命为 X_1, X_2, X_3, X_4 , 则它们相互独立, 且与 X 有相同的分布。记 $Z = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, 则所求概率为 $P\{Z \geq 1020\}$ 。

由于

$$P\{Z \geq 1020\} = 1 - P\{Z < 1020\} = 1 - F_{\min}(1020)$$

由式(3.41)得

$$F_{\min}(1020) = 1 - [1 - F(1020)]^4$$

于是

$$P\{Z \geq 1020\} = [1 - F(1020)]^4$$

这里 $F(x)$ 是 X 的分布函数, 得

$$F(1020) = P\{X \leq 1020\} = \Phi\left(\frac{1020 - 1000}{20}\right) = \Phi(1) = 0.8413$$

因此

$$P\{Z \geq 1020\} = (1 - 0.8413)^4 = 0.00063$$

习 题 3

3.1 求在 D 上服从均匀分布的随机向量 (X, Y) 的联合概率密度, 并求 $P\left\{X < -\frac{1}{8}, Y < \frac{1}{2}\right\}$ 的值, 其中 D 为 x 轴、 y 轴及直线 $y = 2x + 1$ 所围成的三角形区域。

3.2 设随机向量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k ; (2) 求 $P\{0 < X < 1, 0 < Y < 2\}$; (3) 求 $P\{3X + 4Y < 3\}$ 。

3.3 设随机向量 (X, Y) 的概率密度函数为

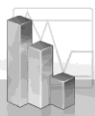
$$f(x, y) = \begin{cases} k(2 - \sqrt{x^2 + y^2}), & x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试确定常数 k , 并求出 (X, Y) 落在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 内的概率。

3.4 盒中装有3个黑球、2个白球。现从中任取4个球, 用 X 表示取到黑球的个数, 用 Y 表示取到白球的个数, 求 (X, Y) 的概率分布。

3.5 将一枚均匀的硬币抛掷3次, 用 X 表示在3次中出现正面的次数, 用 Y 表示在3次中出现正面次数与出现反面次数之差的绝对值, 求 (X, Y) 的概率分布。

3.6 设随机向量 (X, Y) 的概率密度函数为



$$f(x, y) = \begin{cases} A(3x^2 + xy), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 确定常数 A ; (2) 求 $P\{X + Y \leq 1\}$ 。

3.7 设随机向量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 4.8y(2 - x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求边缘密度函数; (2) 判断 X 和 Y 是否相互独立?

3.8 设随机向量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{c}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

(1) 求系数 c ; (2) 求 (X, Y) 落在以 $(0, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(1, 1)$ 为顶点的正方形内的概率; (3) 判断 X 和 Y 是否相互独立?

3.9 设随机向量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x, y)$; (2) 求 $P\{Y \leq X\}$ 。

3.10 设随机向量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求边缘概率密度。

3.11 设随机向量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2y, & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 试确定常数 c ; (2) 求边缘概率密度。

3.12 设随机向量 (X, Y) 的概率分布如表 3.8 所示, 求 X 和 Y 的边缘分布。

表 3.8 习题 3.12 用表

$\begin{matrix} Y \\ \backslash \\ X \end{matrix}$	0	2	5
1	0.15	0.25	0.35
3	0.05	0.18	0.02

3.13 求习题 3.12 的条件分布。

3.14 设 X 、 Y 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}; \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求随机向量 $Z = X + Y$ 的概率密度。

3.15 某种商品第一周的需求量是一个随机向量 X , 其概率密度为



$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

设第二周的需求量 Y 与 X 相互独立且概率密度相同, 试求两周需要总量的概率密度。

3.16 设 X 在区间 $(0,1)$ 上随机取值, 当观察到 $X = x (0 < x < 1)$ 时, Y 在区间 $(x,1)$ 上随机取值, 求 Y 的概率密度函数。

3.17 设随机向量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$; (2) 求 $P\left\{Y < \frac{1}{2} \mid X = \frac{1}{2}\right\}$ 。

3.18 问: 习题 3.12 中的 X 和 Y 是否相互独立?

3.19 设随机向量 (X,Y) 的概率分布如表 3.9 所示。

问: a 、 b 取何值时, X 和 Y 相互独立?

表 3.9 习题 3.19 用表

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	a	b

3.20 设随机向量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

问: X 和 Y 是否相互独立?

3.21 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机向量, X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度。

(2) 设含有 a 的二次方程为 $a^2 + 2Xa + Y = 0$, 试求 a 有实根的概率。

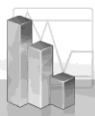
3.22 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, 并且均在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布, 求 $X+Y$ 的概率密度函数。

3.23 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}; \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

求随机向量 $Z=X+Y$ 的概率密度。

3.24 设随机向量 (X,Y) 的概率密度函数为



$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < \infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 试求常数 b 。
- (2) 求边缘概率密度。
- (3) 求函数 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数。

3.25 设电子元件的寿命 $X(h)$ 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} 0.0015e^{-0.0015x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

今测试 6 个元件, 并记录下它们各自的失效时间, 求:

- (1) 到 800h 时没有一个元件失效的概率。
- (2) 到 3000h 时所有元件都失效的概率。