第 3 章 Chapter 3

单相正弦交流电路

在实际工作和生活中，我们遇到的电气设备绝大多数使用的是正弦交流电，如各类家用电器和工业场合的机床、水泵等。本章主要讨论正弦交流电的产生和表示方法，交流电路中电路元件的电压—电流关系，阻抗的联结，电路的功率和功率因数等。

3.1 正弦交流电的表示方法

【学习目标】

- 熟悉正弦交流电的三要素：幅值、角频率、初相位。
- 熟悉正弦交流电的波形图，能在波形图上定性标出正弦交流电的三要素。
- 掌握正弦交流电的相量表示法，能用相量法进行正弦交流电的基本运算。

【学习指导】

交流电比直流电复杂，其用途也远比直流电广泛。从事与电气相关的工作，应该具备交流电的基本知识。正弦交流电的基本特征是其幅值、角频率和初相位。

交流电有多种表示方法，每种表示方法有其特殊的用途。三角函数表示法在高中阶段已经熟悉，它能直观体现正弦量的三要素。相量表示法是本节的主要内容，相量的表现形式分为复数、相量图和极坐标表示法。复数形式适合正弦量的和差运算；相量图形式便于观察多个正弦量的相对关系、进行正弦量的和差估算；极坐标形式适合正弦量的积商运算。

为了学好并应用交流电，我们从学习正弦量的相量表示法开始。

3.1.1 正弦交流电的三要素

按正弦规律变化的电压或电流称为正弦交流电，典型的正弦交流电表示为

$$\left.\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \varphi_i)(\mathrm{A}) \\ u &= U_m \sin(\omega t + \varphi_u)(\mathrm{V}) \end{aligned}\right\} \tag{3-1-1}$$

式(3-1-1)中,前者表示正弦交流电流的瞬时值,后者表示正弦交流电压的瞬时值。

从以上两个表达式可以看到,正弦量的特征表现在变化幅度的大小、快慢及初始值三个方面,如图 3-1-1 所示,这些特征量是正弦交流电的三要素,即幅值、角频率和初相位。下面将分别讨论三要素的物理意义和表示方法。

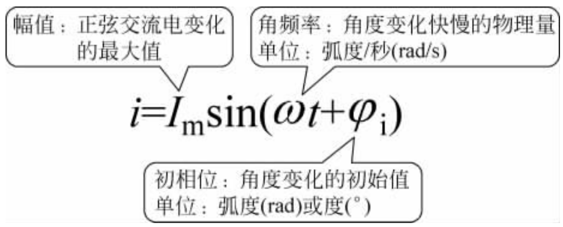


图 3-1-1　正弦交流电的三要素

1. 幅值(有效值)

幅值是正弦交流电变化的最大值,也是瞬时值中的最大值,常用带下标 m 的大写字母来表示,如 I_m、U_m、E_m等。

正弦交流电用瞬时值和幅值表示在计算的时候都不是很方便。为了计算方便,通常用有效值来表示。

有效值和幅值之间是按照在一个周期内产生的热量相等来等效的。在图 3-1-2 中,如果正弦交流电流 i 通过电阻 R 在一个周期内产生的热量,与相同时间内直流电流 I 通过电阻 R 产生的热量相等,那么这个周期性变化的电流 i 的有效值在数值上就等于直流 I。

在一个周期的时间内,交流电流产生的热量与直流电流产生的热量相对应的表达式为

$$\int_0^T Ri^2 \mathrm{d}t = RI^2 T$$

即

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \mathrm{d}t}$$

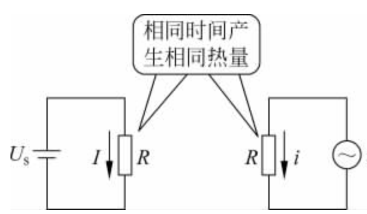


图 3-1-2　有效值的含义

上式适用于任何周期性的变化量,但不能用于非周期量。对于正弦量,其计算结果为:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [I_m \sin(\omega t + \varphi)]^2 \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} I_m^2 [1 - \cos 2(\omega t + \varphi)] \mathrm{d}t} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} I_m \end{aligned} \tag{3-1-2}$$

同理,正弦交流电压的幅值与有效值之间的关系也是如此。表 3-1-1 列出了电流、电压的幅值和有效值之间的关系。

表 3-1-1 正弦交流电量的瞬时值、幅值、有效值之间的关系

瞬 时 值	幅 值	有 效 值
$i=I_m\sin(\omega t+\varphi_i)$	I_m	$I=\frac{\sqrt{2}}{2}I_m=0.707I_m$
$u=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)$	U_m	$U=\frac{\sqrt{2}}{2}U_m=0.707U_m$

注：交流电的大小通常都是指有效值，如家用空调电压 220V，工厂的电动机电压 380V，电流 5A 等指的都是有效值。

交流电压表和电流表的读数一般也是有效值，但是一些电器元件的耐压值指的是该元件能够承受的最大值。这一点在实际工作中要特别注意，使用不当会造成元件损坏。

【例 3-1-1】 有一个耐压值为 250V 的电容器，能否在交流电压为 220V 的电路中正常使用？

【解】 交流电压的有效值是 220V，其最大值为

$$U_m = 1.414 \times 220 = 311(\text{V})$$

这个电压超过了电容器 250V 的耐压值，所以该电容用于 220V 的交流电路中会由于过电压而损坏。

2. 角频率(周期、频率)

角频率、周期和频率都是表征正弦量变化快慢的量，它们之间的关系如表 3-1-2 所示。

表 3-1-2 正弦交流电量的角频率、周期、频率之间的关系

<table>
<tr><th>角频率(ω)</th><th>周期(T)</th><th>频率(f)</th></tr>
<tr><td>定义：角频率 ω 是指正弦量每秒钟变化的角度
单位：弧度/秒(rad/s)</td><td>定义：周期 T 是指正弦量每变化一周所需的时间
单位：秒(s)</td><td>定义：频率 f 是指正弦量每秒钟变化的次数
单位：赫兹(Hz)</td></tr>
<tr><td colspan="3">频率与周期之间的关系为 T=1/f
正弦交流电每秒变化 f 次，每变化一周是 2π 弧度，所以每秒旋转的角度是为 ω=2πf
角频率、周期、频率三者之间的关系为：ω=2πf=2π/T</td></tr>
</table>

我国工业用电的频率是 50Hz，即每秒变化 50 次，它的周期是 0.02s，每秒变化的角速度是

$$\omega = 2\pi f = 2 \times 3.14 \times 50 = 314(\text{rad/s})$$

3. 初相位

在图 3-1-3 中有两个相量，同时开始沿圆点逆时针方向以相同的角速度 ω 旋转，一个大小为 U_m，起始角度为 φ_u，在纵坐标上的投影为

$$u = U_m\sin(\omega t + \varphi_u)$$

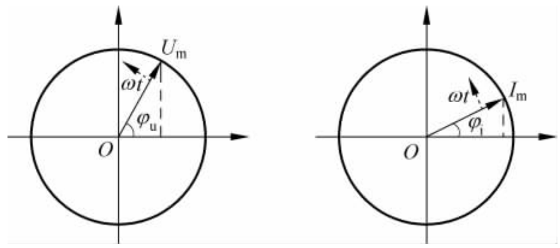


图 3-1-3　初相位示意图

另一个大小为 I_m，起始角度为 φ_i，在纵坐标上的投影为

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

仔细观察会发现，这两个正弦量的旋转起点不同，它们与横坐标的夹角就不同，这个夹角就是正弦量的初相位。此外，只要这两个正弦量的旋转速度和转向相同，它们之间的角度差就会一直保持不变。为计算和测量方便，初相位的取值范围规定为$[-\pi,\pi]$。两个正弦交流电之间的角度差称为相位差，表 3-1-3 列出了相位差之间的关系。

表 3-1-3　正弦交流电量的相位关系

初　相　位	相　位　差	相 位 关 系
φ_u φ_i	$\varphi=\varphi_u-\varphi_i$	$\varphi>0$，φ_u超前 φ_i $\varphi<0$，φ_u滞后 φ_i $\varphi=0$，φ_u与 φ_i同相位 $\varphi=\pi$，φ_u与 φ_i反相位

上面较为详细地介绍了正弦交流电的三要素，可以说，只要能够体现其三要素，就可以表示正弦交流电。正是基于这一点，出现了正弦交流电的各种表示方法，每种表示方法都是为了观察或计算的方便而设，每种表示方法都有其特定的优势。

3.1.2　正弦交流电的表示方法

1．波形图表示法

图 3-1-4 所示是正弦交流电流 $i=I_m\sin(\omega t+\varphi)$的波形图，体现正弦量特征的是幅值、周期和初相位三个要素。图 3-1-5 所示是两个正弦交流电流的波形图。图中的两个正弦量周期(频率)相同，幅值和初相位不同。i_1与 i_2的相位差为 $\varphi=\varphi_{i1}-(-\varphi_{i2})=\varphi_{i1}+\varphi_{i2}$。

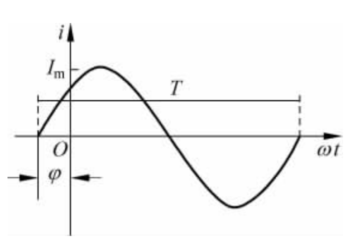


图 3-1-4　正弦量的三要素

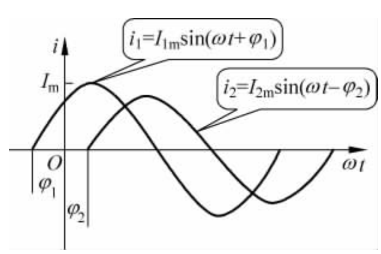


图 3-1-5　两个正弦量的运算

正弦交流电的三角函数表示法和波形图表示法的共同特点是可以很方便地体现出正弦量的三要素，同时非常方便地看到正弦量在一个周期的变化过程。

【例 3-1-2】 有两个正弦交流电流，$i_1=I_{1m}\sin(\omega t+\varphi_1)$，$i_2=I_{2m}\sin(\omega t-\varphi_2)$。试求两个电流之和 i 为多少？

【解】 本例尝试用三角函数和波形图叠加的方式求解两个电流之和。

方法 1：三角函数表示。

要计算交流电流 i 的值，实际上需要确定的是 i 的三要素，即幅值、角速度和初相位。根据和差化积的三角函数计算方法，确定 i 的三要素分别如下。

(1) 幅值：$I_m=\sqrt{(I_{1m}\cos\varphi_1+I_{2m}\cos\varphi_2)^2+(I_{1m}\sin\varphi_1-I_{2m}\sin\varphi_2)^2}$。

(2) 角速度：同频率(周期/角速度)的两个正弦量作和差运算时，其频率不变，仍为 ω。

(3) 初相位：$\varphi=\tan^{-1}\left(\dfrac{I_{1m}\sin\varphi_1-I_{2m}\sin\varphi_2}{I_{1m}\cos\varphi_1+I_{2m}\cos\varphi_2}\right)$。

把以上三要素代入可得

$$i=I_m\sin(\omega t+\varphi)$$

方法 2：波形图表示。

采用波形图表示的两个正弦量求和时，需要把同一时刻对应的两个点逐一求和，其结果如图 3-1-6 所示，结论与方法 1 相同。

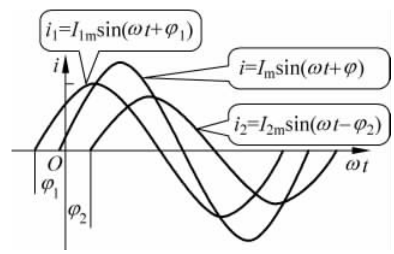


图 3-1-6 两个正弦量的运算

从例 3-1-2 可以看出，在进行两个正弦交流电量的运算时，这两种表示方法都显得比较烦琐。如果不借助其他工具，有时甚至无法完成计算。为方便运算，需要寻求其他更为简便的表示方法。

上面的计算结果显示，两个正弦交流电量进行和差运算时，频率(周期/角速度)不发生变化。为了计算和比较方便，在表示几个同频率正弦交流电量时，往往只表达出它的大小和方向，即幅值和初相位。

下面介绍的正弦交流电的复数、相量和极坐标表示法就是抽取了幅值和初相位来表示一个正弦交流电量，这些表示方法为后续的计算带来极大的方便。

2. 复数表示法

只有大小、没有方向的量称作标量，如质量、密度、温度、功、能量、路程、速率、体积、热量、电阻等。无论选取什么坐标系，标量的数值恒保持不变。

既有大小又有方向的量在物理学中称作矢量，如力、速度、位移、电压、电流等。在数学中，又把专门表示正弦交流电量的矢量称作相量，如电压、电流等。

把一个矢量在复平面上用一个复数表达出来，其目的是借助复数的运算法则进行计算。

如图 3-1-7 所示，矢量 $\dot{F}$ 是一个既有大小又有方向的量，它的大小为 F，方向与正实轴的夹角为 φ。这样，就可以用一个复数来表示矢量 $\dot{F}$ 的大小和方向。

用复数表示矢量的方法有两种，即

（1）在复平面上以一个有向线段来表示，如图 3-1-7 所示。

（2）用复数的代数式来表示，如

$$\dot{F} = a + \mathrm{j}b = F\cos\varphi + \mathrm{j}F\sin\varphi$$

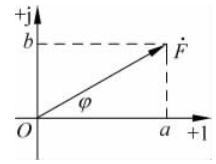


图 3-1-7　力的矢量表示

在高中数学中，已经接触过复数、复平面以及复数的运算。复数的和差运算非常方便。使用复数来表示矢量后，可以借助复数的运算法则进行两个矢量的计算。

【例 3-1-3】　有两个矢量，$\dot{F}_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1$，$\dot{F}_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$。试求这两个矢量的和与差。

【解】　通过本例，复习矢量加减计算的基本方法。

$$\dot{F} = \dot{F}_1 \pm \dot{F}_2 = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2)$$

$$F = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b_1 \pm b_2}{a_1 \pm a_2}\right)$$

正弦交流电流是一个相量，也可以用复数来表示。它的大小就是其幅值，它的方向就是初相位。例如，$i = I_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi)$的复数形式如图 3-1-8 中的有向线段$\dot{I}_\mathrm{m}$所示。

在实际运算中，由于电流和电压以有效值表示比较方便，所以在一般的资料中，$i = I_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi)$的向量形式常用其有效值的相量$\dot{I} = a + \mathrm{j}b = I(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$来表示。这样表示之后，我们再来看看如何进行两个正弦交流电量的和差运算。

【例 3-1-4】　已知 $i_1 = I_{1\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_1)(\mathrm{A})$，$i_2 = I_{2\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_2)(\mathrm{A})$，试求两个电流之和。

【解】　本例通过两个正弦量的定性运算，给出具有普适性的计算公式。

（1）把两个正弦交流电量用复数的形式表示，如图 3-1-9 所示。

i_1的复数形式为

$$\dot{I}_1 = I_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{j}\sin\varphi_1)(\mathrm{A})$$

i_2的复数形式为

$$\dot{I}_2 = I_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{j}\sin\varphi_2)(\mathrm{A})$$

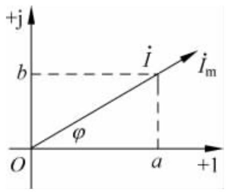


图 3-1-8　电流矢量表示

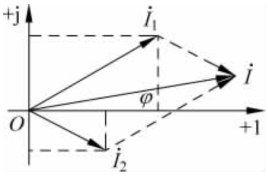


图 3-1-9　用复数表示的两个正弦交流电量

（2）求两个复数之和。

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \\ &= (I_1\cos\varphi_1 + \mathrm{j}I_1\sin\varphi_1) + (I_2\cos\varphi_2 + \mathrm{j}I_2\sin\varphi_2) \\ &= (I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2) + \mathrm{j}(I_1\sin\varphi_1 + I_2\sin\varphi_2)\end{aligned}$$

电流之和的幅值为

$$I=\sqrt{(I_1\cos\varphi_1+I_2\cos\varphi_2)^2+(I_1\sin\varphi_1+I_2\sin\varphi_2)^2}\,(\mathrm{A})$$

电流之和的初相位为

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{I_1\sin\varphi_1+I_2\sin\varphi_2}{I_1\cos\varphi_1+I_2\cos\varphi_2}\right)$$

(3) 计算出幅值与初相位后,还原为三角函数表示的正弦交流电量

$$i=I_m\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{A}$$

这个例题说明,相量(复数)的运算符合平行四边形法则。尤其是当有多个正弦交流电量进行和差运算时,其优点尤其突出。

对于 n 个频率相同的正弦交流电流的求和运算,其电流之和的有效值为

$$I=\sqrt{(I_1\cos\varphi_1+I_2\cos\varphi_2+\cdots+I_n\cos\varphi_n)^2+(I_1\sin\varphi_1+I_2\sin\varphi_2+\cdots+I_n\sin\varphi_n)^2}\,(\mathrm{A})$$

电流之和的初相位为

$$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{I_1\sin\varphi_1+I_2\sin\varphi_2+\cdots+I_n\sin\varphi_n}{I_1\cos\varphi_1+I_2\cos\varphi_2+\cdots+I_n\cos\varphi_n}\right)$$

电流之和的瞬时值为

$$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)(\mathrm{A})$$

有兴趣的读者可尝试列出 n 个同频正弦交流电流的求差运算的计算公式。

提示: 为了运算方便,正弦交流电量可以借助复数的形式来表示,但需要强调的是,正弦交流电量不是复数。

3. 极坐标表示法

正弦交流电量是相量,相量可以采用复数形式来表示,而一个复数又可以用极坐标的形式来表示。一个正弦交流电流 $i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$,如采用极坐标表示,写为

$$\dot{I}=I\angle\varphi$$

式中:I 是交流电流的有效值;φ 是其初相位。极坐标表示法非常适合两个复数的积商运算。

两个复数求积运算的方法为:幅值相乘,幅角相加。

两个复数求商运算的方法为:幅值相除,幅角相减。

【例 3-1-5】 有一个电流 $i=10\sqrt{2}\sin(314t+30)(\mathrm{A})$,通过 $Z=(4+\mathrm{j}4)\Omega$ 的复阻抗。试求该阻抗元件两端的电压为多少?

【解】 通过本例,学习两个复数相乘的计算方法。

根据欧姆定律,一个元件两端的电压为电流与阻抗的乘积。按照以下步骤进行计算。

(1) 把正弦交流电流 $i=10\sqrt{2}\sin(314t+30°)(\mathrm{A})$ 用极坐标式表示为

$$\dot{I}=10\angle30°$$

(2) 把复阻抗 $Z=(4+\mathrm{j}4)\Omega$ 用极坐标式表示为

$$Z=4\sqrt{2}\angle45°$$

(3) 求阻抗两端的电压。

$$\dot{U}=\dot{I}\cdot Z$$

$$= 10\angle 30^\circ \times 4\sqrt{2}\angle 45^\circ = 40\sqrt{2}\angle(30^\circ + 45^\circ)$$
$$= 40\sqrt{2}\angle 75^\circ$$

(4) 把电压的极坐标式还原为瞬时值表达式。上式中,电压的幅值为$\sqrt{2}\times 40\sqrt{2}=80(\mathrm{V})$,初相位为 75°,角速度与电流一致,为 314rad/s,则电压瞬时值的表达式为

$$u = 80\sin(314t + 75^\circ)(\mathrm{V})$$

从上例可以看出,相量的极坐标式表示法在进行积商运算时非常方便。

4. 相量图表示法

相量除了可以用复数、极坐标的形式表示外,还可以用相量图的形式表示。相量图实际上是复数表示法的简化。

在复平面中,去掉复坐标,设置一个初相位为 0 的参考相量(见图 3-1-10(b)中虚线所示)。在相量图表示法中,需要按比例画出相量的大小和相对于参考相量的初相位。

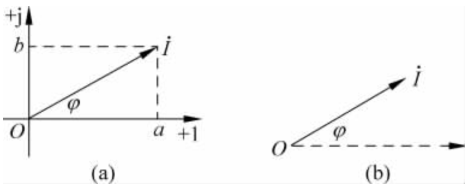


图 3-1-10　复数与相量图

相量图表示法主要用于观察多个相量的相对关系,进行相量的和差估算。

【例 3-1-6】 某电风扇电路的工作电压 $u=311\sin(\omega t)(\mathrm{V})$,工作线圈电流 $i_1=0.57\sin(\omega t+30^\circ)(\mathrm{A})$,启动线圈电流 $i_2=0.42\sin(\omega t-60^\circ)(\mathrm{A})$。试用相量图标出各量之间的相对关系。

【解】 通过本例,学习用相量图表达正弦交流电量。

(1) 把三个正弦交流电量用极坐标式表示为

$$\dot{U} = 220\angle 0^\circ\mathrm{V},\quad \dot{I}_1 = 0.4\angle 30^\circ\mathrm{A},\quad \dot{I}_2 = 0.3\angle(-60^\circ)\mathrm{A}$$

(2) 在相量图上按长度比例和角度大小画出三个正弦交流电量,同一种物理量需要按统一比例画出,如图 3-1-11 所示。

【例 3-1-7】 两个电流分别为 $i_1=0.57\sin(\omega t+30^\circ)(\mathrm{A})$,$i_2=0.42\sin(\omega t-60^\circ)(\mathrm{A})$。试用相量图画出 i_1-i_2。

【解】 通过本例,熟悉用相量图进行两个相量的和差运算。

(1) 把两个正弦交流电量分别用极坐标式表示为

$$\dot{I}_1 = 0.4\angle 30^\circ\mathrm{A},\quad \dot{I}_2 = 0.3\angle(-60^\circ)\mathrm{A}$$

(2) 在相量图上按比例画出两个电流相量。$\dot{I}_1-\dot{I}_2$也可表示为$\dot{I}_1+(-\dot{I}_2)$,即把$\dot{I}_2$反向画出,如图 3-1-12 所示。

(3) 按平行四边形法则画出两个电流相量之和。

从上面两例可以看出,通过相量图能非常方便地观察两个相量之间的相对关系,并可定性地进行两个相量的和差估算。

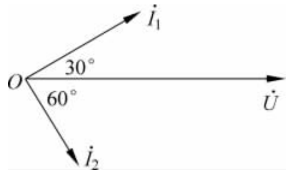


图 3-1-11　电压电流相量图

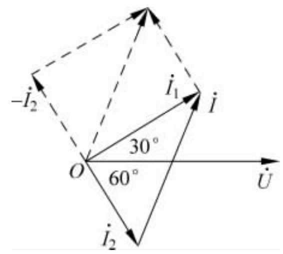
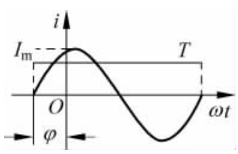
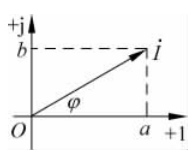
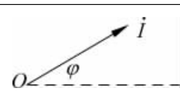


图 3-1-12　相量的和差运算

3.1.3　正弦交流电各种表示法的比较

正弦交流电各种表示法的比较如表 3-1-4 所示。

表 3-1-4　正弦交流电各种表示法的比较(以电流为例说明)

表示方法	形　式	应 用 场 合
三角函数	$i=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)$	直观体现正弦量的三要素,可求取任意时刻的电流值
波形图		直观体现正弦量的三要素。通过示波器可以观察任意时刻的电流值,也可以初步估算正弦量的幅值、频率和初相位
复数		$\dot{I}=a+\mathrm{j}b=I\cos\varphi+\mathrm{j}I\sin\varphi$ 适合正弦量的和差运算
相量图		观察多个正弦量的相对关系,进行正弦量的和差估算
极坐标	$\dot{I}=I\angle\varphi$	适合进行正弦量的积商运算

说明:

(1) 同样一个正弦交流电量可以有多种表示方法,每种方法各有所长。

(2) 复数、相量和极坐标表示方法可以互相转化,可根据运算的需要进行选择。

思考与练习

3-1-1　什么是正弦量的三要素?正弦量的幅值和有效值之间是什么关系?

3-1-2　什么是正弦量的角速度、频率和周期?三者之间是什么关系?

3-1-3　什么是正弦量的相位、初相位、相位差?

3-1-4　两个同频率正弦量之间相位的超前、滞后、同相、反相表示什么含义?

3-1-5　说明下列表达式的含义:

(1) $i=3\mathrm{A}$　(2) $I=3\mathrm{A}$　(3) $I_{\mathrm{m}}=3\mathrm{A}$　(4) $\dot{I}=3\mathrm{A}$

3.2　单一参数电路的分析与计算

【学习目标】

- 掌握纯电阻、纯电感、纯电容电路中，电压与电流的大小和相位关系。
- 掌握纯电阻、纯电感、纯电容电路中，元件功率的性质和计算方法。

【学习指导】

实际中的电路多数由复合元件组成，如电风扇中的电机是由电阻和电感元件组成，到处可见的输电线路由分布式电阻、电感和电容元件组成。

复合元件电路的分析和计算建立在单一参数元件的基础之上，只要理解了各种单一参数元件的电压—电流—功率关系，复合元件的分析和计算就会迎刃而解。

3.2.1　纯电阻电路

纯电阻电路是指组成电路的元件只含有电阻元件，可以是一个，也可以由多个电阻元件组合而成。纯电阻电路通过等效变换，总可以用一个等效电阻替代。焊接用的电烙铁、烘干用的电阻炉、洗澡用的电热水器等都可看作是电阻性负载。

1. 电压与电流的关系

电阻元件的电压—电流关系可以用瞬时值、波形图、相量的形式表示。在图 3-2-1 中，电压和电流标注为关联方向。

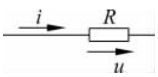


图 3-2-1　电压与电流的方向

(1) 瞬时值表示

设通过电阻 R 的电流为 $i=\sqrt{2}I\sin\omega t$，则其两端的电压为

$$u = Ri = \sqrt{2}RI\sin\omega t = \sqrt{2}U\sin\omega t \tag{3-2-1}$$

(2) 波形图表示

以波形图表示的电压—电流关系如图 3-2-2(a)所示。

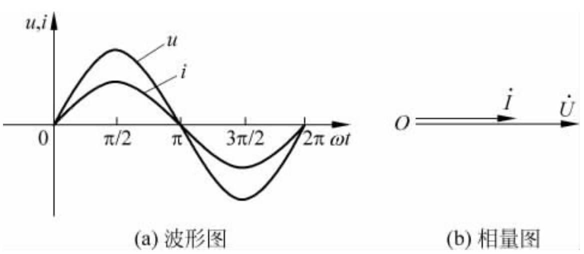


图 3-2-2　电阻元件上的电流与电压

(3) 相量表示

以相量表示的电压—电流关系如图 3-2-2(b)所示。在图中，

$$\left.\begin{aligned} \dot{I} &= I\angle 0^\circ \\ \dot{U} &= RI\angle 0^\circ = U\angle 0^\circ \end{aligned}\right\} \tag{3-2-2}$$