



第二部分 常见题型的 解题技巧



很多特殊方法和解题技巧都需要根据具体的题型进行选择和运用。下面我们简单介绍一些数学计算中常见的题型及它们的解题技巧。

1. 相遇问题

两个运动物体进行相向运动,或者在环形跑道上进行背向运动,一段时间之后,必然会面对面相遇,这类问题叫作相遇问题。它的特点是两个运动物体共同走完整个路程。

相遇问题根据数量关系可分成三种类型:求路程、求相遇时间、求速度。

它们的基本关系式如下:

- (1) 总路程 = (甲速度 + 乙速度) × 相遇时间
- (2) 相遇时间 = 总路程 ÷ (甲速度 + 乙速度)
- (3) 甲速度 = 甲乙速度和 - 乙速度

例子:

(1) 今有甲,发长安,五日至齐;乙发齐,七日至长安。今乙发已先二日,甲乃发长安。问几何日相逢?

这个题目的大意是:甲从长安出发,需五天时间到达齐;乙从齐出发,需七天时间到达长安。现在乙从齐出发两天后,甲才从长安出发,问几天后两人相遇?

解：

这个问题在古代是非常难的，但是现在我们来看，就是一个简单的相遇问题。设长安至齐的距离为 1，甲的速度为 $1/5$ ，乙的速度为 $1/7$ ，因为乙先出发 2 天，所以列出算式为

$$(1-2/7)/(1/5+1/7)=25/12(\text{天})$$

也就是说，还要再经过 $25/12$ 天两人才能相遇。

(2) 我国著名数学家苏步青教授有一次在德国访问，一位有名的德国数学家在电车上给他出了一道题：“甲、乙两人相向而行，距离为 50km。甲每小时走 3km，乙每小时走 2km。甲带一只狗，狗每小时跑 5km，狗跑得比人快，同甲一起出发，碰到乙后又往甲方向走，碰到甲后又往乙方向走，这样继续下去，直到甲、乙两人相遇时，这只狗一共跑了多少千米？”（假设狗的速度恒定，且不计转弯的时间。）

解：

这个问题其实很简单，关键点在于不计狗转弯的时间而且速度恒定。也就是说，只要计算出小狗跑这段路程一共所需要的时间就可以了，而这段时间正好与甲乙两人相遇的时间相同。所以 $t=50/(3+2)=10(\text{小时})$ ，小狗跑的路程 $S=5\times 10=50(\text{km})$ 。

(3) 一位领导到北京开会，会议的主办方派司机王师傅去火车站接。本来王师傅算好了时间，可以与那列火车同时到达火车站。但是不巧的是，领导改变了行程时间，坐了前一趟火车到了北京。而王师傅还是按照预计时间出发的。领导一个人在车站等着也无事可做，就乘坐了一辆出租车前往会场，并通知了王师傅。出租车开了半个小时，出租车司机和王师傅在路上相遇了。领导上了王师傅的车，一刻也不耽误地赶到了会场，结果比预计时间早了 20 分钟。

请问，领导坐的车比预计的车早到了多长时间？

解：

王师傅比预计时间提前了 20 分钟到会场，也就是说他从遇到出租车到火车站这段路程来回需要 20 分钟。所以从相遇时到到达火车站，王师傅需要 10 分钟。也就是说，按照预计的时间，再过 10 分钟火车应该到站，但是此时上一趟火车已经到站 30 分钟了，所以领



导坐的车比预计的车早到了 40 分钟。

2. 追及问题

两个运动物体在不同地点同时出发(或者在同一地点不同时出发,或者在不同地点不同时出发)作同向运动。在后面的物体行进速度要快一些,在前面的物体行进速度慢一些,在一定时间内,后面的物体会追上前面的物体。这类问题叫作追及问题。

它们的基本算式如下:

(1) 追及时间 = 追及路程 $\div$ (快速 - 慢速)

(2) 追及路程 = (快速 - 慢速) $\times$ 追及时间

根据速度差、距离差和追及时间三者之间的关系,常用下面的公式:

(1) 距离差 = 速度差 $\times$ 追及时间

(2) 追及时间 = 距离差 $\div$ 速度差

(3) 速度差 = 距离差 $\div$ 追及时间

(4) 速度差 = 快速 - 慢速

解题的关键是在互相关联、互相对应的距离差、速度差、追及时间三者之中找出两者,然后运用公式求出第三者。

追及问题的变化有很多种,比如著名的放水问题,其实质也可以理解为追及问题。

例如,一个水池有进水管和排水管,单开进水管,10 分钟可注满水;单开排水管,20 分钟可以将满池水排光;如果两根管同时开,多少分钟可注满整个水池?

这个题就可以按追击问题思路来做:进水的速度是 $1/10$,排水的速度是 $1/20$,两者的差为 $1/20$,所以 20 分钟可以注满。

例子:

(1) 两辆车分别从甲地开往乙地,甲车每小时 120 千米,乙车每小时 75 千米,乙车先走 12 小时,问甲车几小时可以追上乙车?

解:

$$\text{追击距离} = 75 \times 12$$

追击时间 $= 75 \times 12 \div (120 - 75) = 900 \div 45 = 20$ (小时)

所以,要经过 20 小时甲车才能追上乙车。

(2) 一只猎狗追赶一匹马,狗跳六次的时间,马只能跳 5 次,狗跳 4 次的距离和马跳 7 次的距离相同。马在前面,跑了 5.5 千米以后,狗开始在后面追赶。请问,马跑多长的距离,才被狗追上?

解:

设马跳 1 次的距离为 1 个单位距离,则狗跳 1 次的距离为 $7/4 = 1.75$ (个)单位距离。

在相同时间内(取狗跳 6 次的时间,马跳 5 次的时间),狗跳的距离为 $1.75 \times 6 = 10.5$ (个)单位距离,马跳的距离为 $1 \times 5 = 5$ (个)单位距离,所以,狗和马的速度比为 $10.5/5 = 2.1$ 。

设马被狗追上时,跑的总距离为 S km,追赶过程中,狗跑的距离为 S km,马跑的距离为 $(S - 5.5)$ km。由相同时间内距离比等于速度比的关系,可得方程:

$$S/(S - 5.5) = 2.1$$

解得:

$$S = 10.5(\text{km})$$

所以,马一共跑了 10.5km,即又跑了 5km 时,才被狗追上。

(3) 历史上曾经有一个非常著名的逻辑学悖论,叫阿基里斯追不上乌龟。

它的内容很有趣,说的是一名长跑运动员叫阿基里斯。一次,他和一只乌龟赛跑。假设运动员的速度是乌龟的 12 倍,这场比赛的结果是显而易见的,乌龟一定会输。

现在我们把乌龟的起跑线放在运动员前面 12km 处,结果会是如何呢?

有人认为,这名运动员永远也追不上乌龟! 理由是:当运动员跑了 12km 时,那只乌龟也跑了 1km,在运动员的前面。当运动员又跑了 1km 的时候,那只乌龟又跑了 $1/12$ km,还是在运动员前面。就这样一直跑下去,虽然每次距离都在拉近,但是运动员每次都必须先到达乌龟的起始地点,那么这时又相当于运动员与乌龟两个相距一段路程比赛了。这样下去,运动员是永远也追不上乌龟的。



你是怎么认为的呢？运动员真追不上乌龟吗？

解：

显而易见，运动员当然会超过乌龟。

但是从逻辑上讲，这个问题的错误在于：人们把阿基里斯追赶乌龟的路程任意分割成无穷多段，而且认为，要走完这无穷多段路程，就非要无限长的时间不可。

其实并不是这样，因为被分割的无限多段路程，加起来还是那个常数。

要确定具体的超越点也是很容易的。

可以设乌龟跑了 S km 后可以被追上，此时运动员跑了 $S+12$ km。

则 $(S+12)/S=12/1$

解得 $S=12/11(\text{km})$

这些哲学谜题在中国古代也有，例如“一尺之棰，日取其半，万世不竭”是讲一根棍棒，每天用掉一半，那么永远也用不完。但是我们要注意物质和空间是不同的，空间的无限分割更复杂。根据当代物理学原理，物质的无限分割有两方面，一方面是宏观物质不能无限分割，分割到分子或者原子的时候，物质就不能保持自身了。但是从物质起源看，到目前仍然不了解物质无限分割的界限，这是物理学上有关物质结构的问题。

3. 相离问题

两个运动物体由于背向运动而距离越来越远，这种问题就是相离问题。

其实从实质上说，相离问题就是反向的相遇问题。所以，解答相离问题的关键是求出两个运动物体的速度和。

基本公式有：

(1) 两地距离 = 速度和 $\times$ 相离时间

(2) 相离时间 = 两地距离 $\div$ 速度和

(3) 速度和 = 两地距离 $\div$ 相离时间

例子：

(1) 爸爸和妈妈分别去上班,爸爸向东走,每分钟 80m,妈妈向西走,每分钟 60m。10min 后两人相距多少米?

解：

$$(80+60) \times 10 = 1400(\text{m})$$

所以,10 分钟后两人相距 1400m。

(2) 两个人骑自行车沿着 900m 长的环形跑道行驶,他们从同一地点反向而行,经过 18min 相遇。若他们同向而行,经过 180min 甲车会追上乙车,求两人骑自行车的速度?

解：

两人的速度和 $= 900/18 = 50(\text{m}/\text{min})$,设甲车的速度为 x ,那么有：

$$[x - (50 - x)] \times 180 = 900$$

解得

$$x = 27.5\text{m}/\text{min}$$

所以甲车速度 27.5m/min,乙车的速度 $= 50 - 27.5 = 22.5\text{m}/\text{min}$ 。

(3) 兔子和乌龟赛跑,它们沿着一个圆形的跑道背对背比赛,并规定谁先绕一圈回到出发点谁就胜利。兔子先让乌龟跑了 $1/8$ 圈,然后才开始行动。但是这只兔子太骄傲了,慢吞吞地边走边啃胡萝卜,直到遇到了迎面而来的乌龟,它才慌了,因为在相遇的这一点上,兔子才跑了 $1/6$ 圈。请问:兔子为了赢得这次比赛,它的速度至少要提高到原来的几倍呢?

解：

当它们相遇的时候,兔子跑了全程的 $1/6$,而兔子跑的这段时间内,乌龟跑了 $17/24$,也就是说乌龟的速度是兔子速度的 $17/4$ 倍。兔子还有 $5/6$ 圈的路程要跑,而乌龟只有 $1/6$ 圈,所以兔子的速度就必须至少是乌龟的 5 倍,也就是它自己原来速度的 $85/4$ 倍才行。

4. 流水问题

船只顺流而下和逆流而上的问题,通常称为流水问题,又叫行船问题。流水问题实质上来讲属于行程问题,仍然可以利用速度、时



间、路程三者之间的关系进行解答。

流水问题的数量关系仍然是速度、时间与距离之间的关系。即：

- (1) 速度 $\times$ 时间=距离
- (2) 距离 $\div$ 速度=时间
- (3) 距离 $\div$ 时间=速度

但是,因为河水是流动的,就有了顺流、逆流的区别。所以,在计算流水问题时,我们要注意各种速度的含义及它们之间的关系。

船在静水中行驶,单位时间内所走的距离叫作划行速度,也叫船速;而顺水行船的速度叫顺流速度;逆水行船的速度叫作逆流速度;船不靠动力顺水而行,单位时间内走的距离叫作水流速度。各种速度的关系如下:

- (1) 船速+水流速度=顺流速度
- (2) 船速-水流速度=逆流速度
- (3) (顺流速度+逆流速度) $\div$ 2=船速
- (4) (顺流速度-逆流速度) $\div$ 2=水流速度

例子:

(1) 甲乙两地相距 300km,船速为 20km/h,水流速度为 5km/h,问来回需要多少时间?

解:

假设去的时候顺流,则速度为 $20+5=25(\text{km/h})$,所用时间为 $300\div 25=12(\text{h})$;回来的时候逆流,则速度为 $20-5=15(\text{km/h})$,所用时间为

$$300\div 15=20(\text{h})$$

$$12+20=32(\text{h})$$

所以,来回需要 32 小时。

(2) 1990 年 5 月 10 日上午 9 点 30 分。豪华的“冰山”号大型游艇正在河上逆流而上,突然,身穿丧服的夏尔太太急匆匆找到船长说:“糟了,我带的一个骨灰盒不见了!”

船长听了夏尔太太的话,不以为然,他笑着对她说:“太太,别着急,好好想想看。骨灰盒恐怕是没有人会偷的吧!”

“不，不！”夏尔太太额头冒汗，连连解释，“它里边不仅有我父亲的骨灰，而且还有3颗价值3万马克的钻石。”

第二次世界大战前，夏尔太太的父亲科伦教授，应加拿大多伦多大学的聘请前去执教。后来战争爆发了，他出于对希特勒法西斯政权的不满就留在了加拿大。光阴荏苒一晃就是几十年。开始他只身在外，后来他的大女儿夏尔太太去加拿大照料他的生活。这一年春天，科伦教授突然得了重病卧床不起。弥留之际他嘱咐女儿务必把他的骨灰带回德国，并把自己多年的积蓄换成钻石分赠给在德国的3个女儿。

夏尔太太无比懊丧地对船长说：“正因为这样，我才一直把骨灰盒带在身边，我认为骨灰盒总不会有人偷的，没想到我人还未回到故乡，3个妹妹还未见到父亲的骨灰，今天却……”

船长听罢原委，立即对游艇上所有进过夏尔太太舱房的人进行了调查，并记录了如下情况。

夏尔太太的女友弗路丝：9点左右进舱同夏尔太太聊天；9点零5分，因服务员安娜来整理舱房，两人到甲板上闲聊。

夏尔太太本人：9点10分回舱房取照相机，发现服务员安娜正在翻动她的床头柜。夏尔太太恼怒地斥责了她几句，两个人争吵了10分钟，直到9点20分；9点25分，女友弗路丝又进舱房邀请夏尔太太去甲板上观赏两岸风光，夏尔太太因心绪不佳，没有答应。

到了9点30分服务员离开后，夏尔太太发现骨灰盒不翼而飞……

如果夏尔太太陈述的事实是可信的，那么，盗贼肯定是安娜与弗路丝两个人中间的一个，但是无法肯定是谁。正在为难之际，有个船员向船长报告说：

“我隐约看见在船尾的波浪中有一只紫红色的小木盒在上下颠簸。”

船长赶到船尾一看，果然如船员所说。于是他当机立断下令返航寻找。此时是10点30分。到11点45分终于追上了那只正在江面上顺流而漂的小木盒，立即把它捞了上来。

经夏尔太太辨认，这个小木盒正是他父亲的骨灰盒，可是骨灰盒



中的 3 颗钻石却没有了。

这时,船长又拿出了笔记本,细细地分析刚刚记录下来的情况,终于断定撬开骨灰盒窃取了钻石,然后将骨灰盒抛入水中的人是谁。

破案的结果同船长得出的结论是完全一致的。

你知道这些钻石是谁偷的吗?

解:

钻石是夏尔太太的女友弗路丝偷的。

要知道是谁作的案,就必须推断出谁有时间、有条件作案。我们不妨这样来推算:设水流速度为 u ,船在静水中的速度为 v ,那么船顺流时速度为 $v+u$;逆流时的速度为 $v-u$;再设投下骨灰盒的时间为 t_1 。因为小木盒漂流的路程加上船逆流赶上小木盒所走的路程,等于船在 10 点 30 分到 11 点 45 分这段时间内顺流所走的路程,即:

$$(v-u)(10:30-t_1)+(11:45-t_1)u=(u+v)$$

$(11:45-10:30)$ 解此方程得 $t_1=9:15$,则投下骨灰盒的时间是 9:15 分,而此时安娜正在与夏尔太太争吵,她不可能作案;因此作案的是弗路丝。

5. 和差倍问题

和差倍问题分为和差问题、和倍问题、差倍问题。

(1) 和差问题

已知两个数的和与差,求出这两个数各是多少的问题,叫作和差问题。

基本数量关系是:

$$(\text{和} + \text{差}) \div 2 = \text{大数}$$

$$(\text{和} - \text{差}) \div 2 = \text{小数}$$

解答和差问题的关键是选择合适的数作为标准,设法把若干个不相等的数变为相等的数,某些复杂的题目没有直接告诉我们两个数的和与差,可以通过转化求它们的和与差,再按照和差问题的解法进行解答。

例子：

有甲乙两堆煤，共重 52 吨，已知甲比乙多 4 吨，两堆煤各重多少吨？

解：

我们先找出两个数的和与差。由题意这两堆煤共重 52 吨可知：两数的和是 52；又根据甲比乙多 4 吨可知：两数的差是 4。甲的煤多，甲是大数，乙是小数。故解法如下。

$$\text{甲：} \quad (52+4) \div 2 = 28 (\text{吨})$$

$$\text{乙：} \quad 28 - 4 = 24 (\text{吨})$$

(2) 和倍问题

已知两个数的和，又知两个数的倍数关系，求这两个数分别是多少，这类问题称为和倍问题。

要想顺利解决和倍问题，最好的方法就是根据题意，画出线段图，使数量关系一目了然，从而正确列式计算。

解决和倍问题的基本方法：将小数看成 1 份，大数是小数的 n 倍，大数就是 n 份，两个数一共是 $n+1$ 份。

基本数量关系：

$$\text{小数} = \text{和} \div (n+1)$$

$$\text{大数} = \text{小数} \times \text{倍数} \quad \text{或} \quad \text{和} - \text{小数} = \text{大数}$$

所以，解答和倍问题的关键是找出两数的和以及与其对应的倍数和。

如果遇到三个或三个以上的数的倍数关系，也可用这个公式（首先找最小的一个数，再找出另几个数是最小数的倍数即可）。

例子：

甲班和乙班共有图书 160 本，甲班的图书是乙班的 3 倍，甲乙两班各有多少本图书？

解：

从题目中可知，乙班的图书数较少，故乙是小数，占 1 份，甲占 $3+1$ 份。所以，

$$\text{乙：} \quad 160 \div (3+1) = 40 (\text{本})$$