

第1章 绪论

1.1 机械振动

振动是在日常生活和工程实际中普遍存在的一种现象,也是整个力学中最重要的研究领域之一。事实上,人类就生活在振动的世界里,地面上的车辆、空中的飞行器、海洋中的船只等都在不断地振动着。房屋建筑、桥梁水坝等在受到激励后也会发生振动。就连茫茫的宇宙中,也到处存在着各种形式的振动,如风、雨、雷、电等随时间的不断变化,从广义的角度来理解,就是特殊形式的振动(或波动),而电磁波不停地在以振动的方式发射和传播。就人类的身体来说,心脏的跳动、肺叶的摆动、血液的循环、胃的蠕动、脑电的波动、肌肉的搐动、耳膜的振动和声带的振动等,在某种意义上来说也是一种振动,就连组成人类自身的原子,也都在振动着。

所谓机械振动,是指物体(或物体系)在平衡位置(或平均位置)附近来回往复的运动。在机械振动过程中,表示物体运动特征的某些物理量(如位移、速度、加速度等)将时而增大、时而减小地反复变化。在工程实际中,机械振动是非常普遍的,钟表的摆动、车厢的晃动、桥梁与房屋的振动、飞行器与船舶的振动、机床与刀具的振动、各种动力机械的振动等,都是机械振动。

工程中有大量的振动问题需要人们研究、分析和处理,特别是近代机器结构正向大功率、高速度、高精度、轻型化、大型化和微型化等方向发展,振动问题也就越来越突出,因此掌握振动规律就显得十分重要了,也只有掌握了振动规律和特征以后,才能有效地利用振动有益的方面和限制振动有害的方面。众所周知,振动在日常生活和工程中会带来危害,例如,振动引起噪声污染,影响精密仪器设备的功能,降低机械加工的精度和光洁度,加剧构件的疲劳和磨损,缩短机器和结构物的使用寿命;机械振动还要消耗能量,降低机器效率;振动有时会使结构发生大变形而破坏,甚至造成灾难性的事故,有些桥梁就是由于振动而坍塌;机翼的颤振、机轮的摆振和航空发动机的异常振动,曾多次造成飞行事故;飞机和车船的振动恶化了乘载条件;地震、暴雨、台风等造成巨大的经济损失等。然而,振动也可以用来为人类服务,例如,利用钟摆振动原理制造钟表;工程实际中数以万计的振动机器和振动仪器可以完成许多不同的工艺过程,如给料、上料、输送、筛分、布料、烘干、冷却、脱水、选分、破碎、粉磨、光饰、落砂、成型、整形、振捣、夯土、压路、摊铺、钻挖、装载、振仓、犁土、沉桩、拔桩、清理、捆绑、采油、时效、切削、检桩、检测、勘探、测试、诊断等,这些机器和仪器包括振动给料机、振动输送机、振动整形机、振动筛选机、振动脱水机、振动干燥机、振动冷却机、振动冷冻机、振

动破碎机、振动球磨机、振动光饰机、振动压路机、振动摊铺机、振动夯土机、振动沉/拔桩机、振动造型机、振动采油机、海浪发电机、各种形式的振捣器和激振器等,它们极大地改善了劳动条件,甚至成百倍地提高了劳动生产率;人们可以根据逐年气象要素统计得出的气象波动的规律,预估某一年度的气象要素;人们可以利用潮汐的周期性振动,预报重大灾难的来临、开发能源、保护环境、排涝灌溉、安排航运、建设海港和防护海岸等;人们可以利用树木年轮中一疏一密的波动变化,进行地质考古、环境污染、森林更新、自然灾害、冰川进退、医疗卫生、农牧业产量预测等方面的研究;美妙动听的音乐(包括人声)也是源于振动而产生出来的。可见研究和掌握振动规律有着十分重要的意义,可以使人们能更好地利用振动有益的一面,而减少有害的一面。随着生产实践和科学研究的不断进展,人们对振动过程的认识将愈益深化,机械振动的利用将会更加广泛,我们的许多关于振动利用的畅想,会逐步地变为现实,并造福人类。

1.2 振动系统模型

模型就是将实际事物抽象化而得到的表达。例如,力学中的质点、刚体、梁、板、壳、质量-弹簧系统等都是模型。振动系统模型按系统的不同性质可分为离散系统与连续系统、常参数系统与变参数系统、线性系统与非线性系统、确定系统与随机系统等。

1. 离散系统与连续系统

离散系统是由集中参数元件组成的,基本的集中参数元件有三种:质量、弹簧与阻尼。

- (1) 质量(包括转动惯量)模型只具有惯性。
- (2) 弹簧模型只具有弹性,其本身质量一般可以略去不计。
- (3) 阻尼模型既不具有弹性,也不具有惯性。它是耗能元件,在相对运动中产生阻力。

离散系统的运动在数学上用常微分方程来描述。

连续系统是由弹性体元件组成的。典型的弹性体元件有杆、梁、轴、板、壳等。弹性体的惯性、弹性与阻尼是连续分布的,故亦称为分布参数系统。

连续系统的运动在数学上用偏微分方程来描述。

2. 常参数系统与变参数系统

如果一个振动系统的各个特性参数(如质量、刚度、阻尼系数等)都不随时间而变化,即它们不是时间的函数,这个系统就称为常参数系统(或不变系统)。反之,称为变参数系统(或参变系统)。

常参数系统的运动用常系数微分方程来描述,而变参数系统则需要用变系数微分方程来描述。

3. 线性系统与非线性系统

如果一个振动系统的质量不随运动参数(如坐标、速度、加速度等)而变化,而且系统的弹性力和阻尼力都可以简化为线性模型(①弹性力和变形的一次方成正比;②阻尼力与速度的一次方成正比),则称为线性系统。凡是不能简化为线性系统的振动系统都称为非线性系统。

线性系统的运动用线性微分方程来描述,而非线性系统则需要用非线性微分方程来描述。

4. 确定系统与随机系统

确定系统的系统特性可用时间的确定函数给出。随机系统的系统特性不能用时间的确定函数给出,只具有概率统计规律性。

确定系统的运动用确定微分方程来描述,而随机系统则需要用随机微分方程来描述。

一个实际系统究竟应该采用哪一种简化模型,应该根据具体情况进行具体分析。而分析简化模型的正确与否,必须经过科学实验或生产实践的检验。

1.3 激励与响应

一个实际振动系统,在外界振动激励的作用下,会呈现一定的振动响应。这种激励就是系统的输入,响应就是输出,二者由系统的振动特性联系(图 1.3-1)。

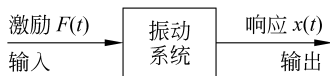


图 1.3-1

系统激励可分为两大类:

(1) 确定激励

可以用时间的确定函数来描述的激励属于确定激励。脉冲函数、阶跃函数、周期函数、简谐函数等都是典型的确定函数。

(2) 随机激励

随机激励不能用时间的确定函数来描述,但它们具有一定的概率统计规律性,因而可以用随机过程来描述。

系统响应同样可以分为两大类:

(1) 确定响应

系统的响应是时间的确定函数,这样的振动响应称为确定响应。

① 根据响应存在时间分为瞬态响应和稳态响应。瞬态振动的响应在较短的时间内会逐渐消失;稳态振动的响应可持续充分长时间。

② 根据响应是否有周期性还可分为简谐响应、周期响应、非周期响应和混沌。简谐振动的响应为时间的正弦或余弦函数;周期振动的响应为时间的周期函数;非周期振动的响应可以认为是若干脉冲响应的总和;混沌(chaos)振动的响应为时间的始终有限的非周期函

数。“混沌”是应用于过去 40 年内数学和自然界大量非线性系统中观察到的非周期、不规则、错综复杂、不能预计和随机等行为的用语。

(2) 随机响应

系统的响应为时间的随机函数,只能用概率统计的方法描述,这样的振动响应称为随机响应。无论是确定系统,还是随机系统,在随机激励的作用下,振动系统的响应一定为随机响应。如果是随机系统,即使在确定激励的作用下,系统的响应也是随机的。

1.4 振动的分类

根据研究侧重点的不同,可以从不同角度对振动进行分类。振动现象按系统相应的性质可分为确定振动与随机振动两大类。

(1) 对于一个确定系统(不论它是常参数系统,还是变参数系统),在受到确定激励作用时,响应也是确定的,这类振动称为确定振动。

(2) 对于确定系统,在受到随机激励作用时,系统的响应是随机的,这类振动称为随机振动。随机振动只能用概率统计的方法描述。

对于随机结构系统来说,无论是受到确定激励,还是随机激励作用,其响应均为随机的,这类振动称为随机结构(系统)振动。

此外,还可以按激励的控制方式分类如下:

(1) 自由振动:系统受初始激励作用后不再受外界激励作用的振动。它一般指的是弹性系统偏离平衡状态以后,不再受外界激励作用的情形下所发生的振动。

(2) 强迫振动:系统在外界控制的激励作用下的振动。它指的是弹性系统在受外界控制的激励作用下发生的振动。此时,即使振动被完全抑制,激励照样存在。

(3) 自激振动:系统在自身控制的激励作用下的振动。它指的是激励受系统振动本身控制的振动,在适当的反馈作用下,系统会自动地激起定幅振动,但一旦振动被抑制,激励也就随之消失。

(4) 参激振动:系统自身参数变化激发的振动。这种激励方式是通过周期地或随机地改变系统的特性参数来实现的。

1.5 振动问题及其解决方法

1. 振动问题

不论是确定的还是随机的振动问题,一般来说,无非是在激励、响应以及系统特性三者之中已知二者求第三者。

(1) 在激励条件与系统特性已知的情形下,求系统的响应,就是所谓振动分析。

(2) 在激励与响应均为已知的情形下,来确定系统的特性,就是所谓振动特性测定或系统识别。

(3) 在一定的激励条件下,如何来设计系统的特性,使得系统的响应满足指定的条件,这就是所谓振动综合或振动设计。

(4) 在系统特性和响应已知的情形下,求激励,即判别系统的环境特性,就是所谓振动环境预测。

实际的振动问题往往是错综复杂的,它可能同时包含分析、识别、测定、综合、设计、预测等几个方面的问题。通常,将实际问题抽象成为力学模型,实质上就是一个系统识别的问题,进而针对系统模型列式求解的过程,实质上就是振动分析的过程。而分析并不是问题的终结,分析的结果还必须用于改进设计或者排除故障(实在的或潜在的),这就是振动设计或综合的问题。

2. 解决振动问题的方法

解决振动问题的方法,不外乎是理论分析方法与实验研究方法,二者是相辅相成的。在大量实践和科学实验基础上建立起来的理论,反过来对实践起一定的指导作用。而从理论分析得到的每一个结论都必须通过实验的验证,并经受实践的检验,才能确定它是否正确。在振动问题的理论分析中大量地应用了数学工具,特别是计算机与计算技术的日益发展为解决复杂振动问题提供了有力的工具。

1.6 自由度

确定一个振动系统空间位置所需要的独立坐标的个数,称为振动系统的自由度。

例如,图 1.6-1 所示的系统,只需要用一个独立坐标就可以完全确定振动系统的位置,所以称它们为单自由度系统。图 1.6-1(a)用偏离平衡位置的坐标 x ,图 1.6-1(b)用在铅垂平面内单摆摆动的偏角 θ ,图 1.6-1(c)用绕定轴作扭摆的扭摆的摆角 φ 。

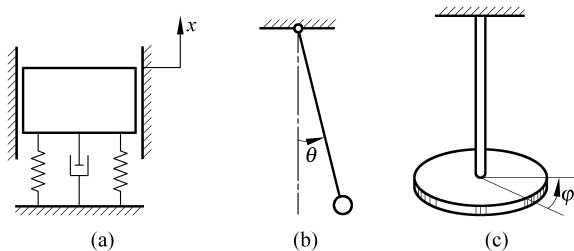


图 1.6-1

图 1.6-2 给出了两自由度的几个例子:图 1.6-2(a)假定其中的质量 A, B 只能沿直线平

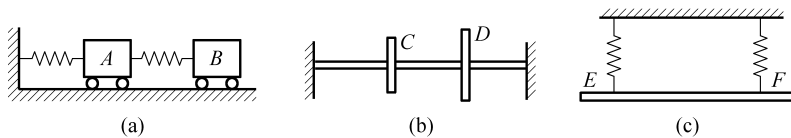


图 1.6-2

动;图 1.6-2(b)圆盘 C, D 只能绕固定轴转动;图 1.6-2(c)刚杆 EF 限于在一个铅垂平面内运动,且其重心限于沿铅垂线运动。确定这些振动系统的空间位置,各需要两个独立坐标。

弹性连续体可以看作由无数质点组成,各个质点之间有着弹性连接,只要满足连续性条件,各个质点的任何微小位移都是可能的。因此,一个弹性连续体有无限多个自由度。

1.7 单位

国际单位制(SI)包括:①7个明确定义的基本单位;②派生单位;③补充单位。基本单位在量纲上是独立的,如表 1.7-1 所示。一些基本单位按代数关系连在一起组成的单位称为派生单位。不少派生单位具有专门的名称和符号,如表 1.7-2 所示。补充单位构成第三组 SI 单位,如表 1.7-3 所示。

表 1.7-1 SI 基本单位举例

量	单位名称	单位符号	说 明
长度 (length)	米	m	用氪(krypton)-86 灯的波长来定义:1 米长度等于氪-86 原子在能级 $2p_{10}$ 和 $5d_5$ 间转变时的真空辐射波长的 1 650 763.73 倍
质量 (mass)	千克	kg	其标准原器是一个铂-铱(platinum-iridium)圆柱体。藏于法国 Sévres 地方的地下室
时间 (time)	秒	s	由原子共振频率来定义:1 秒等于铯(cesium)-133 原子在基态的两个超精细能级间跃迁时辐射波的 9 192 631 770 个周期的时间

表 1.7-2 SI 派生单位举例

量	单位名称	单位符号	用基本单位表示
面积(area)	平方米	m^2	
体积(volume)	立方米	m^3	
速度(velocity)	米每秒	m/s	
加速度(acceleration)	米每二次方秒	m/s^2	
密度(质量密度)(mass density)	千克每立方米	kg/m^3	
比容(specific volume)	立方米每千克	m^3/kg	
频率(frequency)	赫[兹]	Hz	s^{-1}
力(force)	牛[顿]	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
应力(stress)	帕[斯卡]	Pa	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
能量、功(energy、work)	焦[耳]	J	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
功率(power)	瓦[特]	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
力矩(moment of force)	牛[顿]·米	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$

表 1.7-3 SI 补充单位举例

量	单位名称	单位符号
平面角(plane angle)	弧度	rad
角速度(angular velocity)	弧度每秒	rad/s
角加速度(angular acceleration)	弧度每二次方秒	rad/s ²

第2章 单自由度系统的自由振动

任何具有质量和弹性的系统都能产生振动,若不外加激励的作用,振动系统对初始激励的响应,通常称为自由振动。自由振动是没有外界能量补充的振动。保守系统在自由振动过程中,由于总机械能守恒,动能和势能相互转换而维持等幅振动,称为无阻尼自由振动。但实际系统不可避免存在阻尼因素,由于机械能的耗散,使自由振动不能维持等幅而趋于衰减,称为有阻尼自由振动。某些实际的机械或结构系统的振动问题有时可以简化为单自由度系统的振动,本章只讨论最简单的振动系统,即单自由度系统的自由振动。以质量-弹簧系统为简化的力学模型。所讨论系统的动力学方程为常系数线性微分方程。系统的无阻尼振动频率为系统固有的物理参数,称为固有频率,振幅取决于初始扰动的大小。阻尼振动的固有频率小于无阻尼情形。临界阻尼和大阻尼条件下的系统作非往复的衰减运动。

2.1 简谐振动

最简单的单自由度振动系统就是一个弹簧连接一个质量的系统,如图 2.1-1 所示的质量-弹簧系统。在光滑的水平面上,质量为 m 的物体用不计重量的弹簧连至定点 D ,弹簧原长为 l_0 ,轴线成水平。沿弹簧轴线取坐标轴 x ,以弹簧不受力时的右端位置 O 为原点,向右为正。假定物体只限于沿坐标轴 x 进行直线运动,则物体在任一瞬时的位置可以由坐标 x 完全确定,所以系统是单自由度系统。

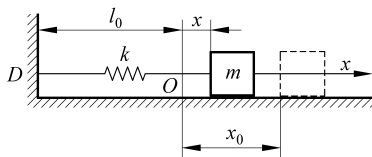


图 2.1-1

作用于物体上的力,除重力与光滑水平面的反力互相抵消外,只有弹簧力。在原点 O ,弹簧力等于零,这是物体的静平衡位置。当物体从该位置偏离 x 时,设在原点 O 的右侧, x 为正值,弹簧受拉伸,它作用于物体的力水平向左;设在原点 O 的左侧, x 为负值,弹簧受压缩,它作用于物体的力水平向右。可见弹簧力总是指向原点 O ,力图使物体回到静平衡位置,这种力称为恢复力。

假设把物体从位置 O 向右拉至距离 x_0 后静止地放开,物体将在弹簧力的作用下向左加速运动;回到位置 O 时,弹簧力变为零,但物体具有速度,由于惯性将继续向左运动;越过原点 O 后,弹簧力使物体减速,直到速度等于零,此时弹簧力又使物体向右运动。这样物体将在平衡位置附近进行往复运动。在没有阻尼的理想条件下,这种运动一经开始,就会无限期地持续进行,永不停止。

令 k 表示弹簧的刚度系数,即弹簧发生单位变形时所受的力, k 的单位取为 N/m 。在一般工程问题中,系数 k 可以视为常数,因而弹性力与弹簧的变形成正比(在弹性范围内)。

设在某一瞬时 t , 物体的位移为 x , 则弹簧作用于物体的力为 $-kx$, 以 \dot{x} 和 \ddot{x} 分别表示物体的速度与加速度。由牛顿定律,有

$$m\ddot{x} = -kx \quad (2.1-1)$$

引入参数

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1-2)$$

式中, $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 为系统的固有频率。方程(2.1-1)改写为

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2.1-3)$$

这是二阶常系数线性齐次常微分方程。容易证明方程(2.1-3)的解具有下面的一般形式:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (2.1-4)$$

式中, A_1 和 A_2 为取决于初始位置 $x_0 = x(0)$ 和初始速度 $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$ 的积分常数。为了方便起见,引入符号

$$\textcircled{1} A_1 = A \cos \phi, \quad A_2 = A \sin \phi$$

或

$$\textcircled{2} A_1 = A \sin \varphi, \quad A_2 = A \cos \varphi \quad (2.1-5)$$

从而得出

$$\textcircled{1} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \phi = \arctan \frac{A_2}{A_1}$$

或

$$\textcircled{2} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{A_1}{A_2} \quad (2.1-6)$$

将式(2.1-6)代入式(2.1-4),并用三角关系式 $\textcircled{1} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$, $\textcircled{2} \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$, 其解可以改写为

$$\textcircled{1} x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) \quad \text{或} \quad \textcircled{2} x(t) = A \sin(\omega_n t + \varphi) \quad (2.1-7)$$

式中,常数 A 和 ϕ ($\phi = \pi/2 - \varphi$) 分别称为振幅和相角。因为 A 和 ϕ 取决于 A_1 和 A_2 , 所以它们也是取决于初始条件 x_0 和 \dot{x}_0 的积分常数。方程(2.1-7)说明该系统以固有频率 ω_n 作简谐振动。凡是位移可以按时间的正弦函数(或余弦函数)所作的振动,都称为简谐振动。

利用图 2.1-2 中的矢量图进一步讨论谐波振动的性质。

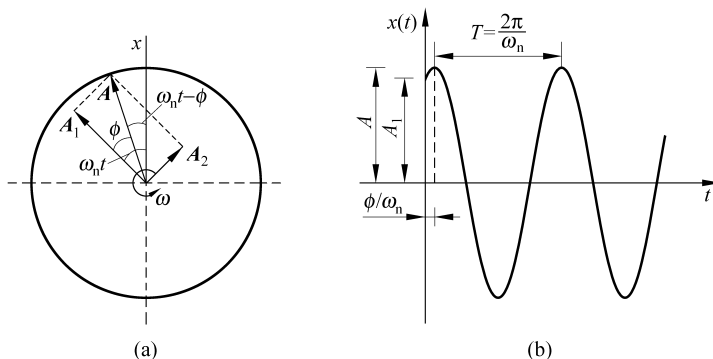


图 2.1-2

如图 2.1-2(a)所示,如果 \mathbf{A} 代表大小为 A 的矢量,而且它与垂直轴 x 的夹角为 $\omega_n t - \phi$ (或 $\omega_n t + \phi$),那么矢量 \mathbf{A} 在 x 轴上的投影就表示解 ① $x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi)$, ② $x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi)$ 。当 $\omega_n t - \phi$ (或 $\omega_n t + \phi$) 角随时间线性增大时,意味着整个图形以角速度 ω_n 按逆时针方向转动。当图形转动时,其投影成谐波变化,所以每当矢量 \mathbf{A} 扫过 2π 角,运动就会出现重复。

振动重复一次所需要的时间间隔称为振动周期 T 。在简谐振动的情况下,每经过一个周期,相位就增加 2π ,因此 $[\omega_n(t+T) + \phi] - (\omega_n t + \phi) = 2\pi$, 故有

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.1-8)$$

实际上, T 代表发生一次完整运动所需要的时间,周期通常以 s 计。在单位时间内振动重复的次数,称为振动频率 f , 有

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1-9)$$

频率的单位为次/s,称为 Hz。

物体偏离平衡状态后,在恢复力作用下进行的振动即自由振动。固有频率就是振动系统自由振动时的圆频率。

用初始条件来表示二阶常系数线性齐次常微分方程的积分常数。设在初瞬时 $t=0$, 物体有初位移 $x=x_0$ 与初速度 $\dot{x}=\dot{x}_0$, 则代入式(2.1-4)及其一阶导数,不难证明振动系统对初始条件 x_0, \dot{x}_0 的响应为

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.1-10)$$

比较方程(2.1-4)和式(2.1-10),并利用方程(2.1-6)可以得到振幅 A 和相角 ϕ 的值。

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad \text{① } \phi = \arctan \frac{\dot{x}_0}{\omega_n x_0} \quad \text{或} \quad \text{② } \phi = \arctan \frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} \quad (2.1-11)$$

由前述可知,简谐振动的振幅与初相角,随初始条件的不同而改变;而振动频率和周期,则唯一地决定于振动系统参数,与初始条件无关,它们是振动系统的固有特征。

以上分析了物体沿水平方向进行的振动,物体在静平衡位置时,弹簧无变形。现在来看由弹簧悬挂的物体(图 2.1-3)沿铅垂方向的振动。

当振动系统为静平衡时,弹簧在重力 mg 的作用下将有静伸长

$$\delta_s = \frac{mg}{k} \quad (2.1-12)$$

取铅垂坐标轴 x , 以静平衡位置为原点 O , 向下为正,在物体从静平衡位置离开 x 时,弹簧将有伸长 $\delta_s + x$ (其中 x 是代数值,向下为正,向上为负),它作用于物体的力等于 $-k(\delta_s + x)$ 。在重力与弹簧力的作用下,物体的运动微分方程为

$$m\ddot{x} = mg - k(\delta_s + x) \quad (2.1-13)$$

因为 $mg = k\delta_s$, 上式仍可简化为 $m\ddot{x} = -kx$, 即式(2.1-1)。可见前面关于物体沿光滑平面运动的讨论,同样适用于对物体沿铅垂方向的振动,只要取物体的静平衡位置为坐标原点。

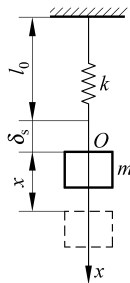


图 2.1-3

从弹簧的静变形可以方便地计算出振动系统的固有频率。因为由式(2.1-12)有 $\frac{k}{m} = \frac{g}{\delta_s}$, 代入方程(2.1-2), 得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_s}} \quad (2.1-14)$$

例 2.1-1 均匀悬臂梁长为 l , 弯曲刚度为 EJ , 重量不计, 自由端附有重为 $P = mg$ 的物体, 如图 2.1-4 所示。试写出物体的振动微分方程, 并求出频率。

解: 由材料力学知, 在物体重力的作用下, 梁的自由端将有静挠度

$$\delta_s = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

这里, 悬臂梁起着弹簧的作用, 自由端产生单位静变形所需要的力就是梁的弹簧系数

$$k = \frac{P}{\delta_s} = \frac{3EJ}{l^3}$$

梁端物体的振动微分方程为

$$m\ddot{y} = -\frac{3EJ}{l^3}y$$

即

$$\ddot{y} + \frac{3EJ}{ml^3}y = 0$$

则频率为

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$$

例 2.1-2 可绕水平轴转动的细长杆, 下端附有重锤(直杆的重量和锤的体积都可以不计), 组成单摆, 也称数学摆。杆长为 l , 锤重为 $P = mg$, 试求摆的运动微分方程及周期。

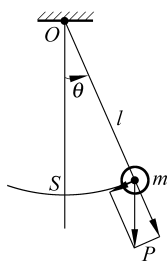


图 2.1-5

解: 如图 2.1-5 所示的摆的铅垂位置 OS 是静平衡位置。当摆从该位置偏离 θ 角时, 重力分量(切向) $P\sin\theta$ 力图使摆回到静平衡位置。这里重力起着弹簧作用。

取偏角 θ 为坐标。从平衡位置出发, 以逆时针方向为正, 锤的切向加速度为 $l\ddot{\theta}$, 故有运动微分方程为

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

假定角 θ 不大, 可令 $\sin\theta \approx \theta$, 则上式简化为

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

故

$$\omega_n^2 = \frac{g}{l}$$

则振动周期为

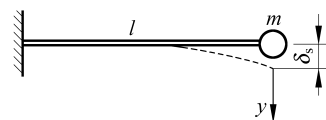


图 2.1-4

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

例 2.1-3 可绕水平轴摆动的物体,称为复摆(也称为物理摆)。设物体的质量为 m ,对轴 O 的转动惯量为 I ,重心 G 至轴 O 的距离为 s ,如图 2.1-6 所示,求复摆微幅振动的微分方程及振动周期。

解: 取偏角 θ 为坐标,以逆时针方向为正,复摆绕定轴转动的微分方程可列为

$$I\ddot{\theta} = -mgs \sin \theta$$

假定角 θ 不大,可令 $\sin \theta \approx \theta$,则上式简化为

$$\ddot{\theta} + \frac{mgs}{I}\theta = 0$$

这就是振动微分方程,故

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgs}{I}}$$

则振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgs}}$$

计算形状复杂的机器部件的转动惯量相当困难,上式提供了用试验确定 I 的一个方法:设物体的重量 mg 与距离 s 均已知,并由实测定出振动周期 T ,就容易算出转动惯量 I 。

例 2.1-4 铅垂圆轴,上端固定,下端装有水平圆盘,组成扭摆,如图 2.1-7 所示。设有外力矩使圆盘及圆轴下端绕铅垂轴转过某一角度 θ 后突然释放,则圆盘将在水平面内进行扭转振动。已知圆轴的扭转弹簧系数(使轴的下端产生单位转角所需的扭矩)为 $k(\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad})$,质量不计,圆盘对转轴的转动惯量为 I ,求扭摆的振动微分方程及周期与频率。

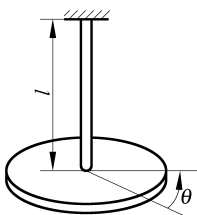


图 2.1-7

解: 设 θ 为圆盘相对于静平衡位置的角坐标。作用在圆盘上的恢复扭矩为 $M = -k\theta$,式中负号表示恢复扭矩的符号恒与扭角的符号相反,根据刚体绕定轴转动微分方程,有

$$I\ddot{\theta} = -k\theta$$

或

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I}\theta = 0$$

故

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

可见扭摆的自由振动也是简谐振动,其周期与频率分别为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}$$

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{I}}$$

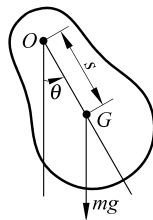


图 2.1-6

2.2 能量法

对于能量无耗散的振动系统,在自由振动时系统的机械能守恒。令 T 与 U 分别代表振动系统的动能与势能,有

$$T + U = \text{常数} \quad (2.2-1)$$

这就是应用于振动系统的能量守恒原理。对时间求导,得

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \quad (2.2-2)$$

以具体振动系统的能量表达式代入上式,化简后即可得出描述振动系统自由振动的微分方程。

如果取平衡位置为势能零点,根据自由振动的特点,系统在平衡位置时,系统的势能为零,其动能的极大值 T_{\max} 就是全部机械能,而在振动系统的极端位置时,系统的动能为零,其势能的极大值 U_{\max} 等于其全部的机械能。由机械能守恒定律,有

$$T_{\max} = U_{\max} \quad (2.2-3)$$

只要振动系统的自由振动是简谐振动,则由方程(2.2-3)可以直接得出系统的固有频率。不需要列出振动微分方程。

例 2.2-1 有一个重量为 W , 半径为 r 的实心圆柱体, 在半径为 R 的圆柱形面上无滑动地滚动, 如图 2.2-1 所示。假设该滚动的圆柱体进行简谐运动, 试求它绕平衡位置作微小摆动时的固有频率 ω_n 。

解: 圆柱体在摆动时有两种运动: 移动和滚动。设 θ 坐标如图 2.2-1 所示。

摆动时圆柱体中心 C 点的速度及圆柱体的角速度分别为

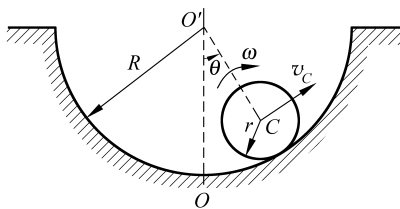


图 2.2-1

$$v_C = (R - r)\dot{\theta}, \quad \omega = \left(\frac{R - r}{r}\right)\dot{\theta}$$

系统的动能 T 为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{W}{g}r^2\right)\left(\frac{R - r}{r}\right)^2\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{3}{4}\frac{W}{g}(R - r)^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

圆柱体的势能为相对于最低位置 O 的重力势能。若选圆柱体中心 C 在运动过程中的最低点为零势能点, 则系统的势能为

$$U = W(R - r)(1 - \cos\theta) = 2W(R - r)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

当圆柱体作微摆动时, $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{\theta}{2}$, 因此系统的势能为

$$U = \frac{1}{2}W(R - r)\theta^2$$

由式(2.2-2),有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(T+U) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{3}{4}\frac{W}{g}(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}W(R-r)\theta^2\right] \\ &= \frac{3}{2}\frac{W}{g}(R-r)^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + W(R-r)\theta\dot{\theta} = 0\end{aligned}$$

上式可以简化为

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\theta = 0$$

故系统固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

系统的固有频率也可以用 $T_{\max} = U_{\max}$ 来计算,设系统作自由振动时的变化规律为

$$\theta = A\sin(\omega_n t + \varphi)$$

则系统的最大动能为

$$T_{\max} = \frac{3}{4}\frac{W}{g}(R-r)^2\omega_n^2 A^2$$

系统的最大势能为

$$U_{\max} = \frac{1}{2}W(R-r)A^2$$

则得固有频率 ω_n 同前。

例 2.2-2 细杆 OA 可绕水平轴 O 转动,如图 2.2-2 所示,在静平衡时成水平。杆端锤的质量为 m ,杆与弹簧的质量均可略去不计,求自由振动的微分方程及周期。

解: 在杆有微小偏角 φ 时,弹簧的伸长以及锤的位移与速度可以近似地表示为 $a\varphi, l\varphi$ 与 $l\dot{\varphi}$ 。故振动系统的动能与势能可以表示为

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2, \quad U = \frac{1}{2}k(a\varphi)^2$$

(平衡位置为零势能点, $U = \frac{1}{2}k(\delta_1^2 - \delta_2^2) - mgl\varphi, \delta_1 = a\varphi + \delta_s, \delta_2 = \delta_s$, 平衡时 $k\delta_s a = mgl$ 。)

代入方程(2.2-2)有

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}k(a\varphi)^2\right] = 0$$

由此可得

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\varphi = 0$$

固有频率为

$$\omega_n = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

周期为

$$T = \frac{2\pi l}{a}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

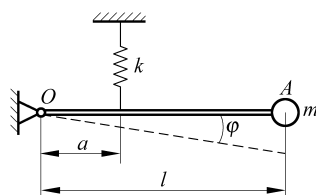


图 2.2-2

2.3 瑞利法

在前面的讨论中,都假设弹簧总的质量是可以忽略不计的。这样的简化,在许多实际问题中可能已经足够准确了。但在有一些工程问题中弹簧本身的质量可能占系统总质量的一定比例,因此不能被忽略。如果忽略这部分弹簧的质量,将会导致计算出来的固有频率偏高。如何考虑弹簧本身的质量,以确定其对振动频率的影响,瑞利(Rayleigh)提出了一种近似方法,它运用能量原理,把一个分布质量系统简化为一个单自由度系统,从而把弹簧分布质量对系统频率的影响考虑进去,得到相对准确的固有频率值。

现以图 2.3-1 所示的质量-弹簧系统为例说明瑞利法的应用。在应用瑞利法时,必须先假设一个系统的振动形式,设弹簧在振动过程中变形是均匀的,即弹簧在连接质量块的一端位移为 x ,弹簧(处于平衡位置时)轴向长度为 l ,则距固定端 u 处的位移为 $\frac{u}{l}x$ 。因此,当质量

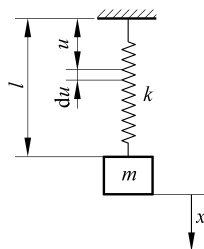


图 2.3-1

块 m 在某一瞬时的速度为 \dot{x} 时,弹簧在 u 处的微段 du 的相应速度为 $\frac{u}{l}\dot{x}$ 。

设 ρ 为弹簧单位长度的质量,则弹簧微段 du 的动能为

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{u\dot{x}}{l}\right)^2 du$$

整个弹簧的动能为

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_0^l\left(\frac{u\dot{x}}{l}\right)^2 du = \frac{1}{2}\frac{\rho l}{3}\dot{x}^2 \quad (2.3-1)$$

而整个系统的总动能为质量块 m 的动能与弹簧质量的动能之和。在质量块经过静平衡位置时,系统最大动能为

$$T_{\max} = \frac{1}{2}m\dot{x}_{\max}^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho l}{3}\dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\rho l}{3}\right)\dot{x}_{\max}^2 \quad (2.3-2)$$

系统的势能仍将和忽略弹簧质量时一样为

$$U_{\max} = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \quad (2.3-3)$$

由 $T_{\max}=U_{\max}$ 可得

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{\rho l}{3}\right)\dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \quad (2.3-4)$$

对于简谐振动, $x=A\sin(\omega_n t + \varphi)$, $x_{\max}=A$, $\dot{x}_{\max}=\omega_n A$, 代入得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \rho l/3}} \quad (2.3-5)$$

式中, ρl 为弹簧的总质量。可见弹簧质量对于频率的影响相当于在质量 m 上再加 $1/3$ 弹簧质量的等值质量,这样就可以把弹簧质量对系统的固有频率的影响考虑进去。

应用瑞利法求解系统自由振动的固有频率时,所假定的振动形式越接近实际的振动形式,所得近似值就越接近准确解。实践证明,以静变形作为假定的振动形式,所得近似解与

准确解比较,一般来说误差是很小的。

例 2.3-1 设一均质等截面简支梁,如图 2.3-2 所示,在中间有一集中质量 m ,如把梁本身质量考虑在内,试计算此系统的固有频率和梁的等效质量。

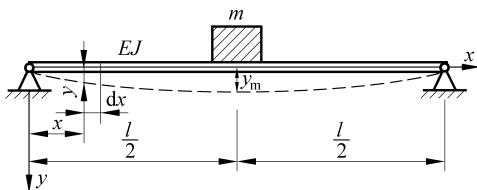


图 2.3-2

解: 假定梁在自由振动时动挠度曲线和简支梁中间有集中静载荷 mg 作用下的静挠度曲线一样。由材料力学可知,位于距支座距离 x 处的任一单元的位移表达式为

$$y = \frac{mg}{48EJ}(3l^2x - 4x^3) = y_m \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3}$$

式中, y_m 为 midpoint 挠度。根据材料力学有

$$y_m = \frac{mgl^3}{48EJ}$$

设 ρ 为梁单位长度的质量,整个梁的动能为

$$T = 2 \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \rho \left(\dot{y}_m \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{35} \rho l \right) \dot{y}_m^2$$

可见梁的等效质量为

$$m_{\text{eq}} = \frac{17}{35} \rho l$$

因为是简谐振动,设

$$y_m = A \sin(\omega_n t + \varphi)$$

则

$$\dot{y}_m = A \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_m \frac{3l^2x - 4x^3}{l^3}$$

系统的最大总动能为

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{17}{35} \rho l \right) \dot{y}_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{17}{35} \rho l \right) A^2 \omega_n^2$$

而梁的最大弹性势能仍为

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{2} k y_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

由 $T_{\text{max}} = U_{\text{max}}$ 得

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{17}{35} \rho l \right) A^2 \omega_n^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + (17/35) \rho l}}$$

式中, k 为梁的弹簧刚度, 对于简支梁带有中间集中质量时

$$k = \frac{48EJ}{l^3}$$

下面证明一个等截面悬臂梁(图 2.3-3)在自由端的等效质量为 $\frac{33}{140}\rho l$ 。假定梁自由振动时的振动形式和悬臂梁在自由端加一集中静载荷时的静挠度曲线一样。

由材料力学知, 在梁自由端静载荷 P 的作用下, 悬臂梁自由端的挠度为 $\delta = \frac{Pl^3}{3EJ}$, 截面 x 处的挠度为

$$\left(\frac{3lx^2 - x^3}{2l^3}\right)\delta。$$

假定在自由振动中, 梁各点的振幅仍近似地按比例, 即设

$$y(x) = \left(\frac{3lx^2 - x^3}{2l^3}\right)y_0$$

式中, y_0 为梁自由端的振幅。设质量 m 的自由振动可表示为 $y_0 \sin \omega_n t$, 而梁的振动可表示为

$$y(x, t) = y(x) \sin \omega_n t$$

全梁动能的最大值为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega_n^2 \int_0^l y^2(x) dx = \frac{1}{2} \rho \omega_n^2 \left(\frac{y_0}{2l^3}\right)^2 \int_0^l (3lx^2 - x^3)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{33}{140} \rho l \omega_n^2 y_0^2$$

故整个系统动能的最大值为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{33}{140} \rho l\right) \omega_n^2 y_0^2$$

而系统势能的最大值为

$$U_{\max} = \frac{1}{2} k y_0^2 = \frac{1}{2} \frac{3EJ}{l^3} y_0^2$$

由 $T_{\max} = U_{\max}$ 可得

$$\omega_n^2 = \frac{3EJ/l^3}{m + (33/140)\rho l}$$

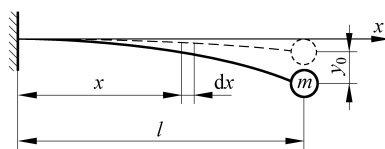


图 2.3-3

2.4 等效刚度系数

弹簧刚度系数就是使弹簧产生单位变形所需要的力或力矩。任何弹性体都可以看成弹簧。根据定义, 设指定方向的位移为 x , 在该方向所要施加的力为 F , 则等效刚度系数为

$$k = \frac{F}{x} \quad (2.4-1)$$

同一弹性元件, 根据所要研究的振动方向不同, 弹簧刚度系数亦不同。以一端固定的等直物体为例(图 2.4-1)说明等效刚度系数的确定。

设此等直物体长为 l , 截面积为 A , 截面惯性矩为 J , 截面极惯性矩为 J_p , 材料弹性模量

为 E , 剪切弹性模量为 G 。设 Oxy 坐标如图 2.4-1 所示。试确定自由端 B 处在 x 方向、 y 方向和绕 x 轴转动方向的刚度系数。

确定沿 x 方向的刚度时, 在 B 处沿 x 方向施加一垂直力 F 。根据材料力学知, B 点在 x 方向的位移为

$$x_B = \frac{Fl}{EA}$$

B 点在 x 方向的刚度系数为

$$k_x = \frac{F}{x_B} = \frac{EA}{l}$$

常称这种刚度为杆的拉压刚度。

确定沿 y 方向的刚度时, 在 B 点沿 y 方向施加一横向力 P 。这时等直物体作弯曲变形, 根据材料力学知, B 点沿 y 方向的位移为

$$y_B = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

B 点沿 y 方向的刚度系数为

$$k_y = \frac{P}{y_B} = \frac{3EJ}{l^3}$$

常称这种刚度为梁的弯曲刚度。

确定绕 x 轴转动方向的刚度时, 需要在 B 端绕 x 轴转动方向施加一扭矩 M 。这时等直物体作转扭运动, 产生扭角 θ 。根据材料力学知, B 点沿 x 轴的扭角为

$$\theta_B = \frac{Ml}{GJ_\rho}$$

B 点绕 x 轴转动方向的刚度系数为

$$k_\theta = \frac{M}{\theta_B} = \frac{GJ_\rho}{l}$$

常称这种刚度为轴的扭转刚度。

同样, 对于螺旋弹簧, 在承受轴向拉伸或压缩、扭转与弯曲变形时, 刚度系数分别为

$$k = \frac{Gd^4}{8nD^3}, \quad k = \frac{Ed^4}{64nD}, \quad k = \frac{Ed^4}{32nD} \left(\frac{1}{1 + E/2G} \right)$$

式中, E 为弹性模量; G 为剪切模量; d, D 分别为簧丝、簧圈直径; n 为弹簧有效圈数。

工程中用到的弹簧类型很多, 计算时需要用到其刚度系数, 一般可以根据等效刚度系数的推证方法加以推导。

在振动系统中常常不是单独使用一个弹性元件, 而是串联或并联几个弹性元件加以使用。

这时需要把组合的弹簧系统折算成一个“等效”的弹簧, 其等效弹簧的刚度应该和原来的组合弹簧系统的刚度相等, 即等效刚度。

下面以两个串联和并联的弹簧为例, 说明组合弹簧系统的等效刚度的计算方法。

图 2.4-2(a) 所示是两个串联弹簧, 刚度系数分别为 k_1 和 k_2 , 求 B 端垂直方向的刚度时, 在 B 端加一垂直力, 每个弹簧都被拉伸, 伸长分别为 $\frac{F}{k_1}$ 和 $\frac{F}{k_2}$ 。 B 点的位移为两个弹簧的总伸长, 即

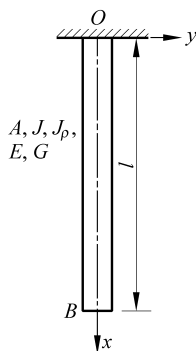


图 2.4-1

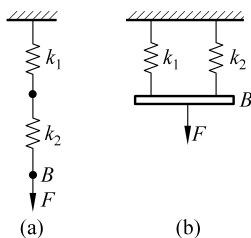


图 2.4-2

$$x_B = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

由此, B 点的等效刚度系数为

$$k = \frac{F}{x_B} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

也可以写成

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

从上式可以看出, 两个串联弹簧的等效刚度比原来两个弹簧的刚度都要小, 也就是说, 串联弹簧使系统中的弹簧刚度降低。

如果有 n 个弹簧串联, 刚度系数分别为 k_1, k_2, \dots, k_n , 则等效刚度系数 k 应满足关系式

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad (2.4-2)$$

图 2.4-2(b) 所示是两个并联弹簧, 连接两弹簧的刚性杆在弹簧变形过程中保持水平。求 B 端垂直方向的刚度时, 在 B 端加垂直力 F 。这时两个弹簧均伸长 x_B 。但两个弹簧所受的力不相等, 分别为 $k_1 x_B$ 和 $k_2 x_B$ 。根据静力平衡条件得

$$F = k_1 x_B + k_2 x_B$$

所以 B 点的等效刚度为

$$k = \frac{F}{x_B} = k_1 + k_2$$

可见并联弹簧系统的刚度是原来弹簧刚度的总和, 比原来各弹簧的刚度都要大。

如果有 n 个弹簧并联, 其弹簧刚度系数分别为 k_1, k_2, \dots, k_n , 则等效刚度系数为

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_n = \sum_{i=1}^n k_i \quad (2.4-3)$$

弹簧的并联与串联, 不能按表面形式来划分, 应从力的分析来判断。例如图 2.4-3(a) 与 (b) 中的弹簧为串联, 而图 2.4-3(c) 与 (d) 中的弹簧则属于并联。

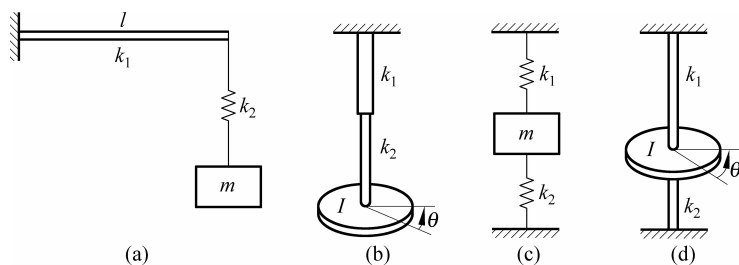


图 2.4-3

2.5 有阻尼系统的自由振动

在前面所述的自由振动中, 忽略了运动的阻力, 假定物体由于任何外来的原因离开平衡位置后, 只受到恢复力的作用, 物体将在平衡位置附近按固有频率进行简谐振动, 振动过程

中机械能守恒,系统保持持久的等幅运动。这样的结论显然与实际不符,实际系统振动时不可避免地存在着阻力,因而在一定时间内振动将逐渐衰减而停止。

阻力可能来自多方面。例如,两物体之间在润滑表面或干燥表面上相对滑动时的阻力;物体在磁场或流体中运动所遇到的阻力;以及由于材料的黏弹性产生的内部阻力等。在振动中,这些阻力统称为阻尼。

不同的阻尼具有不同的性质。两个干燥的平滑接触面之间的摩擦力 F ,与两个面之间的垂直正压力 N 成正比,即

$$F = \mu N \quad (2.5-1)$$

式中, μ 为摩擦系数,如果两个接触面是粗糙的,则摩擦系数 μ 与速度有关,速度越快 μ 越小。

若两接触面之间有润滑剂,摩擦力则取决于润滑剂的“黏性”和运动的速度。两个相对滑动面之间有一层连续的油膜存在时,阻力与润滑剂的黏性和速度成正比,与速度的方向相反,即

$$F = -c v \quad (2.5-2)$$

式中, c 为黏性阻尼系数,它取决于运动物体的形状、尺寸及润滑剂介质的黏性。黏性阻尼由于与速度成正比,又称线性阻尼。

结构材料本身的内摩擦引起的阻力,称为结构阻尼。在完全弹性材料内,应变与应力的相位相同,所以在反复受力过程中没有能量损失。而在黏弹性材料内,应变滞后于应力,有相位差,所以在反复受力过程中形成滞后回线,因此要耗散能量,而成为振动的阻尼。

阻尼的存在将消耗振动系统的能量,消耗的能量转变成热能和声能(噪声)传出去。在自由振动中,能量的消耗导致系统振幅的逐渐减小而最终使振动停止。

下面讨论黏性阻尼的衰减振动。图 2.5-1 表示有黏性阻尼的振动系统,黏性阻尼系数以 c 表示,单位为 $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$ 。取铅垂向下为坐标轴 x ,以物体的静平衡位置 O 为原点,向下为正。由牛顿运动定律有

$$m \ddot{x} = -c \dot{x} - kx \quad (2.5-3a)$$

或

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (2.5-3b)$$

这就是有黏性阻尼振动系统的自由振动微分方程。为了求解,设

$$x = e^{st} \quad (2.5-4)$$

式中, s 为待定常数,代入式(2.5-3),可得

$$\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)e^{st} = 0 \quad (2.5-5)$$

可见式(2.5-5)满足式(2.5-3),亦即式(2.5-5)是式(2.5-3)的解,只要有

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (2.5-6)$$

这个代数方程称为方程(2.5-3)的特征方程,有两个根 s_1 和 s_2 ,为

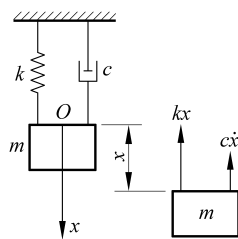


图 2.5-1

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.5-7)$$

于是微分方程(2.5-3)的通解为

$$x = B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t} \quad (2.5-8)$$

式中, B_1 和 B_2 为任意常数, 决定于运动的初始条件。

解式(2.5-8)的性质取决于根 s_1 与 s_2 的性质。由式(2.5-7)可见, 随着阻尼系数的大小不同, 根号内的项可以大于、等于或小于零, 因而根 s_1 与 s_2 可以是实根、复根或虚根。使式(2.5-7)根号内的项等于零, 亦即 s_1 与 s_2 为等值时的阻尼系数值, 称为临界阻尼系数, 记为 c_c , 即

$$c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} \quad (2.5-9)$$

式中, ω_n 为无阻尼时振动系统的固有频率, 引进阻尼比 ζ (或称相对阻尼系数)

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (2.5-10)$$

式中, ζ 为一无量纲的量。

引进 ζ 以后, 微分方程(2.5-3)和特征方程(2.5-6)可以改写为

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2.5-11)$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (2.5-12)$$

则特征方程的根为

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \quad (2.5-13)$$

下面分别就 $\zeta < 1$, $\zeta = 1$ 及 $\zeta > 1$ 的三种情况讨论解式(2.5-8)的性质。

(1) 小阻尼情况(即 $\zeta < 1, c < c_c$)

此时特征方程的根 $s_{1,2}$ 为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \quad (2.5-14)$$

式中, $i = \sqrt{-1}$ 。则解式(2.5-8)为

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} (B_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + B_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t}) \quad (2.5-15)$$

令

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \quad (2.5-16)$$

式中, ω_d 通常称为有阻尼自由振动的圆频率。

设在 $t=0$ 时, 有 $x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0$, 则代入解式(2.5-15)及其导数中, 有

$$\dot{x} = -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} (B_1 e^{i\omega_d t} + B_2 e^{-i\omega_d t}) + e^{-\zeta\omega_n t} [i\omega_d (B_1 e^{i\omega_d t} - B_2 e^{-i\omega_d t})]$$

在 $t=0$ 时有

$$x_0 = B_1 + B_2, \quad \dot{x}_0 = -\zeta\omega_n (B_1 + B_2) + i\omega_d (B_1 - B_2)$$

解得

$$B_1 = \frac{\dot{x}_0 + (\zeta\omega_n + i\omega_d)x_0}{i2\omega_d}, \quad B_2 = \frac{-\dot{x}_0 + (-\zeta\omega_n + i\omega_d)x_0}{i2\omega_d}$$

将 B_1 与 B_2 代入式(2.5-15)即得系统对于初始条件 x_0 与 \dot{x}_0 的响应。

根据欧拉公式 $e^{\pm i\omega_d t} = \cos \omega_d t \pm i \sin \omega_d t$, 则式(2.5-15)可以简化为