

第五篇

习题解答

物理学的研究对象小到微观的基本粒子,大到宏观的宇宙天体,时间尺度和空间尺度都有很大的跨度.大学物理学是高等院校一门重要的基础理论课.要学好物理学,一方面,必须深刻理解物理学相关的知识,另一方面还要具有科学的学习方法和一定的思维能力.思维的过程包括分析、归纳、演绎、发散等方式,习题中既有现实的物理问题,又有从现实物理问题中抽象出来的物理模型,解题的过程是训练思维能力的最有效的方式之一.因此,除了要透彻理解物理学的概念、规律和原理以外,还要在学习过程中做一定量的习题,这是学习物理学不能忽视的一个必备环节.

虽然绝大多数人对于解题的重要性有正确的认识,但仍有许多人在解题过程中会遇到各式各样的困难,甚至感到无所适从.鉴于这种情况,我们在本篇为本书上册各章的习题提供一种参考解法.建议读者着重于参考解题的思路而非照抄,更要在尝试无果之后才能翻阅参考答案.为了帮助读者复习,我们在各章习题解答之前,先对各章的要点进行了归纳整理.

第 1 章 质点运动学

1.1 要点归纳

1. 位置矢量、运动方程和位移

位置矢量是描述质点位置最简洁的方式. 在空间选定一个参考点, 从参考点指向质点当前位置的矢量就是位置矢量, 简称径矢, 记作 \mathbf{r} . 径矢随时间的变化关系式 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 叫做运动方程. 不同时刻径矢的增量叫做位移, 记作 $\Delta\mathbf{r}$.

(1) 直角坐标系中径矢和位移分别表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \text{其大小为 } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$$

(2) 极坐标系径矢和位移分别表示为

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta r\mathbf{e}_r + r\Delta\theta\mathbf{e}_\theta$$

2. 速度、加速度

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

在不同坐标系中, 速度和加速度的表达式如下:

(1) 直角坐标系

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}$$

(2) 极坐标系

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] \mathbf{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \mathbf{e}_\theta$$

(3) 自然坐标系

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n$$

3. 运动学的两类问题

由运动方程通过求时间的导数可以得到速度和加速度; 由速度或加速度结合初始条件可以通过积分的方法得到运动方程, 从运动方程的参数表达式中消去时间 t 可得轨道方程.

定积分法

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{a}(\tau) \, d\tau \\ \boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{v}(\tau) \, d\tau \end{aligned}$$

不定积分法

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= \int \boldsymbol{a}(\tau) \, d\tau + \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{r}(t) &= \int \boldsymbol{v}(\tau) \, d\tau + \boldsymbol{r}_0 \end{aligned}$$

式中 \boldsymbol{v}_0 和 \boldsymbol{r}_0 为积分常量, 由初始条件定出.

1.2 习题解答

1-1 已知一质点沿 x 轴作直线运动, t 时刻的坐标为: $x = 4.5t^2 - 2t^3$. 求:

- (1) 第 2 s 内的平均速度;
- (2) 第 2 s 末的即时速度;
- (3) 第 2 s 内的平均速率.

解 (1) 第 2 s 内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \boldsymbol{i} = \frac{x(2) - x(1)}{2 - 1} \boldsymbol{i} = -0.5 \boldsymbol{i} \, \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 瞬时速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt} \boldsymbol{i} = (9t - 6t^2) \boldsymbol{i}$$

当 $t = 2$ s 时, $\boldsymbol{v} = -6 \boldsymbol{i} \, \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

(3) 令 $v = 9t - 6t^2 = 0$, 解得 $t = 1.5$ s, 此时速度的方向发生改变. 第 2 秒内的路程为

$$\Delta s = |x(1.5) - x(1)| + |x(2) - x(1.5)| = 2.25 \, \text{m}$$

于是

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2.25 \, \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

1-2 一质点沿一直线运动, 其加速度为 $a = -2x$, 式中 x 以 m 为单位, a 以 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ 为单位. 试求质点的速率 v 与坐标 x 的关系式. 设当 $x = 0$ 时, $v_0 = 4 \, \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

解 速率 v 对 x 的导数可通过下列变换得到:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{a}{v} = \frac{-2x}{v}$$

整理得

$$v \, dv = -2x \, dx$$

上式两边积分,有

$$\int_{v_0}^v v \, dv = -2 \int_0^x x \, dx$$

因此, v 与 x 的关系式为

$$v^2 = v_0^2 - 2x^2 = 16 - 2x^2, \quad |x| \leq 2\sqrt{2} \text{ m}$$

1-3 质点从 $t = 0$ 时刻开始,按 $x = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$ 的规律沿 x 轴运动. 在哪个时间间隔它沿着 x 轴正向运动? 哪个时间间隔沿着 x 轴负方向运动? 哪个时间间隔它加速? 哪个时间间隔减速? 分别画出 x, v, a 以时间为自变量的函数图.

解 速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9$$

解不等式组

$$\begin{cases} t > 0 \\ 3t^2 - 6t - 9 < 0 \end{cases}$$

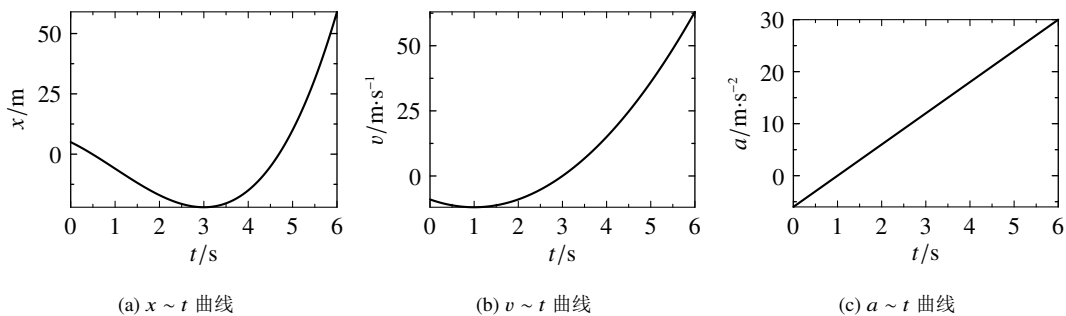
可得 $0 < t < 3$ s 时质点沿 x 轴负方向运动. 同理可得当 $t > 3$ s 时质点沿 x 轴正向运动.

加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 6$$

由 $t > 0$ 及 $a < 0$ 可以解得, 当 $0 < t < 1$ s 时质点加速度为负值, 为减速运动. 同理, $t > 1$ s 时, 质点作加速运动.

x, v, a 随时间的变化曲线见解图 1-3.



解图 1-3

1-4 一质点平面运动的加速度为 $a_x = -A \cos t$, $a_y = -B \sin t$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, 初始条件($t = 0$ 时)为 $v_{0x} = 0$, $v_{0y} = B$, $x_0 = A$, $y_0 = 0$. 求质点的运动轨迹.

解 速度分量为

$$v_x = \int_0^t a_x \, dt + v_{0x} = - \int_0^t A \cos t \, dt = -A \sin t$$

$$v_y = \int_0^t a_y \, dt + v_{0y} = - \int_0^t B \sin t \, dt + B = B \cos t$$

坐标分量为

$$x = \int_0^t v_x dt + x_0 = - \int_0^t A \sin t dt + A = A \cos t$$

$$y = \int_0^t v_y dt + y_0 = \int_0^t B \cos t dt = B \sin t$$

运动方程的矢量表达式为

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} = A \cos t \mathbf{i} + B \sin t \mathbf{j}.$$

从运动方程的分量表达式中消去 t , 得

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

因此, 质点的运动轨迹为椭圆.

1-5 一质点在平面上运动, 其位矢为 $\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}$, 其中 a, b, ω 为常量. 求:

- (1) 该质点的速度和加速度;
- (2) 该质点的轨迹.

解 (1) 质点的速度和加速度分别为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + b\omega \cos \omega t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - b\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

(2) 由题意,

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t$$

从中消去 t , 可得质点的轨迹为位于该平面上的半长轴为 a , 半短轴为 b 的椭圆, 椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1-6 一质点从静止开始沿着圆周作匀角加速运动, 角加速度 $\alpha = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$. 求质点运动一周后回到起点时速度与加速度之间的夹角.

解 设圆周半径为 R . 质点任意时刻 t 的角速率为 $\omega = \alpha t$, 转过的角度为 $\theta = \alpha t^2/2$. 在极坐标系中, 质点的速度和加速度分别为

$$\mathbf{v} = \omega R \mathbf{e}_\theta = \alpha t R \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = -\omega^2 R \mathbf{e}_r + \alpha R \mathbf{e}_\theta = -\alpha^2 t^2 R \mathbf{e}_r + \alpha R \mathbf{e}_\theta$$

速度和加速度的大小分别为

$$v = \alpha t R$$

$$a = R \alpha \sqrt{1 + \alpha^2 t^4}$$

任意时刻质点速度与加速度的夹角 ϕ 的余弦为

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{va} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 t^4}}$$

当质点运动一周回到起点时, $\theta = \alpha t^2/2 = 2\pi$, 所用时间 $t = \sqrt{4\pi}$, 代入上式得

$$\phi = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + 16\pi^2}} = 85.45^\circ$$

1-7 一质点沿半径为 0.10 m 的圆周运动, 其角位置 θ (以弧度表示) 可用 $\theta = 2 + 4t^3$ 表示, 式中 t 以秒计. 问:

- (1) 在 $t = 2$ s 时, 它的法向加速度和切向加速度是多少?
- (2) 当切向加速度的大小恰是总加速度大小的一半时, θ 的值是多少?
- (3) 在哪一时刻, 切向加速度和法向加速度恰有相等的值?

解 (1) 质点切向加速度和法向加速度分别为

$$a_t = R \frac{d^2\theta}{dt^2} = 24Rt = 4.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 R = (12t^2)^2 R = 144Rt^4 = 230.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(2) 由题意, $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 2a_t$, 因此, $a_n = \sqrt{3}a_t$, 即

$$144Rt^4 = 24\sqrt{3}Rt$$

由此可得 $t = 12^{-1/6} \approx 0.66$ s. 相应的,

$$\theta = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 3.15 \text{ rad}$$

(3) 由 $a_n = a_t$, 即 $144Rt^4 = 24Rt$, 解得 $t = 6^{-1/3} \approx 0.55$ s.

1-8 多个质点从某一点以同样大小的速度, 沿着同一铅直面内不同的方向, 同时抛出.

- (1) 试证明在任意时刻这些质点散落在同一圆周上;
- (2) 试证明各质点彼此的相对速度的方向始终不变.

解 (1) 设初始速率为 v_0 , 以任意抛射角 θ 抛出的质点, 在 t 时刻的坐标为

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \theta) t \\ y = (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

从中消去变量 θ , 可得

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2} g t^2 \right)^2 = v_0^2 t^2$$

可以看出, 在 t 时刻, 上式表示以 $\left(0, -\frac{1}{2} g t^2 \right)$ 为圆心, 以 $v_0 t$ 为半径的圆.

(2) 质点初始时刻的速度为

$$\boldsymbol{v}_0 = v_0 \cos \theta \boldsymbol{i} + v_0 \sin \theta \boldsymbol{j}$$

任意时刻 t , 质点的速度为

$$\boldsymbol{v} = (v_0 \cos \theta) t \boldsymbol{i} + [(v_0 \sin \theta) t - g t] \boldsymbol{j}$$

研究任意两个质点, 其抛射角分别为 θ_1, θ_2 , 初始时刻的相对速度为

$$\boldsymbol{v}_{01} - \boldsymbol{v}_{02} = v_0 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \boldsymbol{i} + v_0 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \boldsymbol{j}$$

t 时刻的相对速度为

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = v_0 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) t \boldsymbol{i} + v_0 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) t \boldsymbol{j}$$

所以任意时刻这两个质点的相对速度与水平面的夹角为

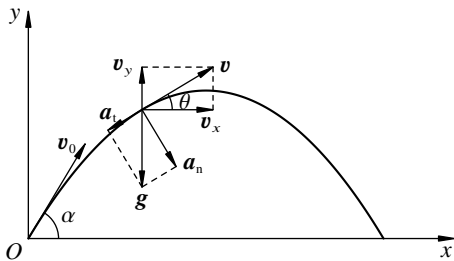
$$\phi = \arctan \frac{\sin \theta_1 - \sin \theta_2}{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}$$

且与初始时刻的相等.

1-9 某物体在 $t = 0$ 时刻以初速度 \boldsymbol{v}_0 和仰角 α 斜抛出去. 求斜抛体在任一时刻的法向加速度 a_n 、切向加速度 a_t 和轨道曲率半径 ρ .

解 设坐标 x, y 沿水平和竖直两个方向, 如解图 1-9 所示. 总加速度 (重力加速度) g 是已知的; 所以 a_n, a_t 只是重力加速度 g 沿轨道法向和切向的分量, 由解图 1-9 可得:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2gv_0 t \sin \alpha} \\ a_n &= g \cos \theta = g \frac{v_x}{v} = \frac{gv_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2gv_0 t \sin \alpha}} \\ a_t &= -g \sin \theta = -g \frac{v_y}{v} = \frac{-g(v_0 \sin \alpha - gt)}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2gv_0 t \sin \alpha}} \\ \rho &= \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2 - 2gv_0 t \sin \alpha)^{3/2}}{gv_0 \cos \alpha} \end{aligned}$$



解图 1-9

1-10 质点由静止开始沿半径为 R 的圆周运动, 角加速度 α 为常量. 求:

- (1) 该质点在圆上运动一周又回到出发点时, 经历的时间?
- (2) 此时它的加速度的大小是多少?

解 (1) 由 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, 得

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \int_0^t \alpha dt = \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \int_0^t \omega dt = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{aligned}$$

将 $\theta_0 = 0, \omega_0 = 0, \theta = 2\pi$ 代入上式, 得

$$t = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}}, \quad \omega = \omega_0 + \alpha t = \sqrt{4\pi\alpha}$$

(2) $a_n = R\omega^2 = 4\pi R\alpha, a_t = R\alpha$. 故加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = R\alpha\sqrt{1 + 16\pi^2}$$

1-11 雨天一辆客车以 $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率向东行驶, 雨滴以 $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率落下, 其方向与竖直方向成 15° , 已知风向为正西, 求车厢内的人观察到雨滴的速度的大小和方向.

解 如解图 1-11 所示, 以地面为参考系 S, 并建立坐标系, x 轴指向东, y 轴向上. 牵连速度为车厢相对于地面的速度

$$\boldsymbol{u} = 15\boldsymbol{i} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

题中给出的雨滴的速度是相对于 S 系的速度

$$\boldsymbol{v}_a = (10 \sin 15^\circ \boldsymbol{i} - 10 \cos 15^\circ \boldsymbol{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx (1.74\boldsymbol{i} - 9.85\boldsymbol{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

车厢中的人观察到雨滴的速度是相对速度

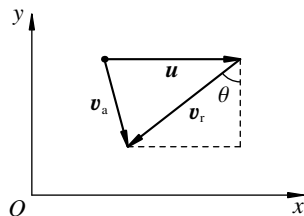
$$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{u} = -(13.25\boldsymbol{i} + 9.85\boldsymbol{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

由上式知, \boldsymbol{v}_r 的大小为

$$v_r = \sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2} = 16.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

其方向由与 $-y$ 轴之间的夹角确定,

$$\theta = \arctan \frac{v_{rx}}{v_{ry}} = 53.4^\circ$$



解图 1-11

第2章 动量 角动量

2.1 要点归纳

1. 动量和冲量

定义质点的动量为 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, 质点系的动量为 $\boldsymbol{p} = \sum m_i \boldsymbol{v}_i$; 冲量 $\boldsymbol{J} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt$.

2. 动量定理

质点动量定理

$$\boldsymbol{J} = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1$$

质点系动量定理

$$\sum_{i=1}^n \boldsymbol{J}_i = \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{v}_{i2} - \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{v}_{i1}$$

3. 动量守恒定律 合外力为零时, 质点系总动量守恒

$$\sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{v}_i = \text{常矢量}$$

4. 质心运动定理

$$\boldsymbol{F} = m \frac{d\boldsymbol{r}_c^2}{dt^2}, \quad \boldsymbol{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{r}_i, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i$$

5. 角动量

质点角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$, 质点系角动量 $\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$, 刚体定轴转动的角动量 $L_z = I_z \omega$.

6. 刚体定轴转动的运动学描述

$$\theta = \theta(t), \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

7. 刚体对定轴 z 的转动惯量

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 \quad (\text{分立质点刚体}), \quad I_z = \int r^2 dm \quad (\text{质量连续分布刚体})$$

8. 角动量定理 $\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$, 刚体定轴转动定律 $M_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt}$.

9. 角动量守恒定律

对同一参考点, 合外力矩为零时, 质点系(含刚体)总角动量守恒, $\boldsymbol{L} = \text{常矢量}$. 特别是含刚体定轴转动的角动量守恒定律

$$\sum_i L_{iz} + \sum_j I_{jz} \omega_j = \text{常量}$$