第 3 章　多维随机变量

在实际应用中,经常会遇到需要同时用两个或两个以上的随机变量来更好地刻画随机现象.如,为了考查某地区学龄儿童的身体发育情况,需要记录学龄儿童的身高 H、体重 W、视力 F 等等指标来研究;又如,飞机在飞行过程中控制台需要通过经度、维度和高度来确定飞机的位置;等等.我们将定义在同一样本空间 S 上的 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 所构成的 n 维向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为 n 维随机变量(或 n 维随机向量).基于此,可将第 2 章中的随机变量称为一维随机变量.本章主要讨论最简单的多维随机变量——二维随机变量,其他高维的随机变量的相关内容可由二维随机变量类似推出.

由一维随机变量到多维随机变量的推广,和高等数学中的由一元函数到多元函数的推广有相似之处.

3.1　二维随机变量及其分布函数

3.1.1　二维随机变量的概念

定义 3.1.1　设 X,Y 是定义在同一样本空间 S 上的两个随机变量,则称 (X,Y) 为定义在样本空间 S 上的**二维随机变量**(或**二维随机向量**).

说明　二维随机变量 (X,Y) 的性质不仅与 X 及 Y 有关,还依赖于这两个随机变量之间的关系.因此,单独研究 X 或 Y 的性质是不完善的,需将 (X,Y) 作为一个整体来研究.

设 D 为 xOy 平面上的一个点集,则 $\{(X,Y)\in D\}$ 通常表示的是某一个事件,即 $\{(X,Y)\in D\}=\{e\mid(X(e),Y(e))\in D\}$.本章中,我们主要讨论形如 $\{(X,Y)\in D\}$ 的事件及其概率,其中 D 通常是区域.

类似地,可定义 n 维随机变量(或 n 维随机向量).

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是定义在同一样本空间 S 上的 n 个随机变量,则称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为定义在样本空间 S 上的 n **维随机变量**(或 n **维随机向量**).

与一维随机变量类似,我们也可以通过分布函数来描述多维随机变量的概率

分布.

3.1.2 二维随机变量的分布函数及其边缘分布函数

定义 3.1.2 设(X,Y)为二维随机变量，对任意实数 x,y，称二元实函数

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\} \tag{3-1-1}$$

为二维随机变量(X,Y)的**联合分布函数**，简称(X,Y)的**分布函数**.

类似也可定义 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数.

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为 n 维随机变量，对任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，称 n 元实函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\}$$

为 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数.

联合分布函数的几何意义：$F(x,y)$在点(x_0,y_0)的函数值 $F(x_0,y_0)$表示平面上的随机点(X,Y)落在点(x_0,y_0)左下方无穷闭矩形区域中的概率. 如图 3.1.1 所示.

由公式(3-1-1)，结合分布函数几何意义及图 3.1.2 可知，随机点(X,Y)落在矩形域$\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}$中的概率为

$$P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}=F(x_2,y_2)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1). \tag{3-1-2}$$

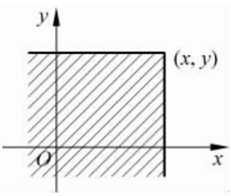

图 3.1.1

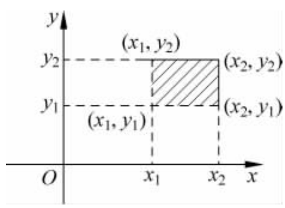

图 3.1.2

由定义 3.1.2，容易验证分布函数有如下性质：

(1) $F(x,y)$是关于 x 或 y 的单调不减函数，即

对于固定的 y，当 $x_1<x_2$ 时，有 $F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y)$；

对于固定的 x，当 $y_1<y_2$ 时，有 $F(x,y_1)\leqslant F(x,y_2)$.

(2) $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，且有

$$\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0,\quad \lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,\quad \lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,\quad \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$

可简记为 $F(-\infty,y)=0,F(x,-\infty)=0,F(-\infty,-\infty)=0,F(+\infty,+\infty)=1$.

(3) $F(x,y)$关于 x 或 y 是右连续的，即

$$F(x,y)=F(x+0,y),\quad F(x,y)=F(x,y+0).$$

(4) 对于任意的 $x_1<x_2,y_1<y_2$，都有

$$F(x_2,y_2)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)\geqslant 0.$$

反之，具有以上 4 条性质的二元函数 $F(x,y)$ 一定可以作为某二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数.

二维随机变量 (X,Y) 作为一个整体，有其联合分布函数 $F(x,y)$；但每个随机分变量 X 和 Y 作为一维随机变量也有它们各自的分布函数，且 X 和 Y 各自的分布函数与 $F(x,y)$ 有如下关系：

$$P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y) \overset{\text{记作}}{=} F_X(x), \tag{3-1-3}$$

$$P\{Y \leqslant y\} = P\{X < +\infty, Y \leqslant y\} = F(+\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y) \overset{\text{记作}}{=} F_Y(y). \tag{3-1-4}$$

我们分别称 $F_X(x)$，$F_Y(y)$ 为 (X,Y) 关于 X 和 Y 的**边缘分布函数**.

在第 1 章中，给出了随机事件的独立性，现在我们也可以来研究随机变量之间的独立性.

3.1.3 两个随机变量的独立性

定义 3.1.3 设 X 和 Y 是两个随机变量，若对任意实数 x,y，都有

$$P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = P\{X \leqslant x\} \cdot P\{Y \leqslant y\} \tag{3-1-5}$$

成立，则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

由于 $\{X \leqslant x\}$，$\{Y \leqslant y\}$ 表示两个事件，公式(3-1-5)其实就说明了这两个事件是相互独立的.

由联合分布函数和边缘分布函数定义可知，随机变量 X 和 Y 的独立性条件等价于：对任意实数 x,y，都有

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y). \tag{3-1-6}$$

与一维随机变量一样，通常研究的多维随机变量也有两种：离散型、连续型.

3.2 二维离散型随机变量及其分布

3.2.1 二维离散型随机变量及其联合分布律

定义 3.2.1 若二维随机变量 (X,Y) 的所有可能取值是有限多对或无穷可列多对，则称 (X,Y) 为**二维离散型随机变量**.

同一维离散型随机变量类似，要掌握二维离散型随机变量 (X,Y) 的统计规律，必须且只需知道 (X,Y) 的所有可能取值及取每一对可能值对应的概率即可.

定义 3.2.2 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的所有可能取值为 (x_i, y_j) $(i,j=1,2,\cdots)$，且

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,\tag{3-2-1}$$

则称(3-2-1)式为二维离散型随机变量(X,Y)的**联合分布律**或**联合概率分布**.联合分布律也常用表格来表示,见表 3-2-1.

表 3-2-1

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

由概率的性质易知,任一个二维离散型随机变量的联合分布律$\{p_{ij}\}$都具有下述两个基本性质:

(1) $p_{ij}\geqslant 0,i,j=1,2,\cdots$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$.

反之,任一具有以上两个性质的数列$\{p_{ij}\}$,也一定可以作为某个二维离散型随机变量的联合分布律.

二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\sum_{x_i\leqslant x}\sum_{y_j\leqslant y}p_{ij},\tag{3-2-2}$$

其中和式是对一切满足$x_i\leqslant x,y_j\leqslant y$的$i,j$求和.

例 3.2.1 袋中有 5 个球,分别编码为 1,2,3,4,5.从中任取 3 个,分别用X,Y表示所取得的球中的最小编码和最大编码,求X和Y的联合分布律.

解 由题可知,X和Y的所有可能取值分别为X:1,2,3;Y:3,4,5,且有

$$P\{X=1,Y=3\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10},\quad P\{X=1,Y=4\}=\frac{C_2^1}{C_5^3}=\frac{1}{5},$$

$$P\{X=1,Y=5\}=\frac{C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10},$$

$$P\{X=2,Y=3\}=0,\quad P\{X=2,Y=4\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10},$$

$$P\{X=2,Y=5\}=\frac{C_2^1}{C_5^3}=\frac{1}{5},$$

$$P\{X=3,Y=3\}=0,\quad P\{X=3,Y=4\}=0,$$

$$P\{X=3,Y=5\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}.$$

即 X 和 Y 的联合分布律为

$X \backslash Y$	3	4	5
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
3	0	0	$\frac{1}{10}$

例 3.2.2 设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律如下所示：

$X \backslash Y$	1	2	3
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0
3	0.2	0	a

试求：(1) a 的值；(2) $P\{0.5<X\leqslant 3,0\leqslant Y<3\}$；(3) $P\{Y=3\}$.

解 (1) 由联合分布律性质可知 $a\geqslant 0$，且

$$0.1+0+0.3+0.1+0.1+0+0.2+0+a=1,$$

解得 $a=0.2$；

(2) $P\{0.5<X\leqslant 3,0\leqslant Y<3\}$

$=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}+P\{X=3,Y=1\}+P\{X=3,Y=2\}$

$=0.1+0.1+0.2+0=0.4$；

(3)

$$\begin{aligned}P\{Y=3\}&=P\{-\infty<X<+\infty,Y=3\}\\&=P\{X=0,Y=3\}+P\{X=1,Y=3\}+P\{X=3,Y=3\}\\&=0.3+0+0.2=0.5.\end{aligned}$$

由例 3.2.2 可看出，由 $P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},j=1,2,\cdots$，可求得 Y 的分布律；类似地，也可求得 X 的分布律. 我们将其称为边缘分布律.

3.2.2 边缘分布律及其与独立性的关系

定义 3.2.3 设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

令

$$p_{i*}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\quad i=1,2,\cdots,\tag{3-2-3}$$

$$p_{*j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},\quad j=1,2,\cdots,\tag{3-2-4}$$

称 $p_{i*}(i=1,2,\cdots)$和 $p_{*j}(j=1,2,\cdots)$分别为(X,Y)关于 X 和 Y 的**边缘分布律**.

我们可在(X,Y)的联合分布律表格中同时添加一行、一列得到边缘分布律.

例 3.2.3 设袋中有 2 个白球及 4 个红球，现从其中随机地抽取两次，每次取一个，定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases}0, & 第一次摸出白球,\\ 1, & 第一次摸出红球,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}0, & 第二次摸出白球,\\ 1, & 第二次摸出红球.\end{cases}$$

分别求下列两种试验中的随机变量(X,Y)的联合分布律与边缘分布律：

(1) 有放回摸球；(2) 无放回摸球.

解 (1) 采取有放回摸球时，(X,Y)的联合分布与边缘分布由表 3-2-2 给出.

表 3-2-2

X \ Y	0	1	$P\{X=x_i\}$
0	$\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$	$\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{9}$	$\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

(2) 采取无放回摸球时，(X,Y)的联合分布与边缘分布由表 3-2-3 给出.

表 3-2-3

X \ Y	0	1	$P\{X=x_i\}$
0	$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$	$\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$	$\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

在上例的两个表格中，中间部分是(X,Y)的联合分布律，而边缘部分是由联合分布经同一行或同一列的和而得到的 X 和 Y 的边缘分布律，“边缘”二字即由此得来.

显然，二维离散型随机变量的边缘分布律也是离散的. 且通过此例可以看出，即使(X,Y)的联合分布律不相同，也可得到相同的边缘分布. 可见，联合分布不能由边缘分布唯一确定，即二维随机变量的性质不能由它的两个分量的个别性质来确定，还需考虑它们之间的联系. 下面就利用边缘分布来研究随机变量之间的独立性.

由定义 3.1.3 易知，对于二维离散型随机变量(X,Y)，X 和 Y 相互独立等价于：对(X,Y)的任一可能取值(x_i,y_j)，都有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\},\quad i,j=1,2,\cdots, \tag{3-2-5}$$

即

$$p_{ij}=p_{i*}\cdot p_{*j},\quad i,j=1,2,\cdots. \tag{3-2-6}$$

如例 3.2.3 中，有放回摸球时，X 和 Y 是相互独立的；无放回摸球时，因为$P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}$，所以 X 和 Y 不是相互独立的.

例 3.2.4 设(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	α
3	$\frac{1}{18}$	β

试求：(1) α,β 应满足的条件；

(2) 若 X 和 Y 是相互独立的，求 α,β 的值.

解 (1) 由联合分布律性质可知 $\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0$，且

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\alpha+\frac{1}{18}+\beta=1,$$

所以 α,β 应满足

$$\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0,\quad 且\quad \alpha+\beta=\frac{1}{3}.$$

(2) 因为 X 和 Y 相互独立，所以有 $p_{ij}=p_{i*}\cdot p_{*j},i,j=1,2,\cdots$，特别地有

$$P\{X=2,Y=0\}=P\{X=2\}\cdot P\{Y=0\},$$

即

$$\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{9}+\alpha\right)\cdot\frac{1}{3},$$

解得 $\alpha=\frac{2}{9}$. 又因为 $\alpha+\beta=\frac{1}{3}$，所以 $\beta=\frac{1}{9}$.

3.2.3 条件分布律

在第 1 章中,我们定义随机事件的条件概率,在这里我们也可以讨论多个随机变量的条件分布律.

定义 3.2.4 设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

对于固定的 j,若 $P\{Y=y_j\}>0$,则称

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}},\quad i=1,2,\cdots \tag{3-2-7}$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

同样,对于固定的 i,若 $P\{X=x_i\}>0$,则称

$$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}},\quad j=1,2,\cdots \tag{3-2-8}$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

显然条件概率满足

(1) $P\{X=x_i|Y=y_j\}\geqslant 0,P\{Y=y_j|X=x_i\}\geqslant 0$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=1,\sum\limits_{j=1}^{\infty}P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=1.$

例 3.2.5 求例 3.2.2 中在 $Y=3$ 的条件下随机变量 X 的条件分布律.

解

$$P\{X=0\mid Y=3\}=\frac{P\{X=0,Y=3\}}{P\{Y=3\}}=\frac{0.3}{0.5}=0.6,$$

$$P\{X=1\mid Y=3\}=\frac{P\{X=1,Y=3\}}{P\{Y=3\}}=\frac{0}{0.5}=0,$$

$$P\{X=3\mid Y=3\}=\frac{P\{X=3,Y=3\}}{P\{Y=3\}}=\frac{0.2}{0.5}=0.4.$$

3.3 二维连续型随机变量及其分布

3.3.1 二维连续型随机变量及其联合概率密度函数

定义 3.3.1 设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为 $F(x,y)$,如果存在一个二元非负实函数 $f(x,y)$,使得对任意实数 x,y,都有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{3-3-1}$$

则称(X,Y)是**二维连续型随机变量**,二元非负实函数 $f(x,y)$为连续型随机变量(X,Y)的**联合概率密度函数**或**联合密度函数**,简称**密度函数**.

由定义 3.3.1 易知，联合概率密度函数 $f(x,y)$ 具有如下两条基本性质：

(1) $f(x,y)\geqslant 0$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$

反之，任一具有以上两条性质的二元实函数 $f(x,y)$ 也一定可以作为某一个二维连续型随机变量的密度函数.

此外，$f(x,y)$ 还有如下性质：

(3) 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y);$$

(4) 设点集 G 为平面上任一区域，则二维连续型随机点 (X,Y) 落在区域 G 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint\limits_{(x,y)\in G} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3-3-2}$$

由概率密度定义及其性质，可得其几何意义：

1. 由性质(2)可知，密度函数 $f(x,y)$ 与 xOy 平面所围的曲顶柱体体积等于 1；

2. 由性质(4)可知，二维连续型随机变量 (X,Y) 落在平面某区域 G 内的概率即为以其密度函数 $f(x,y)$ 为顶，以区域 G 为底的曲顶柱体的体积.

例 3.3.1 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} A\mathrm{e}^{-(4x+3y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求：(1)常数 A 的值；(2) (X,Y) 的联合分布函数；(3) $P\{0\leqslant X<1, -1<Y\leqslant 2\}$.

解 (1) 由性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$ 得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} A\mathrm{e}^{-(4x+3y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= A\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-4x}\,\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-3y}\,\mathrm{d}y = \frac{A}{12} = 1,\end{aligned}$$

解得 $A=12$.

(2) 当 $x\leqslant 0$ 或 $y\leqslant 0$ 时，$f(x,y)=0$，显然 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0$；

当 $x>0$ 且 $y>0$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{0}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{y} 12\mathrm{e}^{-(4u+3v)}\,\mathrm{d}v = (1-\mathrm{e}^{-4x})(1-\mathrm{e}^{-3y}),$$

因此

$$F(x,y)=\begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-4x})(1-\mathrm{e}^{-3y}), & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(3) 方法一 $P\{0\leqslant X<1,-1<Y\leqslant 2\}=F(1,2)+F(0,-1)-F(1,-1)-F(0,2)$

$$=(1-\mathrm{e}^{-4})(1-\mathrm{e}^{-6}).$$

方法二 $P\{0\leqslant X<1,-1<Y\leqslant 2\}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-1}^2 f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2 12\mathrm{e}^{-(4x+3y)}\mathrm{d}y$

$$=(1-\mathrm{e}^{-4})(1-\mathrm{e}^{-6}).$$

与一维连续型随机变量情形类似,下面也给出两种常用的二维连续型随机变量的分布.

(1) 设 G 为平面上一有界区域,其面积为 A_G,若二维连续型随机变量(X,Y)具有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A_G}, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G,\end{cases}$$

则称(X,Y)在平面区域 G 上服从二维均匀分布.

若(X,Y)在平面区域 G 上服从二维均匀分布,且 $D\subset G$,则(X,Y)落在 D 中的概率为

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_{(x,y)\in D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{(x,y)\in D}\frac{1}{A_G}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{A_D}{A_G},$$

其中 A_D 为子区域 D 的面积.

类似地,也可定义空间有界区域上的三维均匀分布等.

(2) 设二维连续型随机变量(X,Y)具有联合密度函数

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},\quad -\infty<x,y<+\infty,$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数,且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$,则称$(X,Y)$服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布,记作$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

例 3.3.2 设(X,Y)在平面圆域 G:$x^2+y^2\leqslant 9$ 上服从均匀分布,求:

(1) (X,Y)的密度函数;

(2) $P\{X>Y\}$.

解 (1) 圆域 G 的面积为 $A_G=9\pi$,所以(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{9\pi}, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G;\end{cases}$$

(2) 直线 $y=x$ 恰好将圆域 G 一分为二,令 $D=\{(x,y)\mid x>y\}\cap G$,则 $A_D=\dfrac{1}{2}A_G$,

所以 $P\{X>Y\}=P\{(X,Y)\in D\}=\dfrac{A_D}{A_G}=\dfrac{1}{2}$.

例 3.3.3 设$(X,Y)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$,求 $P\{Y<X\}$.