第3章　向量组及其线性相关性

向量理论是矩阵理论的深入和发展.本章主要研究向量之间的线性相关与线性无关、向量组的秩等概念,讨论怎样利用矩阵的秩来研究向量组的线性相关性和向量组的秩,最后介绍向量空间理论.

3.1　n 维向量及其线性运算

3.1.1　向量的概念

定义3.1　称由任意 n 个数组成的有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 n 维向量,其中第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量(或坐标),分量的个数 n 称为这个向量的维数.常用粗体小写字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 或希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$ 等表示向量.

分量全为实数的向量称为实向量,分量为复数的向量称为复向量.如无特别说明,本书讨论的向量均是实向量.

如上定义的 n 维向量写成一行:$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,称为行向量(或行矩阵).

n 维向量也可以写成一列:$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$,称为列向量(或列矩阵).

本书除特别说明外,讨论的均是列向量.

分量全为零的向量称为零向量,记为 $\mathbf{0}$,但需注意,不同维数的零向量是不同的.

由向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 的各分量的相反数所组成的向量,称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量,记为 $-\boldsymbol{\alpha}$,即

$$-\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\\vdots\\-a_n\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

定义 3.2 设向量$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$,若满足 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$,则称这两个向量相等,记为$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

n 维向量的概念是解析几何中向量概念的推广.常见的二维向量和三维向量几何意义分别是平面和空间中的向量.当 $n>3$ 时,n 维向量没有明显的几何对应,但在数学和其他学科中,n 维向量具有明确的实际意义,并且有着广泛的应用.

例 3.1 (1) 工厂加工一批零件的数量为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,可记为一个 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$;

(2) 一个球的球心坐标为(x_0,y_0,z_0),半径为 r,则$\boldsymbol{\alpha}=(x_0,y_0,z_0,r)^{\mathrm{T}}$ 表示一个 4 维向量;

(3) 矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$的每一行$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,m)$都是 n 维行向量.矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$的每一列$\boldsymbol{\beta}_j=\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{mj}\end{pmatrix}(j=1,2,\cdots,n)$都是 m 维列向量.

由此可见,n 维向量的概念是客观事物在数量上的一种抽象.

3.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 3.3 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 为两个 n 维向量,则称向量$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}$ 为向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的和,记为$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$,即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}. \tag{3.2}$$

利用负向量可以定义向量的减法:$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$.

注 只有当两个向量的维数相同时才能进行加法和减法运算.

2. 数与向量的乘法

定义 3.4 设 k 为任意实数,$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 为一个 n 维向量,则称向量$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^{\mathrm{T}}$ 为数 k 与$\boldsymbol{\alpha}$的乘积,记为 $k\boldsymbol{\alpha}$,即 $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^{\mathrm{T}}$.

3. 线性运算的性质

不难验证,向量的线性运算满足以下 8 条运算规律,其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$为向量,$k,l$ 为实数.

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$($\mathbf{0}$ 是零向量,不是数零);

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(5) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})=l(k\boldsymbol{\alpha})$;

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

我们将向量加法、数与向量的乘法两种运算,称为向量的线性运算.

例 3.2 设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,3,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(-2,-1,2,3)^{\mathrm{T}}$,求满足 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}-5\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$ 的向量$\boldsymbol{\gamma}$.

解 由 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}-5\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$ 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}&=\frac{1}{5}(2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\\&=\frac{1}{5}[2(1,1,3,0)^{\mathrm{T}}+(-2,-1,2,3)^{\mathrm{T}}]\\&=\left(0,\frac{1}{5},\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

3.2 向量组的线性相关性

若干个同维数列向量(或同维数行向量)所组成的集合称为一个向量组,一般用大写字母 A,B,C 等表示.

3.2.1 向量的线性组合与线性表示

由平面解析几何知,若两个非零向量$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$互相平行,则可以表示为$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$,$k\in\mathbf{R}$;若$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$不平行,则平面上任一向量$\boldsymbol{\gamma}$可由$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$表示为$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}$($k_1,k_2\in\mathbf{R}$),称$\boldsymbol{\gamma}$能由$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$线性表示或$\boldsymbol{\gamma}$是$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$的线性组合. 一般地,我们有下面的定义.

定义 3.5 给定向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$,对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \tag{3.3}$$

称为向量组 A 的一个线性组合,$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为这个线性组合的系数.

给定向量组 A: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和向量$\boldsymbol{\beta}$,若存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使得

$$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m, \tag{3.4}$$

则称向量$\boldsymbol{\beta}$是向量组 A 的线性组合,或称向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组 A 线性表示.

例 3.3 设向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(3,4,5)^{\mathrm{T}}$,可以看出$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$. 因此向量$\boldsymbol{\beta}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合,或者称向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

例 3.4 零向量是任意同维数的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合,即

$$\mathbf{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m.$$

例 3.5 证明：任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 均可由 n 维向量组 E：$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，且表法唯一.

证明 设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n$，则

$$\begin{aligned}(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}&=(k_1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+(0,k_2,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+\cdots+(0,0,0,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}\\&=(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

得唯一解 $k_1=b_1,k_2=b_2,\cdots,k_n=b_n$.

故 $\boldsymbol{\beta}$ 能够由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 唯一线性表示，向量组 $\boldsymbol{E}$ 称为 **n 维单位坐标向量组.**

例 3.6 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，试问向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？若能，写出具体表示式.

解 设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，即

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

由此得线性方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2=1\\k_1+2k_2=2.\\k_2+k_3=3\end{cases}$$

因系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1\neq0$，由克莱姆法则，求出 $k_1=0,k_2=1,k_3=2$，所以 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，故向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

定理 3.1 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能够由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 的秩等于矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})$ 的秩.

例 3.7 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,6,4,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(-1,-2,0,-3)^{\mathrm{T}}$，试问向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示？

解 方法一 设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，即

$$\begin{cases}k_1+3k_2=-1\\2k_1+6k_2=-2\\2k_1+4k_2=0\\-k_1+k_2=-3\end{cases},$$

解得 $k_1=2,k_2=-1$，故 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，且表示方式唯一.

方法二　根据定理 3.1 知，设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})$，有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&6&-2\\2&4&0\\-1&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$，所以向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

3.2.2　向量组的等价

定义 3.6　若向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量均可由向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，则称向量组 A 可由向量组 B 线性表示；若向量组 A 与向量组 B 可以相互线性表示，则称向量组 A 与向量组 B 等价.

向量组的等价关系具有以下性质.

(1) 反身性：向量组 A 与向量组 A 等价；

(2) 对称性：向量组 A 与向量组 B 等价，则向量组 B 与向量组 A 等价；

(3) 传递性：向量组 A 与向量组 B 等价，向量组 B 与向量组 C 等价，则向量组 A 与向量组 C 等价.

定理 3.2　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次的初等行(列)变换化成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行(列)向量组等价.

证明　这里只对初等行变换的情况加以证明. 对 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换后化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，相当于用一个 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$，从而有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$. 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=(p_{ij})_{m\times m},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=(q_{ij})_{m\times m},\tag{3.5}$$

则有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{1m}\boldsymbol{\alpha}_m\\\boldsymbol{\beta}_2=p_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{2m}\boldsymbol{\alpha}_m\\\qquad\cdots\\\boldsymbol{\beta}_m=p_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{mm}\boldsymbol{\alpha}_m\end{cases},\tag{3.6}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=q_{11}\boldsymbol{\beta}_1+q_{12}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+q_{1m}\boldsymbol{\beta}_m\\\boldsymbol{\alpha}_2=q_{21}\boldsymbol{\beta}_1+q_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+q_{2m}\boldsymbol{\beta}_m\\\qquad\cdots\\\boldsymbol{\alpha}_m=q_{m1}\boldsymbol{\beta}_1+q_{m2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+q_{mm}\boldsymbol{\beta}_m\end{cases}.\tag{3.7}$$

由向量组等价的定义可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

3.2.3 向量组的线性相关性

定义 3.7 对于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}, \tag{3.8}$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关;否则,则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,即若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关只有在 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 时才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$ 成立.

例 3.8 对于两空间向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(4,16,24)^{\mathrm{T}}$,得$\boldsymbol{\alpha}_2=4\boldsymbol{\alpha}_1$,则$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与$\boldsymbol{\alpha}_2$ 共线,共线即为线性相关,不共线的两向量为线性无关.

例 3.9 单位坐标向量组$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,试判断其线性相关性.

解 设有常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得 $k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0}$ 成立,则有

$$k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

所以当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时才有 $k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0}$,故单位坐标向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关.

例 3.10 设有一向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,向量满足$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$,判断向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关性.

解 设有常数 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$ 成立,即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0},$$

整理得

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2k_1+k_2+2k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(3k_2+4k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

因向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,故有

$$\begin{cases}k_1+k_3=0\\2k_1+k_2+2k_3=0,\\3k_2+4k_3=0\end{cases}$$

解出 $k_1=k_2=k_3=0$,因此向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

定理 3.3 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则$\boldsymbol{\beta}$ 能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 唯一线性表示.

证明 由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,故存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

显然 $k\neq0$,否则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,与已知矛盾,故

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{k}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

再证唯一性.设$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m$及$\boldsymbol{\beta}=\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\mu_m\boldsymbol{\alpha}_m$,两式相减,得

$$(\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2-\mu_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda_m-\mu_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关,故$\lambda_i=\mu_i(i=1,2,\cdots,m)$,从而表示式唯一.

3.3 线性相关性的判定定理

根据定义来判定向量组的线性相关性往往比较复杂,有时我们可以直接利用向量组的特点来判断它的线性相关性.

通常将一个向量组中的一部分向量所构成的向量组称为原向量组的一个部分组.

定理 3.4 n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的充分必要条件是$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m$,这里矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

推论 3.1 n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$,记矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,若秩$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<m$,则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

例 3.11 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(2,4,1)^{\mathrm{T}}$,试判定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性相关性.

解 因矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&1&3&2\\2&1&2&4\\1&1&5&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&3&2\\0&1&4&0\\0&0&2&-1\end{pmatrix},$$

可知$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3<4$,故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关.

推论 3.2 当$m>n$时,m个n维向量必然线性相关.

推论 3.3 设$\boldsymbol{A}$是一个n阶方阵,则$\boldsymbol{A}$的行(列)向量组线性无关的充要条件是$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

例 3.12 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$,试判定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性相关性.

解 因行列式$\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&2\\2&2&2\end{vmatrix}=4\neq 0$,因此向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

例 3.13 给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(7,-5,4,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-7,4,-11)^{\mathrm{T}}$,试判定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性相关性.

解 将向量组形成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化为行阶梯形矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&7&3\\1&-5&-7\\0&4&4\\5&-1&-11\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-5&-7\\2&7&3\\0&4&4\\5&-1&-11\end{pmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_4-5r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-5&-7\\0&17&17\\0&4&4\\0&24&24\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2\times\frac{1}{17}\\r_3\times\frac{1}{4}\\r_4\times\frac{1}{24}}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-5&-7\\0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\overset{\substack{r_3-r_2\\r_4-r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-5&-7\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2<3$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

定理 3.5 若向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则向量组 B：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 也线性相关.

证明 设向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

对于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$，取 $k_{m+1}=0$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k_{m+1}$不全为零，仍然有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k_{m+1}\boldsymbol{\alpha}_{m+1}=\mathbf{0},$$

所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$线性相关，故结论成立.

推论 3.4 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

推论 3.5 含有零向量的向量组必然线性相关.

定理 3.6 设有两个向量组

$$A:\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{rj})^{\mathrm{T}},\quad j=1,2,\cdots,m,\tag{3.9}$$

$$B:\boldsymbol{\beta}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{rj},a_{r+1,j})^{\mathrm{T}},\quad j=1,2,\cdots,m,\tag{3.10}$$

若向量组 A 线性无关，则向量组 B 线性无关.

证明 （反证法）假设向量组 B 线性相关，则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0},$$

即

$$k_1\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{r1}\\a_{r+1,1}\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}a_{12}\\\vdots\\a_{r2}\\a_{r+1,2}\end{pmatrix}+\cdots+k_m\begin{pmatrix}a_{1m}\\\vdots\\a_{rm}\\a_{r+1,m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}.$$

取其前 r 个等式，有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，这与条件向量组 A 线性无关相矛盾，故向量组 B 线性无关.

推论 3.6 r 维向量组 A 的每个向量添上 $n-r$ 个分量成为 n 维向量组 B，若向量组 A 线性无关，则向量组 B 线性无关.

定理 3.7 设两个向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，如果向量组 A 可由向量组 B 线性表示，且 $s>t$，则向量组 A 必然线性相关.

推论 3.7 如果向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，且向量组 A 线性无关，则 $s\leqslant t$.

推论 3.8 两个等价的线性无关的向量组所含向量的个数相等.

3.4 向量组的秩

由上节内容可知，线性相关的向量组，其部分组可能线性相关也可能线性无关.

3.4.1 向量组的秩的定义

定义 3.8 设向量组 A 的一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 满足

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

(2) 向量组 A 中的每一个向量均可由此部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 A 的一个极大线性无关组（简称极大无关组）；极大线性无关组所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩，记为 $\mathrm{R}(A)$.

注 (1) 只含零向量的向量组没有极大无关组，规定它的秩为零；

(2) 向量组与它的极大无关组等价；

(3) 向量组的极大无关组可能不止一个，若向量组的极大无关组不止一个，由等价关系的传递性可知，向量组 A 的不同的极大无关组之间等价.

通常，记 $\mathbf{R}$ 为所有实数的集合，并记 $\mathbf{R}^n$ 为所有 n 维行向量的集合或所有 n 维列向量的集合.

例 3.14 向量组 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一个极大无关组.

解 由例 3.9 知，4 维单位坐标向量组 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，且任一 4 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3,a_4)^{\mathrm{T}}$ 均可由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 线性表示，即

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3,a_4)^{\mathrm{T}}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3+a_4\boldsymbol{e}_4,$$

从而 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一个极大无关组.

定理 3.8 设向量组 A 的秩为 r，向量组 B 的秩为 s，且向量组 A 能由向量组 B 线性表示，则 $r\leqslant s$.

推论 3.9 等价的向量组秩相等.

3.4.2 向量组的秩与矩阵的秩的关系

设 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以看成 m 个 n 维行向量 $\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,m)$ 构成，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组，也可把 $\boldsymbol{A}$ 看成 n 个 m 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}(j=1,2,\cdots,n)$ 构成，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩.

定理 3.9 矩阵的秩等于它的行秩，也等于它的列秩.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=0$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，定理显然成立.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r>0$. 由矩阵秩的定义知，存在一个 r 阶子式 $D_r\neq 0$，不妨设 D_r 所在的列就是 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$. 由推论 3.3 知，$D_r$ 所在的 r 列向量线性无关，由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$，则以 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 个向量为列向量的矩阵的秩一定小于等于 r，根据定理 3.4 知，这 $r+1$ 个向量一定线性相关.

对于 $\boldsymbol{A}$ 的任一列向量 $\boldsymbol{\alpha}_k$，当 $1\leqslant k\leqslant r$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_k$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示；当 $r<k\leqslant n$ 时，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性相关，由定理 3.3 知，$\boldsymbol{\alpha}_k$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示. 因此 D_r 所在 r 列就是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组，所以 $\boldsymbol{A}$ 的列秩等于 r.

由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，又由上面的证明知，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列秩，而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列秩就是 $\boldsymbol{A}$ 的行秩，所以 $\boldsymbol{A}$ 的行秩也等于 r.

例 3.15 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,4,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-6,6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-2,2,-9)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,-2,7)^{\mathrm{T}}$ 的秩，并判定它们的线性相关性.

解 把向量按列排成矩阵 $\boldsymbol{A}$，用初等行变换求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

定理 3.10 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 对应的列向量组有相同的线性组合关系.

证明 对 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换后化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，相当于用一个 m 阶可逆