

第一篇

二型模糊集合的基础理论

第 1 章 拓扑学理论与基础

拓扑学是研究物体在连续变形之下保持不变的几何性质的科学。在点集拓扑学中,连续变形被表示为两个几何图形所对应点集之间的连续映射。我们需要在点集上构造一系列定义来刻画连续映射的特征,因此集合是点集拓扑学中至关重要的命题,是精确数学对客观现象的度量特征认识在概念上的反映。

1.1 集合的定义与表述

1.1.1 集合的定义与术语

由具有某种共同特点的个体构成的全体称为集合。如“所有整数组成的集合”“高一男生组成的集合”等等,集合又称集、族、类,集合的名称通常用大写的英文字母 A, B, \dots 来表示。

组成集合的个体称为集合的元素(或称集合元、成员、点),通常用小写英文字母 x, y, z, \dots 来表示。只含一个成员的集合称为独点集。

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 为 B 的子集,记为 $A \subseteq B$ 。如果 A 中每一个元素都是 B 的元素,但 B 中至少有一个元素不是 A 的元素,则称 A 为 B 的真子集,记为 $A \subset B$ 。

在给定的范围内,如果所有集合均为某个集合的子集,则称该集合为全集或论域。

不含任何元素的集合称为空集,用 \emptyset 表示。如方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数范围内的解就是空集。

1.1.2 集合的表示方法

集合的表示方法通常有以下两种。

(1) 枚举法 将一个集合的所有的元素列举出来,再加上花括号来表示该集合,例如 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 表示由元素 $1, 2, 3, \dots, n$ 构成的集合。枚举法能突出元素,列举的元素各不相同。

(2) 描述法 通过描述一个集合的全部元素所具有的某个共同特征来表述该集合,例如 $\{x | x^2 \leq 1\}$, 即表示其平方小于等于 1 的元素的集合。描述法突出了元素的属性。

如 $\{8\}, \{x | x^2 = 64, x > 0\}$ 均为独点集,分别采用了枚举法和描述法。

另外,图示法被用来对集合进行表述。图示法比较直观,让人一目了然。

1.1.3 集合的关系

若 a 是集合 A 的元素,则称 a 属于 A ,记为 $a \in A$;反之,若 b 不是集合 A 的元素,则称 b 不属于 A ,记为 $b \notin A$,因此,元素与集合是属于与不属于之间的关系。

对于两个集合 A, B ,若 $\forall x \in A$,都有 $x \in B$,则称 A 包含于 B 或者 B 包含 A ,分别记为

$A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 也就是说 A 为 B 的子集。空集 \emptyset 是任意集合的子集。对任意非空集合 A , 至少包含两个子集 \emptyset 与 A , 即 $\emptyset \subseteq A, A \subseteq A$, 称 A, \emptyset 是 A 的平凡子集。

对于两个集合 A, B , 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 即 A, B 有相同的元素时, 称集合 A 与集合 B 相等, 记为 $A = B$ 。

1.1.4 集合的其他相关定义

若组成一个集合的元素的个数有限, 则称该集合为有限集或有穷集, 如 $\{a, b, c, d\}$ 、 $\{\text{全班学生}\}$ 均为有限集合。否则称为无限集或无穷集, 如 $\{1, 2, 3, \dots\}$ 、 $\{\text{全体有理数}\}$ 均为无限集。

集合中的元素具有三个特性: 确定性、无序性及互异性。

以集合为元素的集合称为集族, 用花体希腊字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{I}$ 表示, $\mathcal{A} = \{\{1, 5\}, \{6\}, \emptyset\}$ 说明 \mathcal{A} 为一个集族, 由 $\{1, 5\}, \{6\}, \emptyset$ 三个元素组成。

以给定集合 A 的全体子集为元素构成的集合称为 A 的幂集, 记为 $P(A)$ 。显然, A 的幂集是由 A 的全体子集构成的集族。如果集合 A 有 n 个元素, 则它的幂集有 2^n 个元素。如集合 $A = \{a, b\}$, 其幂集 $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $P(A)$ 的元素个数为 $2^2 = 4$ 。

1.2 集合的基本运算

设 X 为全集, 对 X 中的任意两个子集 A, B , 有并、交、补等基本运算。

1.2.1 集合的并

由集合 A, B 的所有元素构成的新集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$, 读为 A 并 B , 也就是说, $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$, 如图 1.1 所示。

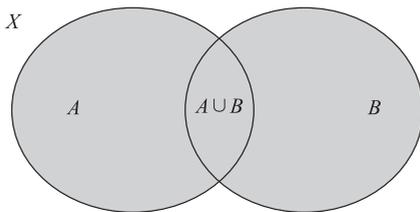


图 1.1 两个集合的并集

如全集 $X = [2, 9]$, $A = [3, 8]$, $B = (2, 6]$ 为两个子集, 则 $A \cup B = (2, 8]$ 。

1.2.2 集合的交

由同时属于集合 A, B 的所有元素组成的新集合称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$, 读为 A 交 B , 也就是说, $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 不相交或无交, 反之, 称 A 与 B 相交, 如图 1.2 所示。

如全集 $X = [2, 9]$, 则 $A = [3, 8]$, $B = (2, 6]$, $C = [7, 9]$ 均为 X 的子集, 且

$$A \cap B = [3, 6], \quad A \cap C = [7, 8], \quad B \cap C = \emptyset$$

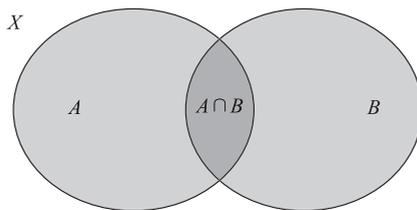


图 1.2 两个集合的交集

1.2.3 集合的补

设 X 为全集, A 为 X 中的一个集合, 在 X 中不属于 A 的所有元素组成的新集合称为 A 关于 X 的补集, 记为 A^c , 也就是说,

$$A^c = X - A = \{x | x \in X, x \notin A\} \quad (1.1)$$

如图 1.3 所示。

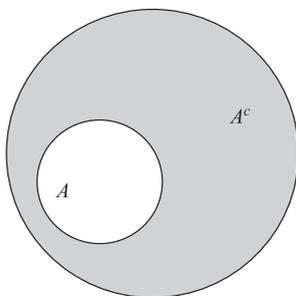


图 1.3 集合的补集

如全集 $X = [2, 9]$, $A = [3, 8]$, $B = (2, 6]$ 为两个子集, 则对应的补集为

$$A^c = [2, 3) \cup (8, 9]$$

$$B^c = \{2\} \cup (6, 9]$$

1.2.4 集合的其他运算

所有属于 B 而不属于 A 的一切元素组成的新集合称为 B 与 A 的差集, 又称为 A 相对 B 的补集, 记为 $B - A$, 读为 B 差 A 或 B 减去 A , 也就是说, $B - A = \{x | x \in B, x \notin A\}$, 如图 1.4 所示。

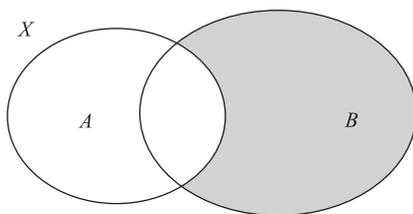


图 1.4 两个集合的差集

当 $A \subseteq B$ 时, 称差集 $B - A$ 为余集, 记为 $C_B A$, 如图 1.5 所示。

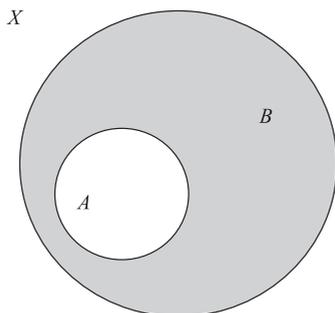


图 1.5 两个集合的余集

由仅属于集合 A 或仅属于集合 B 的所有元素组成的新集合称为 A 与 B 的对称差, 记为 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$, 如图 1.6 所示。

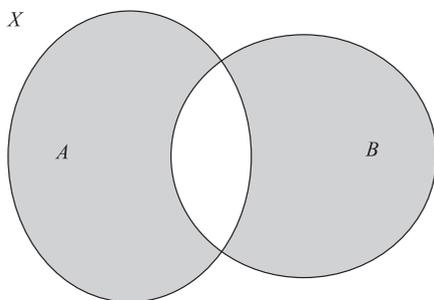


图 1.6 两个集合的对称差

对称差又可以表示为

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) \quad (1.2)$$

设 $A = \{1, 3, 7\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$, 则有

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad A \cap B = \{3, 7\}$$

$$A^c = \{5, 6, 9\}, \quad B^c = \{1, 6\}$$

$$B - A = \{5, 9\}, \quad A - B = \{1\}$$

$$A \oplus B = \{1, 5, 9\}$$

1.3 集合的基本运算性质

设 X 为全集, 对于任意子集 A, B, C , 有以下的运算性质:

(1) 等幂律 $A \cup A = A, A \cap A = A$

(2) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A, A \oplus B = B \oplus A$

(3) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

(4) 分配律 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

- (5) 同一律 $A \cap X = A, A \cup \emptyset = A$
 (6) 两级律 $A \cup X = X, A \cap \emptyset = \emptyset$
 (7) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
 (8) 还原律 $(A^c)^c = A$
 (9) 互补律 $X^c = \emptyset, \emptyset^c = X$
 (10) 恒等律 $A \oplus \emptyset = A, A \oplus A = \emptyset$
 (11) 对偶律(或 De Morgan 律)
 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C), A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
 (12) $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset$
 (13) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
 (14) 若 $A \subset B$, 则 $A \cap B = A, A \cup B = B, A - B = \emptyset$
 (15) 若 $A \subset B$, 则 $(B - A) \cup A = B, B^c \subset A^c$
 (16) $A - B = A \cap B^c = A - (A \cap B)$
 (17) $C - A - B = C - (A \cup B)$
 (18) 若 $A \subset C, B \subset C$, 则 $A - B = A \cap C_A B$
 (19) $A \oplus B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$
 (20) $A \cup B = (A \oplus B) \cup (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B)$

由集合的交换律和结合律,按照归纳的方法对任意有限个集合 A_1, A_2, \dots, A_n 的并与交分别定义为

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n$$

1.4 关系和映射

在数学中,我们通常要讨论集合中不同对象之间的联系以及给定集合之间的联系,这就涉及关系和映射。比如次序和等价,其本质就是二元关系,体现了给定集合中对象之间的联系;而函数和运算则是映射,体现了定义域和值域之间的联系,我们将在点集上给出相关概念。在点集上给出这些定义,是对这些数学概念更本质数学特征的刻画。

在数学中诸如函数、次序、运算以及等价的概念实际上是指出某些给定的集合的元素之间的某种关系,下面介绍相关概念。

1.4.1 关系

对于任意 n 个集合 X_1, X_2, \dots, X_n , 集合

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\} \quad (1.3)$$

称为 X_1, X_2, \dots, X_n 的笛卡儿积,记为 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 。其中, (x_1, x_2, \dots, x_n) 为有次序的 n 元数组, $x_i (1 \leq i \leq n)$ 称为 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的第 i 个坐标, $X_i (1 \leq i \leq n)$ 称为 $X_1 \times X_2 \times \dots \times$

X_n 的第 i 个坐标集。 n 个集合的笛卡儿积 $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n \text{ 个}}$ 记为 X^n , 当 X 为实数集 R 时, $R^n = \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n \text{ 个}}$ 为所有有次序的 n 个实数组 (x_1, x_2, \cdots, x_n) 构成的集合。

设 X, Y 为集合, X 与 Y 的笛卡儿积 $X \times Y$ 的一个子集 R 称为从 X 到 Y 的一个关系, 记为 $R \subset X \times Y$ 。

若 $(x, y) \in R$, 则称 x 与 y 是 R -相关的, 记为 xRy 。

集合 $\{x \mid \exists y \in Y, \text{使得 } xRy\} (\subset X)$ 称为关系 R 的定义域。

集合 $\{y \mid \exists x \in A, \text{使得 } xRy\} (\subset Y)$ 称为关系 R 的值域。

若 $A \subset X$, 集合 $\{y \mid \exists x \in A, \text{使得 } xRy\} (\subset Y)$ 称为集合 A 对于关系 R 而言的像集, 简称集合 A 的像, 记为 $R(A)$ 。

设 R 为从集合 X 到集合 Y 中的一个关系 (即 $R \subset X \times Y$), 则集合 $\{(y, x) \mid xRy\}$ 为 $Y \times X$ 的子集, 即为从 Y 到 X 的一个关系, 称为 R 的逆, 记为 R^{-1} 。对于 $B \subset Y, R^{-1}(B) \subset X$ 称为集合 B 的 R^{-1} 的像, 或 B (关于关系 R) 的原像, 或 B 的 R -原像。

1.4.2 映射

设 F 为从集合 X 到集合 Y 的关系, 若对于每一个 $x \in X$, 有唯一 $y \in Y$ 使得 xFy , 则称 F 为从 X 到 Y 的映射, 记为 $F: X \rightarrow Y$ 。

对于每一个 $x \in X$, 使得 xFy 的那个唯一 $y \in Y$ 称为点 x 对于映射 F 而言的像或值, 记为 $F(x)$ 。对于每一个 $y \in Y$, 若 $x \in X$ 使得 xFy (即 y 是 x 的像), 则称 x 是 y 的原像, 并且 y 的原像集记为 $F^{-1}(y)$ 。

若 $F(X) = Y$, 则称 F 为从 X 到 Y 上的映射, 或简称 F 为满射。

设 $F: X \rightarrow Y$ 为一个满射, 若 X 中不同点的像是 Y 中不同的点, 则称 F 为一一映射。

1.4.3 特征函数

下面用特征函数的方法来介绍集合。

设 A 为全集 X 中的一个子集, $A \subseteq X, x \in X$, 由

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (1.4)$$

定义的函数 $\mu_A: X \rightarrow \{0, 1\}$ 称为集合 A 的特征函数。集合 A 的特征函数在元素 x 处的值 $\mu_A(x)$ 称为 x 对于 A 的隶属度。当 $\mu_A(x) = 1$ 时, 表示 x 绝对隶属于 A ; 当 $\mu_A(x) = 0$ 时, 表示 x 不隶属于 A 。

1.4.4 限制与投射

设 $A \subset X, f: X \rightarrow Y, g: A \rightarrow Y$, 如果对于任意 $x \in A$, 都有 $f(x) = g(x)$, 则称 g 为 f 在集合 A 上的限制, 记作 $g = f|_A$, 又称 f 为 g 在 X 上的扩张。特别地, 若 $A = \{a\}$, 则称 g 为 f 在点 a 的限制, 简记为 $g = f|_a$ 。

设 X_1, X_2, \cdots, X_n 为集合, 从笛卡儿积 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 到第 i 个坐标集 X_i 中的映射

$$p_i: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \rightarrow X_i \quad (1.5)$$

定义为: 对任意 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, $p_i(x) = x_i$, 映射 p_i 称为第 i 个投影或向第 i 个坐标集的投影。

特别地, 从笛卡儿积 $X \times Y \times Z$ 到坐标集 X (或 Y, Z) 的投影分别记为 p_X (或 p_Y, p_Z)。

1.5 度量空间

在微积分中, 函数的连续性是一个非常重要的性质, 它直接决定函数是否可积或可微。我们将函数的连续性进行抽象和概括, 以刻画其最本质的特征, 用于定义点集上的连续现象。函数连续性的定义其实只涉及实数之间的距离, 与实数的其他性质无关。

1.5.1 度量与度量空间的定义

设 X 为一非空集合, $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 为一个映射, 若对于任意 $x, y, z \in X$, 有

(1) $\rho(x, y) \geq 0$, 并且 $\rho(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$;

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

则称 ρ 为 X 的一种度量。如果 $X \neq \emptyset$, 就称 (X, ρ) 为度量空间。对任意 $x, y \in X$, 实数 $\rho(x, y)$ 称为从点 x 到点 y 的距离。

1.5.2 邻域与开集

设 (X, ρ) 为度量空间, $x \in X$ 。对于任意实数 $\epsilon > 0$, 集合

$$\{y \in X: \rho(x, y) < \epsilon\} \quad (1.6)$$

称为以 x 为中心以 ϵ 为半径的球形邻域, 简称为 x 的球形邻域或 ϵ -邻域, 记作 $B(x, \epsilon)$ 。

设 A 是度量空间的子集, 若 A 的每一点都有一个球形邻域包含于 A , 则称 A 为 X 的开集。

设 x 是度量空间中的一点, U 为 X 的子集, 若存在 X 的开集 V 满足: $x \in V \subset U$, 则称 U 为点 x 的邻域。

1.5.3 连续映射

设 X, Y 是度量空间, $f: X \rightarrow Y$ 为一映射。 x 为 X 中的一点, 若对于 $f(x)$ 的任意球形邻域 $B(f(x), \epsilon)$, 存在 x 的球形邻域 $B(x, \delta)$ 使得

$$f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon) \quad (1.7)$$

则称映射 f 在点 x 处连续。

如果映射 f 在 X 的每一点处都连续, 则称映射 f 为连续映射。

定理 1.1 若 X, Y 为度量空间, $f: X \rightarrow Y$ 为一个映射, 则下述说法等价:

(1) f 为连续映射;

(2) Y 的每一个开集的原像都是 X 中的开集。

证明: 先证(1) \rightarrow (2)。设(1)成立。令集合 V 是 Y 中的一个开集, $U = f^{-1}(V)$ 。对于每一个 $x \in U$, $f(x) \in V$ 。由于 V 是一个开集, 所以 V 是 $f(x)$ 的一个邻域, 由于 f 在每一点

连续,所以 U 为 x 的邻域。于是,有包含 x 的开集 $U_x \subset U$,从而

$$\bigcup_{x \in U} U_x \subset U \quad (1.8)$$

另一方面,有 $\{x\} \subset U_x$,故

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} U_x \quad (1.9)$$

所以

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x \quad (1.10)$$

由于任意 U_x 均为开集,所以 U 为开集。

再证(2)→(1)。设(2)成立,不妨设对于任意 $x \in X$, E 为 $f(x)$ 的一个邻域,即存在包含 $f(x)$ 的一个开集 $V \subset E$,从而 $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(E)$,由于 $f^{-1}(V)$ 为开集,所以 $f^{-1}(E)$ 为 x 邻域,因此, f 在点 x 处连续。故 f 为一个连续映射。

定理得证。

1.6 拓扑空间

在度量空间中,我们可以使用距离来定义开集和邻域,从而给出连续映射的定义。而在普通点集上并无度量的概念,从而也无法形成距离。那么,如何定义普通点集上的连续呢?我们留意到,在度量空间中函数连续的定义里其实并未直接使用距离的概念,而是使用了邻域的概念,邻域基于开集而被定义。如果我们能够不依靠度量或距离的概念直接定义开集,就可以定义一般点集上的连续性了。因此,如何定义开集是拓扑学的首要关键问题。

我们知道,微积分中的开区间就是一种开集。有限个开区间取交集仍然是开区间,无限个开区间取并集仍然是开区间,显然空集和全集也是开区间。

我们把开区间的这三条性质抽象出来作为开集的本质特征,从而定义一般点集上的开集。点集上所有的开集组成的集族,我们则称之为拓扑。我们可以把拓扑理解为开集的集合。我们通过构造拓扑空间来定义开集和邻域,从而完成了对连续性的刻画。

1.6.1 拓扑及拓扑空间

设 X 为非空集合, \mathfrak{R} 为 X 的子集族,若满足下列条件:

- (1) $X, \emptyset \in \mathfrak{R}$;
- (2) 对任意 $A, B \in \mathfrak{R}$, 有 $A \cap B \in \mathfrak{R}$;
- (3) 对任意 $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}$, 有 $\bigcup_{A \in \mathfrak{R}_1} A \in \mathfrak{R}$;

则称 \mathfrak{R} 为集合 X 的拓扑,偶对 (X, \mathfrak{R}) 为拓扑空间。 \mathfrak{R} 中的任意一个元素均称为拓扑空间 (X, \mathfrak{R}) 的开集。

有了开集的概念,我们很容易定义邻域、闭集、边界等相关概念,从而刻画连续映射的性质。

1.6.2 邻域

设 (X, \mathfrak{R}) 为拓扑空间, $x \in X$ 。 U 为 X 的子集。如果存在一个包含 x 的开集 V 包含于