

第 3 章

点、直线、平面的投影

3.1 点的投影

一切形体的构成都离不开点、直线和面(平面、曲面)等基本几何元素。例如,图 3-1 所示的房屋建筑形体是由 7 个侧面所围成的,各个侧面相交形成 15 条侧棱线,各侧棱线又相交于 A、B、C、D、…、J 共 10 个顶点。从分析的观点看,只要把这些顶点的投影画出来,再用直线将各点的投影一一连接起来,便可以作出一个形体的投影。掌握点的投影规律是研究线、面、体投影的基础。

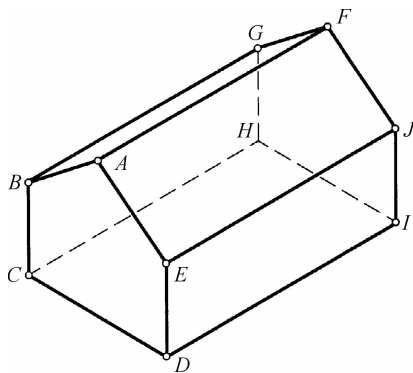


图 3-1 房屋形体

3.1.1 点的三面投影及投影规律

1. 点的三面投影

表示空间点 A 在三投影面体系中的投影,如图 3-2(a)所示,将点 A 分别向 3 个投影面投射,就是过点 A 分别作垂直于 3 个投影面的投射射线,则其相应的垂足 a 、 a' 、 a'' 就是点 A 的三面投影。点 A 在水平投影面上的投影用 a 表示,称为点 A 的水平投影;在正投影面上的投影用 a' 表示,称为点 A 的正面投影;在侧面投影面上的投影用 a'' 表示,称为点 A 的侧面投影。图 3-2(b)所示为点 A 的三面投影图。

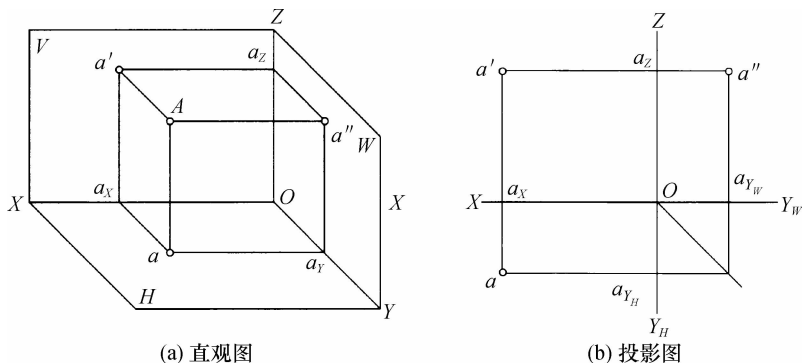


图 3-2 点的投影规律



2. 三面投影体系中点的投影规律

从图 3-2(a)可知,平面 $Aa'a_xa$ 是一个矩形,以 $a'a_x$ 与 Aa 平行并且相等,反映出点 A 到 H 面的距离; aa_x 与 Aa' 平行并且相等,反映出点 A 到 V 面的距离; aa_y 与 Aa'' 平行并且相等,反映出点 A 到 W 面的距离。

可见三面投影体系中点的投影规律是:

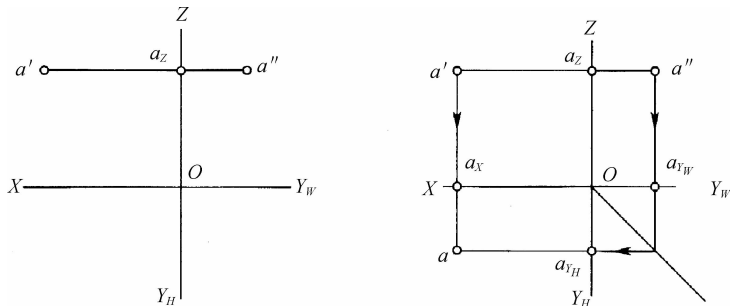
- (1) 点的 V 面投影和 H 面投影的连线垂直于 OX 轴,即 $a'a_x \perp OX$ 。
 - (2) 点的 V 面投影和 W 面投影的连线垂直于 OZ 轴,即 $a'a'' \perp OZ$ 。
 - (3) 点的 H 面投影至 OX 轴的距离等于其 W 面投影至 OZ 轴的距离,即 $aa_x = a''a_z$ 。
- 应用上述投影规律,可根据一点的任意两个已知投影,求得它的第 3 个投影。

【例 3-1】 如图 3-3(a)所示。已知点 A 的正面投影 a' 和侧面投影 a'' ,求作水平投影 a 。

分析: 根据点的投影规律,即可作出点的三面投影。

作图步骤如下:

- (1) 过点 a' 。按箭头方向,作 $a'a_x$ 垂直于 OX 轴,并适当延长。
- (2) 过点 a'' 。按箭头方向,作线垂直于 OY_w 轴并延长,交于转折线后再向左垂直交于 OY_H 轴并适当延长,与 $a'a_x$ 延长线交于点 a ,点 a 即为所求,如图 3-3(b)所示。



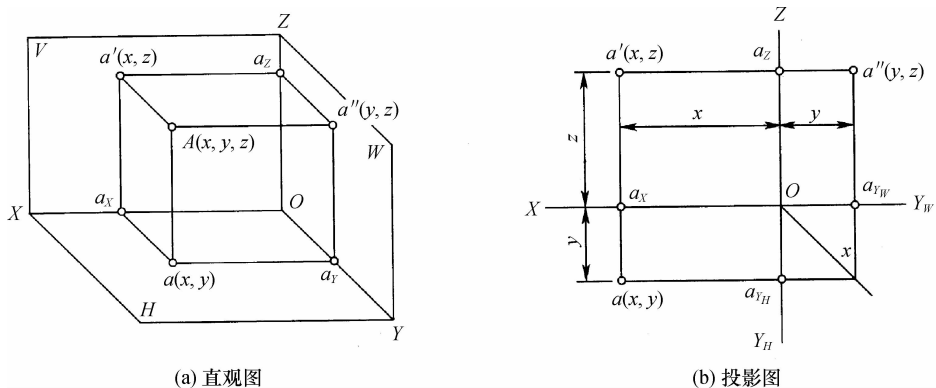
(a) 已知条件

(b) 作图步骤

图 3-3 已知点的两面投影并求第三投影

3.1.2 点的投影与直角坐标

如图 3-4 所示,空间一点的位置可用其直角坐标表示为 $A(x, y, z)$,点 A 三投影的坐标分别为 $a(x, y)$, $a'(x, z)$, $a''(y, z)$ 。



(a) 直观图

(b) 投影图

图 3-4 点的投影与直角坐标的关系



点 A 的直角坐标与点 A 的投影及点 A 到投影面的距离有如下关系。

(1) 点 A 的 X 坐标(x)=点 A 到 W 面的距离,即 $Aa''=a'a_z=aa_{Y_H}=a_xO$ 。

(2) 点 A 的 Y 坐标(y)=点 A 到 V 面的距离,即 $Aa'=a''a_z=aa_x=a_{Y_O}$ 。

(3) 点 A 的 Z 坐标(z)=点 A 到 H 面的距离,即 $Aa=a''a_{Y_H}=a'a_x=a_zO$ 。

由于空间点的任一投影都包含了两个坐标,所以一点的任意两个投影的坐标值,就包含了确定该点空间位置的 3 个坐标,即确定了点的空间位置。可见,若已知空间点的坐标,则可求其三面投影,反之亦可。

【例 3-2】 如图 3-5 所示,已知空间点 $A(15,12,20)$,求作 A 点的三面投影图。

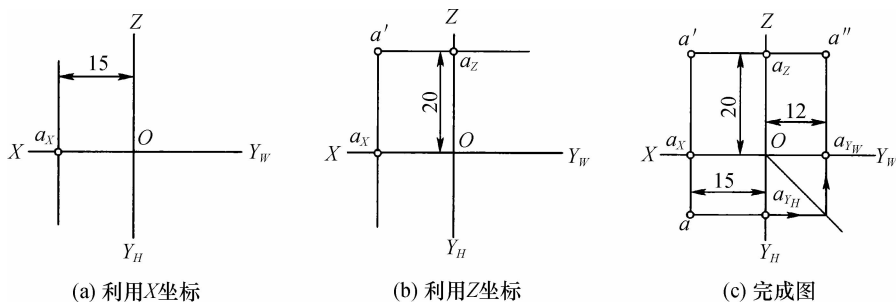


图 3-5 点 A 的投影

根据点的投影和点的坐标之间的关系,即可作出点的三面投影,其作图步骤如下:

(1) 先画出投影轴(即坐标轴),在 OX 轴上从 O 点开始向左量取 X 坐标 15mm,定出 a_x ,再过 a_x 作 OX 轴的垂线,如图 3-5(a)所示。

(2) 在 OZ 轴上从 O 点开始向上量取 Z 坐标 20mm,定出 a_z ,再过点 a_z 作 OZ 轴的垂线,两条垂线的交点即为 a' ,如图 3-5(b)所示。

(3) 在 $a'a_x$ 的延长线上,从 a_x 向下量取 Y 坐标 12mm 得 a ;在 $a'a_z$ 的延长线上,从 a_z 向右量取 Y 坐标 12mm 得 a'' 。

或者由投影 a' 、 a 借助 45° 转折线的作图方法(“宽相等”的对应关系)也可作出投影点 a'' ,则 a' 、 a 、 a'' 即为 A 点的三面投影,如图 3-5(c)所示。

3.1.3 两点的相对位置及重影点

1. 两点的相对位置

两点的相对位置是指空间两个点的左右、前后、上下 3 个方向的相对位置。可根据它们的坐标关系来确定。 X 坐标大者在左,小者在右; Y 坐标大者在前,小者在后; Z 坐标大者在上,小者在下。两点在投影中反映出:正面投影为上下、左右关系;水平投影为左右、前后关系;侧面投影为上下、前后关系。

【例 3-3】 已知空间点 $A(15,15,15)$,点 B 在点 A 的左方 5mm、后方 6mm、上方 3mm,求作空间点 B 的三面投影图。

作图步骤如下:

(1) 根据点 A 的三个坐标可作出点 A 的三面投影 a 、 a' 、 a'' ,如图 3-6(a)所示。

(2) 在 OX 轴上从 O 点开始向左量取 X 坐标[$15+5=20(\text{mm})$],得一点 b_x ,过该点

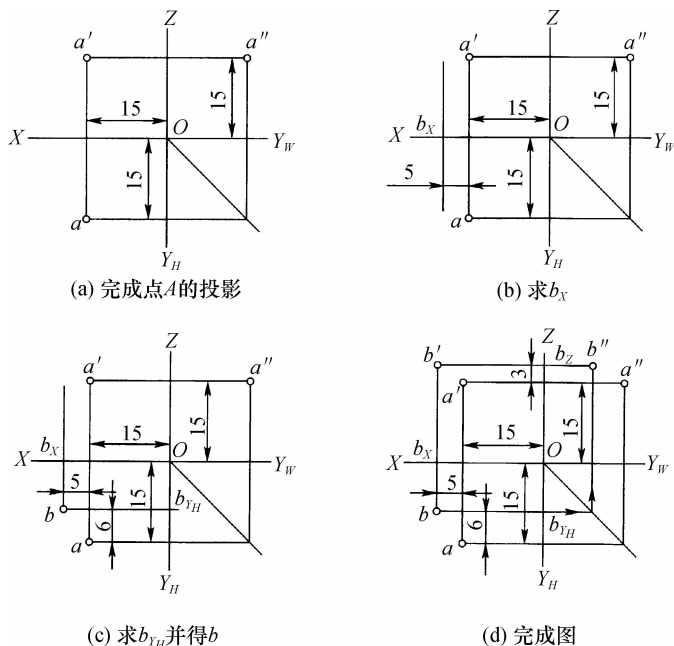


图 3-6 空间两点的相对位置

作 OX 轴的垂线,如图 3-6(b)所示。

(3) 在 OY_H 轴上从 O 点开始向后量取 Y_H 坐标[$15-6=9(\text{mm})$],得一点 b_{y_H} ,过该点作 OY_H 轴的垂线,与 OX 轴的垂线相交,交点为空间点 B 的 H 面投影 b ,如图 3-6(c)所示。

(4) 在 OZ 轴上从 O 点开始向上量取 Z 坐标[$15+3=18(\text{mm})$],得一点 b_z ,过该点作 OZ 轴的垂线,与 OX 轴的垂线相交,交点为空间点 B 的 V 面投影 b' ,再由 b 和 b' 作出 b'' ,完成空间点 B 的三面投影,如图 3-6(d)所示。

2. 重影点及其可见性

如图 3-7(a)所示,如果空间点 A 和点 B 的 X 、 Y 坐标相同,只是点 A 的 Z 坐标大于点 B 的 Z 坐标,则 A 、 B 两点的 H 面投影 a 和 b 将重合在一起, V 面投影 a' 在 b' 之上,且在同一条 OX 轴的垂线上, W 面投影 a'' 在 b'' 之上,且在同一条 OY_W 轴的垂线上。这种投影在某一投影面上重合的两个点,称为该投影面的重影点。重影点在标注时,将不可见的点的投影加上括号,如图 3-7(b)所示。

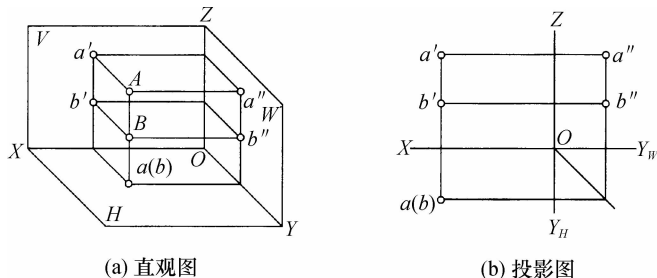


图 3-7 重影点的投影

3.2 直线的投影

两点确定一条直线。绘制直线的投影,可先绘制直线段两端点的投影,然后用粗实线将各不相同面投影的两端点投影点连接为直线即可。

3.2.1 各种位置直线的投影及其投影特性

直线按其相对于投影面的相对位置不同,可分为一般位置直线、投影面平行线和投影面垂直线。

1. 一般位置直线

一般位置直线是倾斜于3个投影面的直线,对3个投影面都有倾斜角,分别用 α (与水平投影面倾角)、 β (与正面投影面倾角)、 γ (与侧面投影面倾角)表示。一般位置直线的投影如图3-8所示。

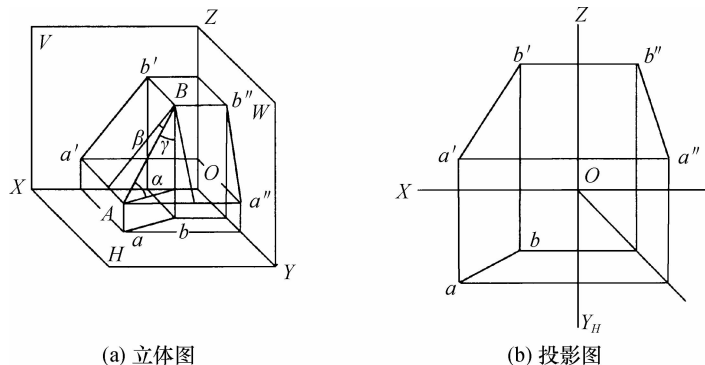


图 3-8 一般位置直线的投影

一般位置直线的投影特性如下。

- (1) 三面投影均短于实长。
- (2) 三面投影均倾斜于投影轴,其与投影轴的夹角不等于直线对投影面的倾角。

2. 投影面平行线

投影面平行线是指平行于某一投影面,同时倾斜于其余两个投影面的直线。投影面平行线又可分为水平线(平行于水平投影面,同时倾斜于其余两个投影面)、正平线(平行于正面投影面,同时倾斜于其余两个投影面)和侧平线(平行于侧面投影面,同时倾斜于其余两个投影面)。

投影面平行线的投影特性如表3-1所示。

3. 投影面垂直线

投影面垂直线是垂直于某一投影面,同时平行于其他投影面的直线。投影面垂直线可分为铅垂线(垂直于水平投影面,同时平行于其他投影面)、正垂线(垂直于正面投影面,同时平行于其他投影面)、侧垂线(垂直于侧面投影面,同时平行于其他投影面)。