中等职业学校系列规划教材

数　　学
（下册）（第二版）

刘丹华　主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

《数学(下册)(第二版)》是为中等职业教育数学课程编写的教材的下册部分，对应有《数学学习手册(下册)(第二版)》(ISBN:978-7-302-47300-8)。本书共6章，第6章介绍了角的概念与度量制度、三角函数的概念与变换公式、三角函数的图像与性质、解三角的知识；第7章介绍了向量的有关概念与基本运算、向量的坐标与运算、向量平行与垂直的条件、向量的平移公式；第8章介绍了直线的有关概念、直线方程的形式与建立、两条直线的位置关系与相关公式；第9章介绍了曲线与方程的概念，圆、椭圆、双曲线、抛物线的概念、图像与几何性质；第10章介绍了计数原理、随机事件与概率、数理统计的基本概念、抽样方法及用样本估计总体的方法；第11章介绍了平面图形的基本性质与直观图的画法、空间两条直线的位置关系的判断与性质、空间直线与平面的性质与判定、空间两个平面的位置关系的判定与性质、多面体与球体的概念与性质及其面积公式与体积公式。

本书内容结构设置合理，既遵循“教学大纲”与“考试大纲”要求，又符合中职生的学习规律与教学规律，并注重学生学科知识的学习与学习能力的培养。全书概念清晰严谨，定理与性质简洁明了，知识科学实用，文字简洁流畅；精选的例题与习题，易于学生巩固知识与解决问题能力的提升。本书既渗透了教法指点，又融入了学法指导，是一册能满足专业学习需要和升学考试要求的实用教材。

本书教学课件及相关资源可通过网站 http://www.tupwk.com.cn 免费下载。

图书在版编目(CIP)数据

数学. 下册 / 刘丹华　主编. —2版. —北京：清华大学出版社，2017
(中等职业学校系列规划教材)
ISBN 978-7-302-47295-7

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①刘…　Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教材　Ⅳ. ①G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第125981号

责任编辑：王　定　程　琪
封面设计：牛艳敏
版式设计：思创景点
责任校对：牛艳敏
责任印制：

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62781730
印 装 者：
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：14　　**字　　数**：287千字
版　　次：2015年8月第1版　2017年9月第2版　　**印　　次**：2017年9月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：35.00元

产品编号：

本书编委会

主　编：刘丹华

副主编：尚文婷　杨贫智　张玉婷　张　正

编　委：刘伟峰　田淑文　黄美德　王　凌

杨永军　罗　樟　樊青冬　杨贫智

操柏松　杨纯琦　王　伟　葛　静

于德林　张晓风　卢友波

前　　言

本套教材是中等职业教育课程改革规划教材，是根据教育部颁布的《中等职业学校教学大纲》(以下简称“教学大纲”)的精神，以及多年来广东省中职学校的学科教学实践经验与学生的实际情况编写的。本套教材坚持“教学大纲”及《2017年广东省高等职业院校招收中等职业学校毕业生数学学科考试大纲》(以下简称“考试大纲”)对“课程教学目标”的定位要求，兼顾了专业教学与升学教学的需求，相应完成了《数学(第二版)》(上、下册)。每册教材配备了学习手册、电子教案及部分动画教学素材。教材内容的选择严格根据“教学大纲”与“考试大纲”规定的“教学内容的要求”“认知的要求”及“技能与能力的要求”。

本套教材包括以下书目：

《数学(上册)(第二版)》	ISBN：978-7-302-47301-5	定价：35.00元
《数学学习手册(上册)(第二版)》	ISBN：978-7-302-47302-2	定价：32.00元
《数学(下册)(第二版)》	ISBN：978-7-302-47295-7	定价：35.00元
《数学学习手册(下册)(第二版)》	ISBN：978-7-302-47300-8	定价：32.00元

本套教材主要体现了以下编写特色：

(1) 体现了基础性。在确保科学性的基础上，大幅度调整了教材难度，注重新旧知识的衔接，极大地减轻了学生的学习负担，增强了学生学习数学的自信心。

(2) 体现了分层教学的思想。考虑到学生的差异性与不同的教学目标要求，对知识应用的例题及跟踪练习的难度进行阶梯性设置，其中，标示“●”的例题及跟踪练习是为满足学有余力或有升学要求的学生而设置的。

(3) 突出了教与学实践过程的有机结合。根据中职生的年龄特征和心理特点，以及课堂教学的基本理论，本套教材通过旧知识链接、小组互动、动动脑以及说明、评注贯穿每小节的内容，并重视教学方法与学生的学习方法的指导，这样不仅引导教师合理地组织安排教学，而且帮助学生采用正确的学习方法学习数学。

(4) 突出了针对性。人性化结构模式，不仅可节省任课教师的教学设计时间，以便对中等职业教育数学学习困难生加强辅导力度，而且极大程度地方便了中职生课前预习、课后巩固复习和及时检查反馈。

(5) 突出了职业性。选择了与专业学习、日常生活、生产岗位及经济领域相关的素材，引入新知识学习，并体验利用数学知识解决实际问题。

(6) 突出了实用性。本套教材的配套学习手册不仅兼顾了普通配套练习的所有功能，而

且每章节配有学法指导，指导学生每学一节内容要及时梳理知识与总结解题方法，另增设课堂练习的配置，让学生能学会恰当的学习方式，并牢固掌握新知识及知识应用的方法。此外，还为本套教材编制了可修改的教学课件，不仅有新授课教学课件，而且有习题课与复习课的教学课件，每一小节教学课件还配有课堂练习的演讲答案，相关资源可通过 www.tupwk.com.cn 免费下载。

本套教材编写的依据为：不仅反复研读“教学大纲”与“考试大纲”，而且调研并分析近年来中等职业教育数学教学的实际情况，了解教学主体与客体喜爱哪种类型的教材，使本套教材不仅方便老师教学，也方便学生自学，以谋求教材结构的最优化，既减轻了学生的学习负担和老师的教学负担，又实现了课堂学科教学效率的最大化。

根据上述编写思路，本套教材每章节分两部分，一部分是教材主体内容，另一部分是教法与学法指导。主体内容由观察与思考、新知识学习、新知识应用组成，每一节还配有本节知识的综合习题，每一章配有本章知识的复习参考题及阅读材料。每小节新知识学习配有说明，以强化新知识的理解；每小节新知识应用配有评注，以揭示解题方法与思想，另外配备的跟踪练习是让学生模仿并理解每种题型的解题方法。无论是教材章节内容还是学习手册内容均能紧扣“数学大纲”和“考试大纲”要求，不仅有助于学生课前预习、课中学习、课后复习，而且有利于学生掌握扎实的基础知识，把握学习新知识的重点与难点，提高数学学科的学习能力与技能。此外还注重学科学习的实效性，收录了适量的应用型和能力型练习题，配有解题思路与方法的指导，使教师和学生在整个学习过程中能够做到“讲练结合，学练结合”，并能及时强化学习效果，提高应用数学知识解决问题的能力，激发学生对数学学科的学习兴趣。

本书为《数学(下册)(第二版)》，包含三角函数、平面向量、直线、二次曲线、概率与数理统计初步、立体几何 6 个章节。完成本书内容需要 94 学时，学时分配如下表所示。

学时分配 表章节	第 6 章 三角函数	第 7 章 平面向量	第 8 章 直线	第 9 章 二次曲线	第 10 章　概率与 数理统计初步	第 11 章 立体几何
学时数	24	10	10	18	12	14
机动学时数	6					

本书由刘丹华担任主编。清华大学出版社对本套教材的编写与出版提供了很大的帮助，在此深表感谢！

由于编者的学术水平有限，书中难免存在不足之处，恳请广大读者和专家提出宝贵的意见和建议，反馈邮箱 383270415@qq.com，电话：01062794504。

编　者

2017 年 5 月

目　　录

第 6 章　三 角 函 数

6.1　角的概念推广及其度量

6.1.1　角的概念推广

旧知识链接：

阅读数学上册中第 11～12 页的并集运算.

观察与思考

观察： 初中学过角，角的度数不超过一个周角，但在现实生活中角的绝对量常常超过了 360°，如图 6 - 1 所示.

图 6 - 1

思考： 如何表示它们旋转的角度呢？

现在从旋转方向和旋转数量来推广角的概念.

新知识学习

1. 角的概念

（1）角的定义

角可以看作一条射线绕着它的端点旋转而成的图形. 如图 6 - 2 所示，比如$\angle AOB$ 的顶点为 O，始边为 OA，终边为 OB.

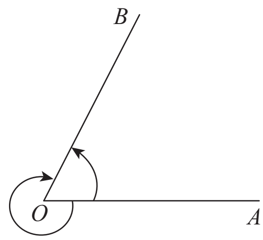

图 6－2

（2）角的分类

在平面内，一条射线绕着它的端点旋转有两个相反的方向：顺时针方向和逆时针方向，如图 6－2 所示．按逆时针方向旋转而成的角叫做**正角**，当射线没有旋转时，把它看成一个角，叫做**零角**．按顺时针方向旋转而成的角叫做**负角**．

在画图时，常用带箭头的弧表示旋转的方向和旋转的绝对量．旋转生成的角，又常称为**转角**．例如图 6－3(1)中$\angle AOB$是正角，图 6－3(2)中$\angle COD$是零角，图 6－3(3)中$\angle EOF$是负角．

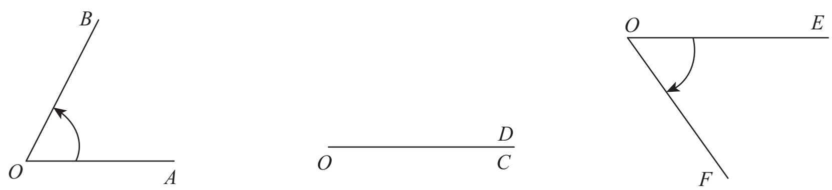

图 6－3

比如：若一条射线绕它的端点从初始位置按逆时针方向旋转一周形成的角是 360°，那么按顺时针方向旋转半周形成的角是－180°；按逆时针方向旋转$\frac{1}{4}$周形成的角是 90°；而先按逆时针方向旋转$\frac{1}{4}$周，接着又按顺时针方向旋转$\frac{1}{8}$周，这两次旋转的总效果形成的角是 45°(如图 6－4 所示)．

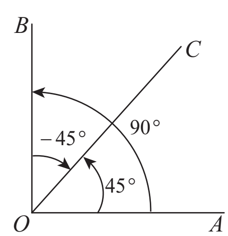

图 6－4

小组互动：

探讨并理解角的概念与范围.

说明：① 各角和的旋转量等于各角旋转量的和．一般地，$\alpha-\beta$可直接看成α与$-\beta$的代数和．

② 由角的概念可知，可以有任意大小的正角、负角或零角．

2. 终边相同的角

（1）观察与思考

如图 6-5 所示，$\angle AOB$ 表示以 OA 为始边，以 OB 为终边的角. 显然，如果不指出旋转量的大小，它可以表示许多旋转量不同的角，但这些角彼此相差 360°的整数倍. 设 $\angle AOB=\alpha$，则

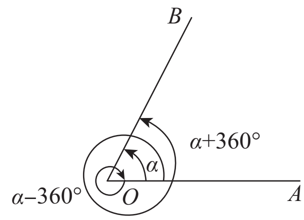

图 6-5

$\alpha+360°$，　　$\alpha-360°$，

$\alpha+2\cdot360°$，　　$\alpha-2\cdot360°$，

$\alpha+3\cdot360°$，　　$\alpha-3\cdot360°$，

…

它们的始边和终边都分别相同.

（2）终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角构成的集合为

$$\{\beta\mid\beta=k\cdot360°+\alpha,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

比如：与 60°终边相同的角的集合为 $\{\beta\mid\beta=k\cdot360°+60°,\ k\in\mathbf{Z}\}$，与 $-45°$终边相同的角的集合为 $\{\beta\mid\beta=k\cdot360°-45°,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

小组互动：

探讨并理解终边相同的角的概念及形式.

（3）象限角

在直角坐标系中讨论角，通常使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边落在第几象限，就叫做**第几象限的角**. 角的终边落在坐标轴上的角，称为**界限角**. 如图 6-6 所示，

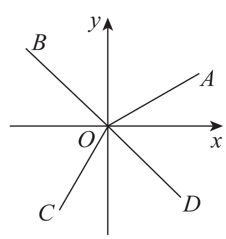

图 6-6

$\angle xOA$ 是第一象限的角，$\angle xOB$ 是第二象限的角，

$\angle xOC$ 是第三象限的角，$\angle xOD$ 是第四象限的角，

$\angle xOy$ 不属于任何象限.

小组互动：

探讨并理解象限角与界限角的概念.

说明： 在 0°～360°范围内，当 $0°<\alpha<90°$时，α 是第一象限的角；当 $90°<\alpha<180°$时，α 是第二象限的角；当 $180°<\alpha<270°$时，α 是第三象限的角；当 $270°<\alpha<360°$时，α 是第四象限的角.

新知识应用

例题 1　写出与下列各角终边相同的角的集合，并指出它们是哪个象限的角：

（1）125°；　　　　（2）$-50°$.

解：（1）与 125°终边相同的角的集合是

$$A=\{x\mid x=k\cdot360°+125°,\ k\in\mathbf{Z}\},$$

因为 $125°$是第二象限的角，所以集合 A 中的角都是第二象限的角.

（2）与 $-50°$终边相同的角的集合是

$$B=\{x \mid x=k\cdot 360°-50°,\ k\in \mathbf{Z}\}.$$

因为 $-50°$是第四象限的角，所以集合 B 中的角都是第四象限的角.

动动脑：

归纳写出与任意角的终边相同的角的集合的方法.

跟踪练习 1　写出与下列各角终边相同的角的集合，并指出它们是哪个象限的角：

（1）$85°$；　　　　（2）$289°$.

例题 2　在 $0°\sim 360°$之间，找出与下列各角终边相同的角，并判定分别是哪个象限的角：

（1）$855°$；　　　　（2）$-650°$.

解：（1）因为 $855°=2\times 360°+135°$，

所以 $855°$的角与 $135°$的角的终边相同，它是第二象限的角.

（2）因为 $-650°=-2\times 360°+70°$，

所以 $-650°$的角与 $70°$的角的终边相同，它是第一象限的角.

动动脑：

归纳判断任意角所在象限的常规方法与技巧.

跟踪练习 2　在 $0°\sim 360°$之间，找出与下列各角终边相同的角，并判定分别是哪个象限的角：

（1）$768°$；　　　　（2）$-490°$.

例题 3　写出终边在 x 轴上的角的集合.

解：终边在 x 轴的正半轴上的一个角为 $0°$，终边在 x 轴负半轴上的一个角为 $180°$（如图 6－7 所示），因此，终边在 x 轴的正半轴、负半轴上的角的集合分别是

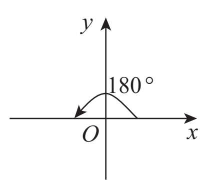

图 6－7

$P=\{x \mid x=k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}$；

$Q=\{x \mid x=k\cdot 360°+180°,\ k\in \mathbf{Z}\}$，

所以终边在 x 轴上的角的集合为

$$\begin{aligned}P\cup Q&=\{x \mid x=k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}\cup\{x \mid x=k\cdot 360°+180°,\ k\in \mathbf{Z}\}\\&=\{x \mid x=k\cdot 180°,\ k\in \mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

●**跟踪练习 3** 写出终边在 y 轴上的角的集合.

动动脑：

归纳写出终边在坐标轴上的角的集合的常规方法与技巧.

●**例题 4** 写出第二象限的角的集合.

解： 在 $0°\sim360°$之间，第二象限的角取值范围是 $90°<\alpha<180°$，所以第二象限的角的集合是

$$\{x \mid k\cdot 360°+90°<x<k\cdot 360°+180°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

●**跟踪练习 4** 写出第一象限的角的集合.

动动脑：

归纳写出各象限角的集合的常规方法与技巧.

6.1.2 弧度制

观察与思考

旧知识链接：

复习圆的周长公式.

初中我们学习过用“度”为单位来度量角的大小，但度的换算单位较复杂，它采用的是六十进制，实际问题中常采用另一种度量单位——弧度.

新知识学习

1. 角度制

如图 6－8 所示，把一圆周 360 等分，则其中 1 份所对的圆心角是 1 度角. 这种用度做单位来度量角的制度叫做**角度制**.

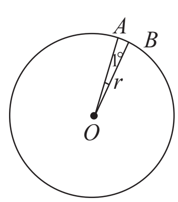

图 6－8

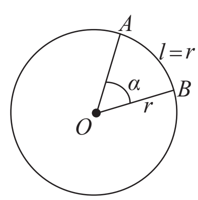

图 6－9

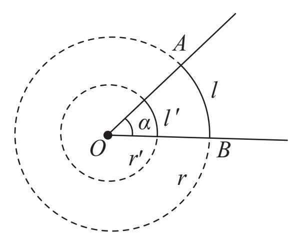

图 6－10

2. 弧度制

(1) 1 弧度的角

小组互动：

探讨能否将 1 角写成 $1°$ 角，或将 $1°$ 角写成 1 角?

把等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 **1 弧度的角**，1 弧度记作 1rad. 用“弧度”做单位度量角的制度叫做**弧度制**.

如图 6－9 所示，$\overset{\frown}{AB}$的长等于半径 r，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角就是 1 弧度的角，记为 1rad.

说明：① 由于角有正负，规定：正角对应正的弧度数，负角对应负的弧度数，零角对应零弧度数；

② 观察图 6－10，两个大小不同的同心圆，虽然同一圆心角所对弧长与半径都不相等，但它们的比值相同.

（2）公式

由 1 弧度的角定义可知：

$$\boxed{|\alpha|=\frac{l}{r}\Rightarrow l=|\alpha|r\Rightarrow S_{扇形}=\frac{1}{2}|\alpha|r^2.}$$

其中 α 为已知角的弧度数，l 为圆心角 α 所对的弧长，r 为圆的半径.

3. 角度与弧度互换

由弧度数公式，得

$$周角=\frac{l}{r}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi\ \text{rad}=360°,$$

于是可以得到角度制与弧度制的换算关系：

$$\pi\ \text{rad}=180°;$$

$$1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57°18'=57.30°;$$

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}\approx 0.01745\text{rad}.$$

说明：所有与角 α 始边、终边分别相同的角构成的集合弧度表示形式为 $\{x\mid x=2k\pi+\alpha,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

一些常用特殊角的度数与弧度数的对应值，如表 6－1 所示.

表 6－1

小组互动：

探讨特殊角的弧度与角度互换形式的记忆方法.

周角	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

新知识应用

例题 5 把下列各角由角度化为弧度：240°，330°，－40°30′.

解：$240°=240\times\frac{\pi}{180}\ \text{rad}=\frac{4}{3}\pi\ \text{rad};$

$330°=330\times\frac{\pi}{180}\ \text{rad}=\frac{11}{6}\pi\ \text{rad};$

$-40°30'=-40.5°=-40.5\times\frac{\pi}{180}\ \text{rad}=-\frac{9}{40}\pi\ \text{rad}.$

跟踪练习 5　把下列各角由角度化为弧度：

$$210°，-120°，31.5°.$$

动动脑：

归纳将任意角的角度形式化为弧度形式的常规方法与技巧.

例题 6　把下列各角由弧度化成角度：

$$\frac{3}{5}\pi，-2，\frac{7}{3}\pi.$$

解： $\frac{3}{5}\pi=\frac{3}{5}\times180°=108°$；$-2=-2\times\frac{180°}{\pi}=-\frac{360°}{\pi}$；

$\frac{7}{3}\pi=\frac{7}{3}\times180°=420°$.

跟踪练习 6　把下列各角由弧度化成角度：

$$-\frac{5\pi}{6}，\frac{8\pi}{3}，3.$$

动动脑：

归纳将任意角的弧度形式化为角度形式的常规方法与技巧.

例题 7　把$-\frac{33}{5}\pi$化成$0\sim2\pi$之间的角加上$2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的形式，并判断该角所在的象限.

解： 因为$-\frac{33}{5}\pi=-8\pi+\frac{7}{5}\pi$，所以$-\frac{33}{5}\pi$与$\frac{7}{5}\pi$的终边相同.

又因为$\frac{7}{5}\pi$的终边在第三象限，所以$-\frac{33}{5}\pi$是第三象限的角.

跟踪练习 7　把$\frac{22}{3}\pi$化成$0\sim2\pi$之间的角加上$2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的形式，并判断该角所在的象限.

动动脑：

归纳判断任意弧度角所在象限的常规方法与技巧.

例题 8　如图 6 - 11 所示，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角是$150°$，半径为 12，求$\overset{\frown}{AB}$的长及扇形面积(精确到 0.1).

解： 因为$150°=\frac{5\pi}{6}$，所以

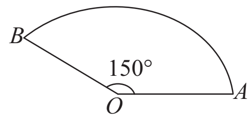

图 6－11

$$l=|\alpha|r=\frac{5\pi}{6}\times 12=10\pi\approx 10\times 3.142=31.42\approx 31.4,$$

$$S_{扇形}=\frac{1}{2}|\alpha|r^2=\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{6}\times 12^2=60\pi\approx 60\times 3.142\approx 188.5.$$

答：$\overset{\frown}{AB}$的长 31.4，所对应的扇形面积为 188.5.

动动脑：

归纳利用弧长公式与扇形面积公式解决数学问题的常规方法.

跟踪练习 8　求半径为 6cm，圆心角为 120°的扇形面积.

6.2　任意角的三角函数

6.2.1　任意角的三角函数

观察与思考

旧知识链接：

复习比值的特征及初中所学习的正弦、余弦与正切的概念.

观察： 如图 6－12 所示，已知任意角 α，以角 α 的顶点 O 为坐标原点，以角 α 的始边方向作为 x 轴的正方向，建立平面直角坐标系 xOy，并且使 $\angle xOy=90°$. 在角 α 的终边上，任取两点 $P(x, y)$，$P'(x', y')$，设 $|\overrightarrow{OP}|=r(r\neq0)$，$|\overrightarrow{OP'}|=r'(r'\neq0)$，则由平行线分线段成比例的性质可知：

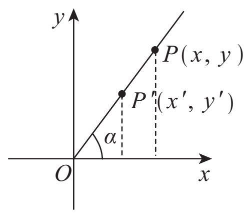

图 6－12

$$\frac{x}{r}=\frac{x'}{r'},\quad \frac{y}{r}=\frac{y'}{r'},\quad \frac{x}{y}=\frac{x'}{y'};$$

思考： 这三个比值 $\frac{x}{r}$，$\frac{y}{r}$，$\frac{y}{x}$ 不论点 P 在终边上的任何位置(除原点外)，它们都是定值，它们只依赖于 α 的大小，与点 P 在 α 终边上的位置无关，即当点 P 在 α 的终边上变化时，这三个比值始终等于定值.

新知识学习

1. 任意角的三角函数的概念

如图 6－13 所示，在直角坐标系 xOy 中，任意角的终边为 OA，在 OA 上任意取一点 P，如果点 P 的坐标为 (x, y)，P 点到原点 O 的距离 $|OP|$ 为 r $(r=\sqrt{x^2+y^2}>0)$，那么 x，y，r 这三个数可以定义以下三角函数：

正弦函数 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

余弦函数 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

正切函数 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

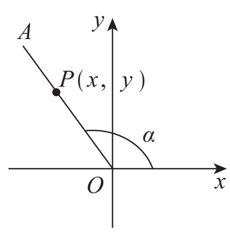

图 6－13

说明： 当 α 为锐角时，上述所定义的三角函数，与在直角三角形中所定义的三角函数是一致的.

2. 特殊角的三角函数值

由三角函数的定义可得如表 6－2 所示特殊角的三角函数值.

表 6－2

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0

小组互动：

探讨特殊角三角函数值的记忆方法与技巧.

新知识应用

例题 1 已知角 α 终边上一点 $P(-2, 2)$，求角 α 的三个三角函数值（图 6－14）.

解： 已知 $P(-2, 2)$，则

$$r=|OP|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}.$$

由三角函数的定义，得

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{2}{-2}=-1.$$

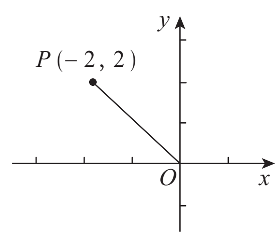

图 6－14

动动脑：

归纳由已知角的终边上一点求其三角函数值的常规方法.

跟踪练习 1 已知角 α 终边上一点 $A(5, -12)$，求角 α 的三个三角函数值.

例题 2 计算 $3\tan\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}+4\cos\pi-\tan 0$ 的值.

解： $3\tan\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}+4\cos\pi-\tan 0$

$=3\times1-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+4\times(-1)-0$

$=3-1-4$

$=-2.$

跟踪练习 2　计算$\sqrt{3}\sin60°+3\tan30°-\sqrt{2}\cos45°+\cos90°$的值.

动动脑：

归纳求特殊角的三角函数式值的常规方法.

例题 3　角 α 终边经过点 $A(x, 12)$，且 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，求 x 的值.

解： 已知点 $A(x, 12)$的横坐标是 $x(x<0)$，纵坐标是 $y=12$，所以 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+12^2}$. 由三角函数的定义及已知条件可知：

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+12^2}}=-\frac{5}{13}.$$

解得 $x=-5$ 或 $x=5$(舍去).

所以 x 的值为-5.

小组互动：

探讨为何 $x<0$?

跟踪练习 3　角 α 的终边经过点 $P(-3, y)$，且 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，求 y 的值.

动动脑：

归纳由三角函数值确定点的坐标的常规方法.

例题 4　已知 α 是第三象限的角，并且终边在直线 $y=2x$ 上，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

分析： 首先在位于第三象限的直线 $y=2x$ 上任取不是原点的一点，然后计算 r 的值，最后由任意角的三角函数的定义求出 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

解： 因为 α 是第三象限的角，且终边在直线 $y=2x$ 上，

所以可在角 α 的终边上取点 $P(-1, -2)$，则

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5},$$

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-2}{-1}=2.$$

动动脑：

归纳求角的终边在已知直线上的三角函数值的常规方法与技巧.

●**跟踪练习 4** 已知 α 是第四象限的角，且终边在直线 $y=-x$ 上，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值.

6.2.2 三角函数在各象限的符号

旧知识链接：

阅读教材下册中第 3 页终边相同的角的内容及确定任意角所在象限的内容.

观察与思考

观察： 正弦函数 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$；余弦函数 $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$；正切函数 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$.

思考： 分析三角函数在各象限的符号

当 α 是第一象限的角时，x ______ 0，y ______ 0，则

$\sin\alpha$ ______ 0，$\cos\alpha$ ______ 0，$\tan\alpha$ ______ 0；

当 α 是第二象限的角时，x ______ 0，y ______ 0，则

$\sin\alpha$ ______ 0，$\cos\alpha$ ______ 0，$\tan\alpha$ ______ 0；

当 α 是第三象限的角时，x ______ 0，y ______ 0，则

$\sin\alpha$ ______ 0，$\cos\alpha$ ______ 0，$\tan\alpha$ ______ 0；

当 α 是第四象限的角时，x ______ 0，y ______ 0，则

$\sin\alpha$ ______ 0，$\cos\alpha$ ______ 0，$\tan\alpha$ ______ 0.

新知识学习

小组互动：

探讨任意角的三角函数在各象限符号的记忆方法.

由三角函数的定义可得，三角函数在各象限的符号如图 6－15 所示.

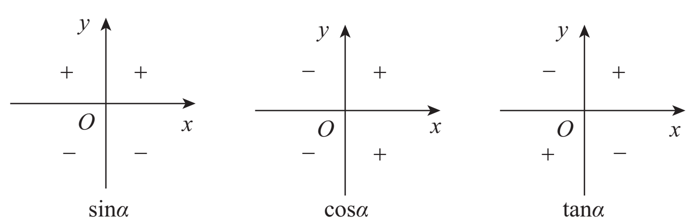

图 6－15

新知识应用

例题 5 如果 $\sin\alpha>0$，则 α 是______或______象限的角，或______；如果 $\cos\alpha<0$，则 α 是______或______象限的角，或______.

解： 当 $\sin\alpha>0$ 时，α 是第一象限或第二象限的角，或终边位于 y 轴的正半轴；当 $\cos\alpha<0$ 时，α 是第二象限或第三象限的角，或终边位于 x 轴的负半轴.

跟踪练习 5　如果 $\cos\alpha>0$，则 α 是______或______象限的角，或______；如果 $\tan\alpha<0$，则 α 是______或______象限的角.

动动脑：

归纳由三角函数值的符号判断角所在象限的常规方法.

例题 6　确定下列各三角函数值的符号：

（1）$\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$；　　（2）$\tan 670°$.

解：（1）因为 $-\frac{10\pi}{3}=-4\pi+\frac{2\pi}{3}$，

所以 $-\frac{10\pi}{3}$ 角与 $\frac{2\pi}{3}$ 角的终边相同，位于第二象限，

即 $\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)>0$；

（2）因为 $670°=360°+310°$，

所以 $670°$ 角与 $310°$ 角的终边相同，位于第四象限，

即 $\tan 670°<0$

跟踪练习 6　确定下列各三角函数值的符号：

（1）$\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$；　　（2）$\sin 1400°$.

动动脑：

归纳判断任意角三角函数值的符号的常规方法.

例题 7　根据 $\cos\alpha<0$，且 $\tan\alpha<0$，确定 α 是第几象限的角.

解：因为 $\cos\alpha<0$，所以 α 是第二或第三象限的角或终边在 x 轴的负半轴上.

又因为 $\tan\alpha<0$，所以 α 是第二或第四象限的角.

所以满足 $\cos\alpha<0$，且 $\tan\alpha<0$ 的 α 是第二象限的角.

跟踪练习 7　根据 $\sin\alpha>0$，且 $\cos\alpha<0$，确定 α 是第几象限的角.

动动脑：

归纳由两种三角函数值的符号判断角所在象限的常规方法.

6.2.3 单位圆和三角函数线

旧知识链接：

阅读教材下册中第 9 页有关三角函数概念的内容.

观察与思考

观察： 正弦函数 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；余弦函数 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；正切函数 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

思考： 当 $r=1$ 时，$\sin\alpha=?$，$\cos\alpha=?$；当 $x=1$ 时，$\tan\alpha=?$.

新知识学习

1. 单位圆

（1） 有关概念

如图 6－16 所示，半径为 1 的圆叫做单位圆.

规定：平行坐标轴且与坐标轴正方向同向的线段为正的，而平行坐标轴且与坐标轴正方向相反的线段为负的.

比如：在图 6－16 中，$AB=3$，$BA=-3$；$CD=6$，$DC=-6$.

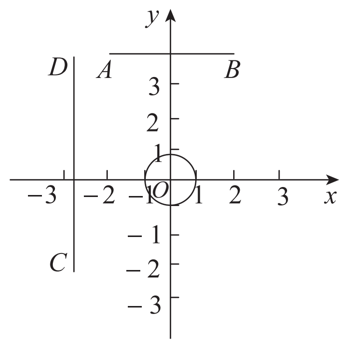

图 6－16

（2） 思考与分析

如图 6－17 所示，设单位圆的圆心与坐标原点重合，则单位圆与 x 轴的正半轴交于点 $A(1,0)$. 设角 α 的顶点在圆心 O，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆相交点 $P(x,y)$，过点 P 作 PM 垂直 x 轴于 M，则由三角函数的定义可知：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=y=MP,\ \cos\alpha=\frac{x}{r}=x=OM.$$

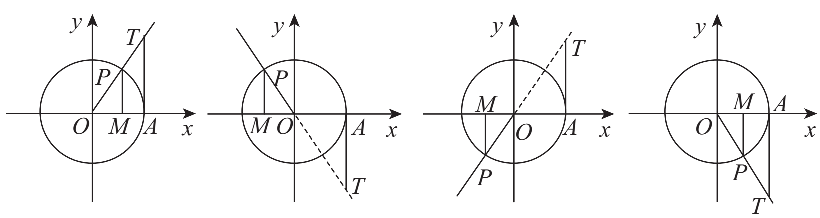

图 6－17

设单位圆在点 A 的切线与 α 的终边或其反向延长线相交于点 T，则由三角函数的定义可知：

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}=AT.$$

2. 三角函数线

在单位圆中，规定了方向的线段 MP、OM 和 AT 分别叫做**角 α 的正弦线、余弦线和正切线**.

说明：在单位圆中，角 α 的终边与单位圆交点 P 的坐标为 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

小组互动：

探讨并理解作三角函数线的原理.

新知识应用

例题 8　如图 6－18 所示，$\angle xOP=60^\circ$，边 OP 与单位圆相交于点 P，求点 P 的坐标.

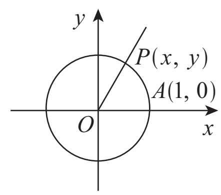

图 6－18

解：设点 P 的坐标为 (x, y)，则

$$x=\cos 60^\circ=\frac{1}{2},\ y=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

跟踪练习 8　已知 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$，角 α 的终边与单位圆相交于 P 点，求点 P 的坐标.

动动脑：

归纳由已知角求角的终边与单位圆的交点坐标的常规方法.

例题 9　在直角坐标系的单位圆中，分别画出 45° 和 $\frac{7\pi}{6}$ 的正弦线、余弦线和正切线.

解：45° 的正弦线 MP、余弦线 OM 和正切线 AT 如图 6－19(1)所示. $\frac{7\pi}{6}$ 的正弦线 MP、余弦线 OM 和正切线 AT 如图 6－19(2)所示.

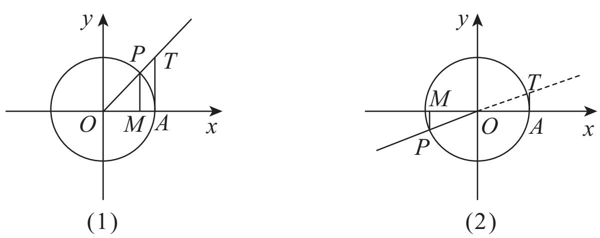

图 6－19

跟踪练习 9　在直角坐标系的单位圆中，分别画出 60° 和 $\frac{3\pi}{4}$ 的正弦线、余弦线和正切线.

动动脑：

归纳作三角函数线的方法与技巧.

6.2.4 同角三角函数的基本关系式

旧知识链接：

阅读教材下册中第9页三角函数的概念.

观察与思考

观察： 正弦函数 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$；余弦函数 $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$；正切函数 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$.

思考：（1）正切函数可用正弦函数和余弦函数表示，即

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\alpha;$$

（2）正弦函数与余弦函数存在平方关系，即

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r^2}=1.$$

新知识学习

由三角函数的定义，容易得到以下同角三角函数的基本关系：

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

说明： 使用同角三角函数变换公式时应注意

（1）必须在同角条件下使用；

（2）同一个公式有三种不同的表达形式，注意灵活运用.

新知识应用

例题 10 已知 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，且 α 是第二象限的角，求角 α 的其他三角函数值.

解： 由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

因为 α 是第二象限的角，$\cos\alpha<0$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}.$$

由商数关系，得

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}.$$

评注： 此类求值问题一般先求与已知的三角函数有直接关系的三角函

数的值，再根据同角三角函数的基本关系求其他三角函数值.

跟踪练习 10　已知 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 α 是第四象限的角，求角 α 的其他三角函数值.

动动脑：

归纳已知一种三角函数值求其他三角函数值的常规方法与技巧.

例题 11　已知 $\tan\theta=-2$，求$\dfrac{2\sin\theta+3\cos\theta}{\sin\theta-4\cos\theta}$的值.

分析： 利用已知条件求三角函数式的值，常规方法有两种：一种是先将已知条件变形，再将变形后的三角式代入所求三角函数式中进行化简求值；另一种是将所求的三角函数式用已知三角函数来表示.

解：方法一

由已知 $\tan\theta=-2$ 得，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-2$，即 $\sin\theta=-2\cos\theta$，所以

$$\frac{2\sin\theta+3\cos\theta}{\sin\theta-4\cos\theta}=\frac{2\times(-2\cos\theta)+3\cos\theta}{-2\cos\theta-4\cos\theta}=\frac{-\cos\theta}{-6\cos\theta}=\frac{1}{6}.$$

方法二

由 $\tan\theta=-2$ 知 $\cos\theta\neq0$，所以

$$\frac{2\sin\theta+3\cos\theta}{\sin\theta-4\cos\theta}=\frac{\dfrac{2\sin\theta+3\cos\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\sin\theta-4\cos\theta}{\cos\theta}}=\frac{2\tan\theta+3}{\tan\theta-4}=\frac{2\times(-2)+3}{-2-4}=\frac{1}{6}.$$

跟踪练习 11　已知 $\tan\alpha=3$，求$\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{5\sin\alpha+\cos\alpha}$的值.

动动脑：

归纳已知一种三角函数值求相关三角函数式的值的常规方法与技巧.

例题 12　化简：

(1) $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{1+\tan\theta}$；　　　　(2) $\sqrt{1-\cos^2 280^\circ}$.

解： (1) $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{1+\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}=\cos\theta$；

(2) $\sqrt{1-\cos^2 280^\circ}=\sqrt{\sin^2 280^\circ}=|\sin280^\circ|$，

因为 280°是第四象限的角，所以 $\sin280^\circ<0$，

即原式 $=-\sin280^\circ$.

评注： 对含有开方的三角函数式，开方时需注意被开方式的符号.

动动脑：

归纳化简三角函数式的常规方法与技巧.

跟踪练习 12 化简：

(1) $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$；　　(2) $\sqrt{1-\sin^2\dfrac{6\pi}{5}}$.