

中等职业学校系列规划教材

数学学习手册

(上册) (第二版)

刘丹华 主编

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是中等职业教育数学课程《数学》(上册)(第二版)(ISBN: 978-7-302-47301-5)一书相配套的学习用书,目的是通过课堂跟踪练习及时了解学生对新知识的掌握情况;通过知识回顾与概括帮助学生理清知识的脉络,加深学生对新知识的理解与掌握;通过知识强化练习进一步巩固所学知识;最后通过每章节的习题培养学生综合应用所学知识分析问题与解决问题的能力。

本书严格按照配套教材章节的顺序,以节为单位进行编写。每小节内容含有知识回顾与概括、知识应用方法、知识强化练习。每一大节配置了综合习题,每一章配置了复习参考题。本书习题的编写,既遵循了“教学大纲”与“考试大纲”的要求,又符合中学生的学习规律与教学规律,易于师生课堂教与学,也易于学生课前预习知识与课后巩固知识,有利于提升学生分析问题与解决问题的能力,体现中等职业教育的办学理念。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

数学学习手册.上册/刘丹华 主编. —2版. —北京:清华大学出版社,2017

(中等职业学校系列规划教材)

ISBN 978-7-302-47302-2

I. ①数… II. ①刘… III. ①数学课—中等专业学校—习题集 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 124495 号

责任编辑:王 定 程 琪

封面设计:周晓亮

版式设计:思创景点

责任校对:牛艳敏

责任印制:

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:虎彩印艺股份有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:10.5 字 数:229 千字

版 次:2015 年 8 月第 1 版 2017 年 9 月第 2 版 印 次:2017 年 9 月第 1 次印刷

印 数:1~6000

定 价:32.00 元

产品编号:

本书编委会

主 编：刘 丹 华

副主编：刘红军 卢曙红 李本红 谭咏梅

编 委：黄迪君 于德林 祝仰河 卢友波

黄玉娣 龙 勇 周笑媛 樊青冬

缪 进 韩保树 钟伟明 张志芳

钟超文 潘秋梅 马 强

前言

本书是中等职业教育数学课程《数学》(上册)(第二版)(ISBN: 978-7-302-47301-5)一书相配套的学习用书。目的是使学生通过对教材内容的复习回顾、深化理解,对知识应用方法的反思总结,以及跟踪练习与强化练习的实践,理清知识脉络,掌握基础知识和基本技能,强化知识应用方法,提高分析问题和应用数学知识解决实际问题的能力。本书是学生课前预习及课后复习的辅助教材。

本书按照配套教材的章节顺序编排,与课时同步。内容包括:集合与充要条件、不等式、函数、指数函数与对数函数、数列,另外还有知识链接 A、知识链接 B 与知识链接 C。

本书通过“知识回顾与概括”,帮助学生梳理课堂所学新知,形成对知识点的二次提炼;通过“知识应用方法”,实现浓缩新知识,点透规律;通过“知识强化练习”,帮助学生掌握应知应会的基本题型,巩固当堂所学知识,及时强化,明确学习重点和基本要求。同时,还为学有余力的学生设置了带“●”的题目,增加了学习梯度,满足不同层次学生的学习需求,加强对学有余力学生的数学思维的训练和数学能力的培养。

此外,为了提高学生综合运用数学知识的能力,每小节后都安排了一些习题,每章后又安排了一套单元综合练习。练习题设置由浅入深,分为基本题、小综合题和带“●”稍有难度题,题目数量、难易适中,有助于巩固学生所学的知识,进一步提高学生分析问题、解决问题的能力。

本书选编的习题,严格执行教育部颁布的教学大纲的要求,全面贯彻“以服务为宗旨,以就业为导向”的办学指导方针,体现“以就业为导向,以能力为本位”的课程体系,帮助中等职业学校的学生更为科学、扎实、全面地掌握教材介绍的内容,遵循培养高素质劳动者的目标,控制难度,注重基本知识和基本方法的学习,为学生在专业课程应用数学和升学考试做好准备。

本书由刘丹华担任主编。清华大学出版社对本套教材的编写与出版提供了很大的帮助,在此深表感谢!

由于编者的学术水平有限,书中难免存在不足,恳请广大读者和专家提出宝贵的意见和建议,反馈邮箱 383270415@qq.com,电话 01062794504。

编者

2017 年 5 月

目 录

第 1 章 集合与充要条件	1		
1.1 集合及集合之间的关系	1		
1.1.1 集合	1		
1.1.2 集合的表示方法	3		
1.1.3 集合之间的关系	5		
1.1.4 习题	7		
1.2 集合的运算	9		
1.2.1 交集	9		
1.2.2 并集	10		
1.2.3 补集	11		
1.2.4 习题	13		
1.3 充要条件	15		
1.3.1 充要条件概述	15		
1.3.2 习题	16		
1.4 复习参考题	17		
1.4.1 选择题	17		
1.4.2 填空题	18		
1.4.3 解答题	19		
第 2 章 不等式	20		
2.1 不等式的性质与证明	20		
2.1.1 不等式的概念与实数的 比较	20		
2.1.2 不等式的性质与推论 ...	21		
2.1.3 不等式的证明	23		
2.1.4 习题	24		
2.2 不等式的解法	26		
2.2.1 不等式的解集与区间 ...	26		
2.2.2 一元一次不等式和一元 一次不等式组	27		
2.2.3 一元二次不等式	29		
2.2.4 含绝对值不等式	30		
2.2.5 习题	31		
2.3 不等式的应用	33		
2.3.1 建立不等式模型 及其应用	33		
2.3.2 习题	34		
2.4 复习参考题	35		
2.4.1 选择题	35		
2.4.2 填空题	36		
2.4.3 解答题	37		
第 3 章 函数	38		
3.1 函数概述	38		
3.1.1 函数的概念及表示法 ...	38		
3.1.2 分段函数	39		
3.1.3 习题	41		
3.2 函数的基本性质	43		
3.2.1 函数的单调性	43		
3.2.2 函数的对称性	44		
3.2.3 函数的奇偶性	46		
3.2.4 习题	47		
3.3 初等函数	49		

3.3.1	一次函数、正比例函数与反比例函数	49
3.3.2	二次函数	51
3.3.3	习题	54
3.4	反函数	56
3.4.1	反函数概述	56
3.4.2	习题	58
3.5	复习参考题	59
3.5.1	选择题	59
3.5.2	填空题	60
3.5.3	解答题	61
第4章	指数函数与对数函数	62
4.1	指数与对数	62
4.1.1	指数	62
4.1.2	对数	64
4.1.3	习题	67
4.2	幂函数与指数函数	69
4.2.1	幂函数	69
4.2.2	指数函数	70
4.2.3	习题	73
4.3	对数函数	76
4.3.1	对数函数概述	76
4.3.2	习题	78
4.4	复习参考题	81
4.4.1	选择题	81
4.4.2	填空题	82
4.4.3	解答题	83
第5章	数列	84
5.1	数列概述	84
5.1.1	数列的有关概念	84
5.1.2	习题	86
5.2	等差数列	88

5.2.1	等差数列的概念及通项公式	88
5.2.2	等差中项	89
5.2.3	等差数列的前 n 项和	90
5.2.4	习题	92
5.3	等比数列	94
5.3.1	等比数列的概念及通项公式	94
5.3.2	等比中项	96
5.3.3	等比数列的前 n 项和	97
5.3.4	习题	99
5.4	复习参考题	101
5.4.1	选择题	101
5.4.2	填空题	102
5.4.3	解答题	103
知识链接 A	实数与实数的运算	104
A.1	实数	104
A.1.1	实数的基本概念	104
A.1.2	实数的有关概念	106
A.1.3	多重符号的化简	107
A.1.4	比较两个实数的大小	107
A.2	实数的基本运算	109
A.2.1	实数的加法	109
A.2.2	实数的减法	109
A.2.3	实数的乘法	110
A.2.4	实数的除法	110
A.2.5	实数的乘方	110
A.2.6	实数的开方	111
A.3	实数的混合运算	114
A.3.1	实数的加减混合运算	114
A.3.2	实数的加、减、乘、除、乘方、开方混合运算	114

A. 4 习题	116	B. 6 习题	138
A. 4.1 选择题	116	B. 6.1 选择题	138
A. 4.2 填空题	117	B. 6.2 填空题	139
A. 4.3 解答题	118	B. 6.3 解答题	140
知识链接 B 代数式与代数式运算	119	知识链接 C 方程与方程组	141
B. 1 代数式的基本概念	119	C. 1 等式与一元一次方程	141
B. 1.1 代数式	119	C. 1.1 等式和方程	141
B. 1.2 求代数式的值	119	C. 1.2 一元一次方程	141
B. 2 整式	122	C. 2 一元二次方程	144
B. 2.1 整式的基本概念	122	C. 2.1 一元二次方程概述	144
B. 2.2 运算公式与法则	122	C. 2.2 一元二次方程根的 判别式	145
B. 2.3 整式的运算	122	C. 3 分式方程与无理方程	147
B. 3 因式分解	126	C. 3.1 分式方程	147
B. 3.1 因式分解的概念	126	C. 3.2 无理方程	147
B. 3.2 因式分解的基本方法	126	C. 4 方程组	149
B. 4 分式	130	C. 4.1 二元一次方程组	149
B. 4.1 分式的基本概念与 性质	130	C. 4.2 三元一次方程组	149
B. 4.2 分式的运算方法与 基本技能	130	C. 4.3 简单的二元二次 方程组	150
B. 5 二次根式	134	C. 5 习题	154
B. 5.1 二次根式的概念 与性质	134	C. 5.1 选择题	154
B. 5.2 二次根式的运算 方法	134	C. 5.2 填空题	155
		C. 5.3 解答题	156

第 1 章 集合与充要条件

1.1 集合及集合之间的关系

1.1.1 集合

知识回顾与概括

1. 集合的概念及性质

(1) 集合的概念

由某些确定的对象构成的整体叫做**集合**. 构成集合的每个对象都叫做**集合的元素**.

一个集合, 通常用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示, 它的元素通常用小写英文字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

(2) 集合的性质

① 确定性

对于给定的集合, 集合中的元素是确定的.

② 互异性

在同一个集合中, 集合中的每个元素都是不同的对象.

③ 无序性

对于给定的集合, 集合中的元素不考虑顺序关系.

2. 特殊的集合

(1) 常用数集

非负整数全体构成的集合, 叫做**自然数集**, 记作 $\mathbf{N}$.

在自然数集内排除 0 的集合, 叫做**正整数集**, 记作 $\mathbf{N}^*$.

整数全体构成的集合, 叫做**整数集**, 记作 $\mathbf{Z}$.

有理数全体构成的集合, 叫做**有理数集**, 记作 $\mathbf{Q}$.

实数全体构成的集合, 叫做**实数集**, 记作 $\mathbf{R}$.

说明: 正数集在相应数集符号的右下角加上 “+”, 负数集在相应数集符号的右下角加



上“—”.

(2) 有限集和无限集

含有有限个元素的集合叫做**有限集**, 含有无限个元素的集合叫做**无限集**.

(3) 空集

不含有任何元素的集合叫做**空集**. 空集用符号 $\emptyset$ 表示.

说明: $\{0\} \neq \emptyset$, $0 \notin \emptyset$.

3. 元素与集合的关系

如果元素 a 是集合 A 中的元素, 就说 a **属于集合 A** , 记作 $a \in A$; 如果元素 a 不是集合 A 中的元素, 就说 a **不属于集合 A** , 记作 $a \notin A$.

知识应用方法

1. 判断构成一个集合的关键条件是确定对象.(详见教材上册第 3 页中例题 1)
2. 元素与集合的关系的判断方法是: 元素是否在集合内或满足集合的特性.(详见教材上册第 3 页中例题 2)

知识强化练习

1. 判断下列语句是否正确:

- (1) 由 0、1、2、0、3 构成一个集合, 这个集合共有 5 个元素.
- (2) 由 5、6、7 构成的集合与由 7、6、5 构成的集合不同.
- (3) 某一时刻, 地球上所有有生命的植物构成一个集合.
- (4) 所有梯形构成的集合是无限集合.
- (5) 偶数集是有限集合.

解: (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

2. 下列语句能否确定一个集合?

- (1) 某中职学校成绩好的学生.
- (2) 大于 -2 且小于 5 的整数的全体.
- (3) 某班计算机水平高的学生全体.
- (4) 负有理数的全体.
- (5) 与 0 接近的实数的全体.

解: (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

3. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空:(1) 2 _____ $\mathbf{N}$;(2) $-\frac{3}{2}$ _____ $\mathbf{Q}$;(3) $\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{Q}$;(4) $-\sqrt{5}$ _____ $\mathbf{R}$;(5) -11 _____ $\mathbf{Z}$;(6) -13 _____ $\mathbf{N}$.

分析: (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

1.1.2 集合的表示方法

知识回顾与概括

1. 列举法

把集合的元素一一列举出来, 写在大括号内表示这个集合, 这种表示集合的方法叫做**列举法**. 一般格式是 $\{a, b, c, \dots\}$.

说明: (1) 当集合元素不多时, 常用列举法表示.

(2) 由集合的无序性可知, 集合 $\{a, b, c\}$ 与 $\{c, b, a\}$ 表示同一个集合.

(3) a 与 $\{a\}$ 是两个不同的概念, 字母 a 表示元素, $\{a\}$ 表示含元素 a 的集合.

2. 描述法

对于给定的集合 A , 集合 A 的任一元素 x 都具有共同性质 $p(x)$, 把集合中的元素所具有的共同性质描述出来, 写在大括号内, 这种表示集合的方法叫做**描述法**. 一般格式是 $\{x \in A \mid p(x)\}$.

说明: (1) 当集合元素较多时, 常用描述法表示.

(2) 在某种约定下, x 的取值集合可以省略不写.

知识应用方法

1. 列举法表示集合的常规方法与技巧(详见教材上册第4~5页中例题3)

(1) 当集合元素个数不多时, 通常将元素一一列举出来写在大括号内.

(2) 当集合元素个数较多或无限时, 写出代表性的元素, 再用省略号写在大括号内.

(3) 当用集合表示方程组的解时, 需要将方程组的解用小括号括起来写在大括号内.

2. 描述法表示集合的常规方法与技巧(详见教材上册第 5 页中例题 4)

(1) 描述法的一般格式是 $\{x \in A \mid p(x)\}$.

(2) 在用描述法表示集合过程中, 忌将 $\{x \in A \mid p(x)\}$ 写成 $\{p(x)\}$.

(3) 在几何中, 通常用大写字母表示点(元素), 用小写字母表示点的集合.

知识强化练习

1. 用列举法表示下列集合:

(1) 9 的平方根组成的集合;

(2) 中华人民共和国的直辖市;

(3) 方程 $\frac{x^2-2x}{x-2}=0$ 的解集;

(4) 小于 6 的正整数组成的集合.

解: (1)

(2)

(3)

(4)

2. 用描述法表示下列集合:

(1) 由北京一个城市组成的集合;

(2) 所有偶数组成的集合;

(3) 绝对值大于 5 的实数组成的集合;

(4) 菱形的全体组成的集合.

解: (1)

(2)

(3)

(4)

3. 用适当的方法表示下列集合:

(1) 英语单词 mathematics 的字母组成的集合.

(2) 被 5 除余 2 的整数组成的集合.

(3) 方程 $x^2+1=0$ 的实数解集.

(4) 由平面直角坐标系中 x 轴上的点组成的集合.

(5) 方程组 $\begin{cases} x-2y=2, \\ 3x+2y=10 \end{cases}$ 的解集.

● (6) 在自然数集内, 大于 10 的奇数组成的集合.

解: (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

● (6)

1.1.3 集合之间的关系

知识回顾与概括

1. 子集

(1) 子集的概念

如果集合 A 的任一个元素都是集合 B 的元素, 那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

(2) 子集的性质

① 任何一个集合 A 都是它本身的子集, 即 $A \subseteq A$.

② 空集是任何集合的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$.

③ 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

说明: 当集合 A 不是集合 B 的子集时, 记作 $A \not\subseteq B$, 读作“ A 不包含于 B ”或“ B 不包含 A ”.

2. 真子集

(1) 真子集的概念

如果集合 A 是集合 B 的子集, 并且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A , 那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**, 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$, 读作“ A 真包含于 B ”或“ B 真包含 A ”.

说明: 真子集是一种特殊的子集关系.

常用平面上一个封闭曲线的内部表示一个集合(如图 1-1(1)所示). 如果集合 A 是 B 的真子集, 那么把表示 A 的区域画在表示 B 的区域的内部(如图 1-1(2)所示), 这种图叫做**维恩(Venn)图**.



图 1-1

(2) 真子集的性质

① 一个集合不是它本身的真子集.

② 空集是任何非空集合的真子集, 即 $\emptyset \subsetneq A (A \neq \emptyset)$.

③ 若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$.

3. 集合的相等

如果两个集合的元素完全相同, 那么就说这两个集合相等. 集合 A 等于集合 B , 记作 $A=B$.

说明: 由相等的定义知, 如果 $A \subseteq B$, 又 $B \subseteq A$, 那么 $A=B$; 反之, 如果 $A=B$, 那么 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$.

知识应用方法

1. 集合与集合之间关系的判断方法(详见教材上册第 7 页中例题 5)

(1) 如果集合 A 的元素都在集合 B 内能找到, 或满足集合 A 的特性就能满足集合 B 的特性, 那么集合 A 就是集合 B 的子集.

(2) 如果集合 A 是集合 B 的子集, 且集合 B 的元素比集合 A 的元素多, 那么集合 A 就是集合 B 的真子集.

(3) 如果两个集合的元素完全相同, 或两个集合具备的特性相同, 那么说这两个集合相等.

2. 元素与集合关系、集合与集合关系的区别(详见教材上册第 8 页中例题 6)

关键看两者是否一个为元素, 一个为集合, 还是两个都是集合.

3. 写出有限集合的所有子集与真子集的常规方法与技巧(详见教材上册第 8 页中例题 7)

(1) 由已知有限集合的部分或全部元素组成的新集合即为此有限集合的所有子集, 不过写出子集的过程中, 应从空集开始, 分别有规律地选取一个元素、二个元素……直到本身为止.

(2) 上述所有子集, 除了本身, 剩余的集合即为已知有限集合的所有真子集.

知识强化练习

1. 用适当的符号($\in$, $\notin$, $=$, $\subseteq$, $\supseteq$, $\varsubsetneq$, $\varsupsetneq$)填空:

(1) 3 $\underline{\hspace{1cm}}$ $\{x \mid 2 < x \leq 3\}$.

(2) a $\underline{\hspace{1cm}}$ $\emptyset$.

(3) $\{2\}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\{x \mid x^2 - 2x = 0\}$.

(4) $\emptyset$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\{x \in \mathbf{R} \mid |x+1| = -2\}$.

(5) $\{x \mid x = 2n, x \in \mathbf{Z}_+\}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\mathbf{Q}$.

(6) $\{x \mid x \text{ 是等腰三角形}\}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\{x \mid x \text{ 是一组邻边相等的三角形}\}$.

分析: (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

2. 指出下列四个集合之间的关系, 并用维恩图表示.

$$A = \{x \mid x \text{ 是四边形}\};$$

$$B = \{x \mid x \text{ 是平行四边形}\};$$

$$C = \{x \mid x \text{ 是矩形}\};$$

$$D = \{x \mid x \text{ 是正方形}\}.$$

解:

● 3. 写出满足 $\{x\} \subseteq A \subsetneq \{x, y, z\}$ 的集合 A .

解:

1.1.4 习题

1. 用适当的方法表示下列集合:

(1) 中国国旗图案的颜色组成的集合;

(2) 12 的正因数组成的集合;

(3) 16 的平方根组成的集合;

(4) 绝对值小于 6 的偶数组成的集合;

(5) 被 4 除余 2 的整数组成的集合;

(6) 不等式 $\frac{2x-3}{2} > 1$ 的解集.

解: (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

2. 用适合的符号 ($\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\supseteq$, $=$) 填空:

(1) 4 _____ $\{x \mid |x| \leq 3\}$.

(2) $\emptyset$ _____ $\{x \mid x^2 < 0\}$.

(3) 2 _____ $\{x \mid x^2 - 3 > 0\}$.

(4) $\{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ _____ $\{x \mid x - 1 = 0\}$.

(5) $\{x \mid x \text{ 是奇数}\}$ _____ $\{x \mid x \text{ 是整数}\}$.

(6) $\{x \mid x > 4\}$ _____ $\{x \mid |x| > 4\}$.

分析: (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

- 3. 写出满足 $\{a, b\} \subseteq P \subsetneq \{a, b, c, d\}$ 的所有集合 P .

解:

1.2 集合的运算

1.2.1 交集

知识回顾与概括

1. 交集的概念

对于两个给定的集合 A 和 B ，由既属于 A 又属于 B 的所有公共元素构成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$ ，读作“ A 交 B ”。

说明：两个集合的交集有以下四种情况，可用图 1-2 所示的阴影部分表示。

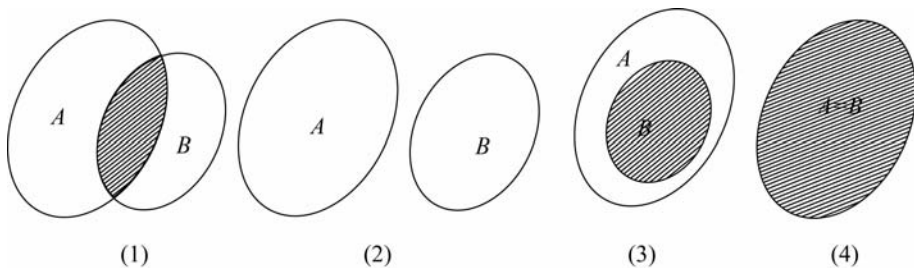


图 1-2

2. 交集的性质

由交集的定义可知，对于任意两个集合 A 和 B ，都有

- | | |
|---|---|
| (1) $A \cap B = B \cap A$; | (2) $A \cap A = A$; |
| (3) $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$; | (4) 如果 $A \subseteq B$ ，那么 $A \cap B = A$. |

知识应用方法

1. 求有限集合 A 与 B 的交集的常规方法是：求集合 A 与 B 的公共元素或共同性质的元素构成的新集合。（详见教材上册第 10 页中例题 1）

2. 求几何图形集合的交集的常规方法是：求它们具有共同性质的几何图形组成的集合。（详见教材上册第 10 页中例题 2）

3. 求不等式解集的交集的常规方法是：利用数轴来求，数轴上两条线覆盖的部分即为不等式解集的交集。（详见教材上册第 10 页中例题 3）

知识强化练习

1. 已知集合 $A = \{x | -3 < x < 6\}$ ， $B = \{x \in \mathbf{Z} | x > 1\}$ ，求 $A \cap B$ 。

解：

2. 已知集合 $A = \{x | x \text{ 是等腰直角三角形}\}$, $B = \{x | x \text{ 是直角三角形}\}$, $C = \{x | x \text{ 是等腰三角形}\}$, 求 $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

解:

3. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = 2x + 3\}$, $B = \{(x, y) | x - y = -7\}$, 求 $A \cap B$.

解:

4. 设集合 $A = \{x | x \geq 3 \text{ 或 } x < 0\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 求 $A \cap B$, 并在数轴上表示.

解:

1.2.2 并集

知识回顾与概括

1. 并集的概念

对于两个给定的集合 A 和 B , 把它们所有的元素合并在一起构成的集合, 叫做 **A 与 B 的并集**, 记作 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”.

说明: 集合 A 与 B 的并集有以下四种情况, 可用图 1-3 中的阴影表示.

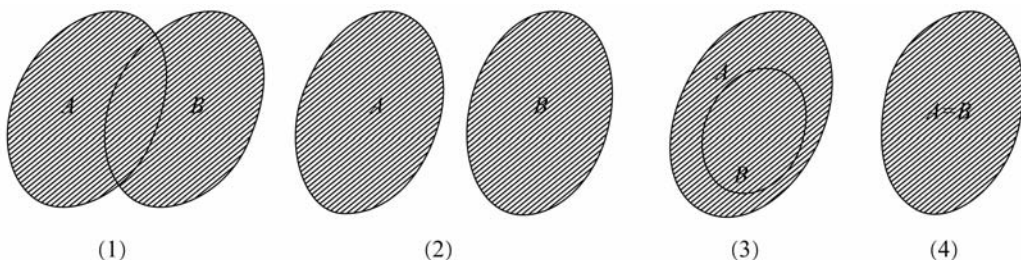


图 1-3

2. 并集的性质

由并集的定义可知, 对于任意两个集合 A , B , 都有

- (1) $A \cup B = B \cup A$;
- (2) $A \cup A = A$;
- (3) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$;
- (4) 如果 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$.

知识应用方法

1. 求有限数集 A 与 B 的并集运算的常规方法是: 求集合 A 与 B 的所有元素或所有性质的元素构成的新集合. (详见教材上册第 11 页中例题 4)

2. 求几何图形集合的并集的常规方法是: 求它们所有性质的几何图形组成的集合. (详见教材上册第 12 页中例题 5)

3. 求不等式解集的并集的常规方法是：利用数轴来求，数轴上有线覆盖的部分即为不等式解集的并集. (详见教材上册第12页中例题6)

4. 求两个集合的交集与并集的区别在于：交集是求公共元素或共同性质元素所构成的新集合，而并集是求所有元素或所有性质的元素所构成的新集合. (详见教材上册第12页中例题7)

知识强化练习

1. 已知集合 $A = \{-1, 2, 3, 5\}$, $B = \{-2, -1, 2, 4\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

解：

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4 = 0\}$, $B = \{x | x + 2 = 0\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$ (用列举法表示).

解：

3. 设集合 $A = \{x | x \leq 3\}$, $B = \{x | -2 < x < 4\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$.

解：

4. 已知集合 $A = \{x | x \text{ 是斜三角形}\}$, $B = \{x | x \text{ 是锐角三角形}\}$, $C = \{x | x \text{ 是钝角三角形}\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cup C$.

解：

● 5. 已知集合 $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{-1, 2, 4\}$, 求 $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C$.

解：

1.2.3 补集

知识回顾与概括

1. 补集的概念

(1) 全集

在研究集合与集合之间的关系时，如果一些集合都是某一给定集合的子集，那么称这个给定的集合为这些集合的**全集**，通常用 U 表示.

(2) 补集

如果 A 是全集 U 的一个子集，由 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，叫做 A 在 U 中的**补集**，记作 $\complement_U A$ ，读作“ A 在 U 中的补集”.

2. 补集的性质

由补集定义可知, 对于任意集合 A , 都有:

- (1) $A \cup \complement_U A = U$.
- (2) $A \cap \complement_U A = \varnothing$.
- (3) $\complement_U (\complement_U A) = A$.
- (4) $\complement_U U = \varnothing$, $\complement_U \varnothing = U$.

说明: 集合 A 的补集的情况, 如图 1-4 中的阴影表示.

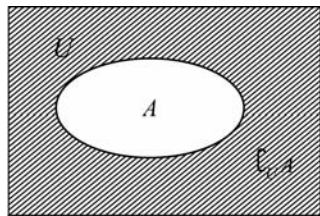


图 1-4

知识应用方法

1. 求有限集合 A 的补集运算的常规方法是: 在全集 U 中除去集合 A 的元素或与集合 A 中元素具有相同性质的元素所构成的新的集合. (详见教材上册第 13 页中例题 8)

2. 求几何图形集合的补集的常规方法是: 在全集 U 中除去与集合 A 中几何图形具有相同性质的几何图形所构成的集合. (详见教材上册第 14 页中跟踪练习 9)

3. 求不等式解集的补集的常规方法是: 利用数轴来求, 数轴上无线覆盖的部分即为不等式解集的补集. (详见教材上册第 14 页中例题 10)

4. 利用补集的性质确定集合中未知元素的常规方法是: 根据集合相等的概念建立方程, 解出方程的解, 便可确定集合中未知的元素. (详见教材上册第 14 页中例题 11)

5. 在集合运算过程中要求 $\complement_U A \cap \complement_U B$, $\complement_U A \cup \complement_U B$, 可利用集合的交、并、补运算性质 $\complement_U A \cap \complement_U B = \complement_U (A \cup B)$, $\complement_U A \cup \complement_U B = \complement_U (A \cap B)$, 可简化运算. (详见教材上册第 14~15 页中例题 12)

知识强化练习

1. 设全集 $U = \{x \in \mathbf{Z}_+ \mid x \leq 7\}$, 集合 $A = \{2, 3, 6\}$, $B = \{2, 4, 5, 7\}$, 求 $\complement_U A \cup \complement_U B$, $\complement_U A \cap B$.

解:

2. 已知全集 $U = \{\alpha \mid 0^\circ < \alpha < 180^\circ\}$, 集合 $A = \{\alpha \mid \alpha \text{ 是锐角}\}$, $B = \{\alpha \mid \alpha \text{ 是钝角}\}$, 求 $\complement_U A \cup B$, $\complement_U A \cap \complement_U B$, $\complement_U (A \cup B)$.

解:

3. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid -2 < x \leq 2\}$, $B = \{x \mid x > 0\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U A \cap B$, $\complement_U (A \cup B)$.

解:

- 4. 已知全集 $U = \{-3, -1, 0, x\}$, 集合 $A = \{-1, 0\}$, $\complement_U A = \{-3, 5\}$, 求 x .

解:

1.2.4 习题

1. 选择题:

- (1) 已知集合 $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{-1, 5, 9\}$, 那么 $A \cap B = (\quad)$.

- A. $\{-1, 5, 9\}$ B. $\{5, 9\}$
C. $\{-1, 3, 5, 7, 9\}$ D. $\{3, 7\}$

- (2) 已知集合 $A = \{x \mid -2 < x < 5\}$, $B = \{x \mid x < 2\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

- A. $\{x \mid -2 < x < 2\}$ B. $\{x \mid 2 < x < 5\}$
C. $\{x \mid x < 5\}$ D. $\{x \mid x < -2\}$

- (3) 已知全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{-1, 0, 2\}$, 则 $\complement_U A = (\quad)$.

- A. $\{-2, 1, 3\}$ B. $\{-1, 0, 2\}$
C. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ D. $\{-2, 0, 2\}$

- (4) 已知集合 $A = \{\text{直线}\}$, $B = \{\text{圆}\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为 $(\quad)$.

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 0 个或 1 个或 2 个

- (5) 已知集合 $A = \{x \mid x < -1\}$, $B = \{x \mid x \geq m\}$, 且 $A \cup B = \mathbf{R}$, 那么 m 的值可以是 $(\quad)$.

- A. 1 B. 0 C. -1 D. -2

分析: (1)

(2)

(3)

(4)

- (5)

2. 填空题:

- (1) 已知集合 $A = \{x \mid 1 \leq x < 6\}$, $B = \mathbf{Z}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (2) 已知集合 $A = \{x \mid -3 \leq x < 7\}$, $B = \{x \mid 0 < x \leq 3\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (3) 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 4, 8\}$, 集合 $B = \{1, 7, m\}$, 且 $A \cap B = \{1, 8\}$, 则 $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (4) 某班级有学生 48 人, 参加专业理论和实操考试, 成绩及格人数分别为 43 人和 39 人, 两项均不及格的人数为 4 人, 则两项都及格的人数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

分析: (1)

(2)

(3)

●(4)

3. 用适当的集合填空:

$\cap$	$\emptyset$	A	B
$\emptyset$	—	—	—
A	—	—	—
B	—	—	—

$\cup$	$\emptyset$	A	B
$\emptyset$	—	—	—
A	—	—	—
B	—	—	—

分析:

4. 已知全集 $U = \{x | x \leq 7, x \in \mathbf{N}^*\}$, 集合 $P = \{2, 3, 4, 5\}$, $Q = \{1, 3, 4, 6\}$, 求 $P \cap Q$, $\complement_U P$, $\complement_U P \cup Q$, $\complement_U (P \cap Q)$.

解:

5. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x > -1\}$, $B = \{x | -2 \leq x < 3\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_U A \cup B$.

解:

●6. 设集合 $A = \{6, \sqrt{m}\}$, $B = \{m, n\}$, 若 $A \cap B = \{4\}$, 求 $A \cup B$.

解:

1.3 充要条件

1.3.1 充要条件概述

知识回顾与概括

1. 充分条件与必要条件

设条件 p 和结论 q .

如果条件 p 成立能推出结论 q 成立, 就说条件 p 是结论 q 的**充分条件**, 记作 $p \Rightarrow q$, 读作“ p 推出 q ”.

如果结论 q 成立能推出条件 p 成立, 就说条件 p 是结论 q 的**必要条件**, 记作 $p \Leftarrow q$, 读作“ q 推出 p ”.

说明: (1) 当 p 是 q 的充分条件时, 也可以说 q 是 p 的必要条件.

(2) 下列三句话表示同一个意思: $p \Rightarrow q$; p 是 q 的充分条件; q 是 p 的必要条件.

2. 充要条件

如果 $p \Rightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$, 那么就说 p 是 q 的充分必要条件, 简称**充要条件**, 记作 $p \Leftrightarrow q$.

例如: “四边形为平行四边形”是“对角线互相平分的四边形”的充要条件.

说明: (1) 如果 p 是 q 的充要条件, 那么 q 也是 p 的充要条件.

(2) p 是 q 的充要条件, 又常说成 q 当且仅当 p , 或 p 与 q 等价.

知识应用方法

1. 如果条件 p 成立能推出结论 q 成立, 但结论 q 成立不能推出条件 p 成立, 那么条件 p 就是结论 q 的充分条件. (详见教材上册第 17 页中例题 1(1)(2)(5))

2. 如果结论 q 成立能推出条件 p 成立, 但条件 p 成立不能推出结论 q 成立, 那么条件 p 就是结论 q 的必要条件. (详见教材上册第 17 页中例题 1(3)(4))

3. 如果条件 p 成立能推出结论 q 成立, 且结论 q 成立能推出条件 p 成立, 那么条件 p 就是结论 q 的充要条件. (详见教材上册第 17 页中例题 1(6))

知识强化练习

用充分条件、必要条件或充要条件填空:

- (1) x 是整数是 x 是有理数的_____. (2) $x=2$ 是 $|x+2|=4$ 的_____.
 (3) $x > -2$ 是 $0 < x < 3$ 的_____. (4) $ab=0$ 是 $a=0$ 的_____.
 (5) $a \in A \cap B$ 是 $a \in A$ 的_____. (6) $|x|=|y|$ 是 $x=y$ 的_____.



- (7) 今天是星期六是明天是星期日的 _____.
- (8) 四边形为矩形是四边形为正方形的 _____.

分析: (1)

- (2)
- (3)
- (4)
- (5)
- (6)
- (7)
- (8)

1.3.2 习题

1. 用充分条件、必要条件或充要条件填空:

- (1) $a-b=0$ 是 $a^2-b^2=0$ 的 _____.
- (2) $A=B$ 是 $A\subseteq B$ 的 _____.
- (3) $x\in M$ 是 $\{x\}\subseteq M$ 的 _____.
- (4) x 是矩形是 x 是平行四边形的 _____.
- (5) $xy>0$ 是 $x>0$ 且 $y>0$ 的 _____.
- (6) $x\in A\cup B$ 是 $x\in A\cap B$ 的 _____.
- (7) x 是等边三角形是 x 是等腰三角形的 _____.
- (8) 有一锐角为 60° 的等腰三角形是三角形为等边三角形的 _____.
- (9) m 是 2 的倍数是 m 是 4 的倍数的 _____.
- (10) 二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 有实数根是 $\Delta=b^2-4ac\geq 0$ 的 _____.

分析: (1)

- (2)
- (3)
- (4)
- (5)
- (6)
- (7)
- (8)
- (9)
- (10)

- 2. 已知 p 是 q 的必要条件, s 是 r 的充要条件, r 是 q 的充分条件, 求 p 是 s 的什么条件.

解:

1.4 复习参考题

1.4.1 选择题

1. 下列语句中,能构成集合的是().

- A. 会打篮球的学生 B. 您好吗?
C. 学习成绩好的学生 D. 大于5的偶数

分析:

2. 设集合 $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x | x > 4\}$, 则 $A \cap B = ()$.

- A. $\{4, 6, 8\}$ B. $\{6, 8\}$ C. $\{0, 2\}$ D. $\{x | x > 3\}$

分析:

3. 下列关系中,正确的是().

- A. $\{0\} = \emptyset$ B. $a = \{a\}$ C. $0 \in \emptyset$ D. $\emptyset \subseteq \{0\}$

分析:

4. 集合 $\{x | |x+3| = 5\}$ 用列举法表示为().

- A. $\{(-8, 2)\}$ B. $\{-8, 2\}$ C. $\{(-2, 8)\}$ D. $\{2\}$

分析:

5. 设集合 $P = \{x | x > \sqrt{3}\}$, $a = 2$, 则().

- A. $a \notin P$ B. $\{a\} \subseteq P$ C. $a \subseteq P$ D. $\{a\} \supseteq P$

分析:

6. $x \in A \cup B$ 是 $x \in A$ 的().

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充分必要条件 D. 非充分非必要条件

分析:

7. 集合 $\{x, y, z\}$ 的所有真子集个数是().

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

分析:

8. 已知全集 $U = \{a, b, c, d\}$, 集合 $A = \{b, d\}$, $B = \{a, d\}$, 则 $A \cap \complement_U B = ()$.

- A. $\{b\}$ B. $\{b, c\}$ C. $\{b, c, d\}$ D. $\{a, b, d\}$

分析:

9. 已知集合 $A = \{x | x > 1\}$, $B = \{x | -1 < x < 4\}$, 则 $A \cup B = ()$.

- A. $\{x | 1 < x < 4\}$ B. $\{x | x > -1\}$
C. $\{x | x > 1\}$ D. $\{x | -1 < x < 4\}$

分析:

● 10. 已知全集 $U = \{1, 2, 5, 6\}$, 集合 $A = \{2, 6\}$, $\complement_U A = \{x, 1\}$, 则 $x = ()$.

- A. 2 B. 5 C. 6 D. 无法确定

分析:

1.4.2 填空题

11. 用适当的符号($\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\supseteq$, $\subsetneq$, $\supsetneq$, $=$)填空:

- (1) -4 _____ $\{x | |x| < 3\}$; (2) b _____ $\{a, b, d\}$;
(3) $\{-1\}$ _____ $\{x | x(x+1)=0\}$; (4) $\emptyset$ _____ $\{x \in \mathbf{R} | x^2+1=0\}$;
(5) $A \cap B$ _____ B ; (6) $\{x | x \leq 0\}$ _____ $\{x | x < -2\}$.

分析:

12. 设集合 $A = \{x | x \text{ 是偶数}\}$, $B = \{x | x \text{ 是奇数}\}$, $C = \mathbf{Z}$, 则用 A, B 表示 $C =$ _____.

分析:

13. $x^2 + 2x - 15 = 0$ 是 $x = 3$ 的 _____ 条件.

分析:

14. 已知全集 $U = \{x \in \mathbf{Z} | |x| \leq 3\}$, 集合 $A = \{-2, -1, 3\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.

分析:

- 15. 列出满足 $\{2, 3\} \subseteq X \subsetneq \{0, 2, 3, 4\}$ 的所有集合 X _____.

分析:

1.4.3 解答题

16. 已知全集 $U = \{x \in \mathbf{N} \mid |x| \leq 8\}$, 集合 $M = \{1, 3, 5, 7\}$, $N = \{2, 5, 7\}$, 求 $M \cap N$, $M \cup N$, $\complement_U M \cup N$, $\complement_U (M \cap N)$.

解:

- 17. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $P = \{x \mid x \leq 2\}$, $Q = \{x \mid -1 \leq x < 4\}$, 求 $P \cap Q$, $P \cup Q$, $\complement_U P \cup Q$, $\complement_U (P \cap Q)$.

解:

- 18. 已知集合 $A = \{x \mid |x| = 3\}$, $B = \{x \mid x^2 - 3ax = 0\}$, 且 $A \cap B = \{-3\}$, 求 $A \cup B$.

解: