中等职业学校系列规划教材

数　　学

（上册）（第二版）

刘丹华　主编

清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

《数学(上册)(第二版)》是为中等职业教育数学课程编写的教材的上册部分，对应有《数学学习手册(上册)(第二版)》(ISBN:978-7-302-47302-2)。本书共有5章和3个知识链接。第1章介绍了集合的概念、基本运算及充要条件的判断；第2章介绍了不等式的基本性质、解法及应用；第3章介绍了函数的概念和基本性质、初等函数及反函数；第4章介绍了指数与对数的概念与运算，幂函数、指数函数和对数函数的概念、图像与性质；第5章介绍了数列、等差数列、等比数列的概念、性质、通项公式及前n项和公式。此外，根据现阶段中职生的数学基础实际情况，设置了3个新旧知识链接。知识链接A简单介绍了实数的有关概念与基本运算，知识链接B简单介绍了代数式的有关概念与基本运算，知识链接C简单介绍了方程与方程组的概念与常规解法。

本书内容结构设置合理，既遵循"教学大纲"和"考试大纲"要求，又符合中职生的学习规律与教学规律，并注重学生学科知识的学习与学习能力的培养。全书概念清晰严谨，定理与性质简洁明了，知识科学实用，文字简洁流畅；精选的例题与习题，易于学生巩固知识与解决问题能力的提升。本书既渗透了教法指点，又融入了学法指导，是一本能满足专业学习需要和升学考试要求的实用教材。

本书教学课件及相关资源可通过网站 http://www.tupwk.com.cn 免费下载。

图书在版编目(CIP)数据

数学. 上册 / 刘丹华　主编. —2版. —北京：清华大学出版社，2017
(中等职业学校系列规划教材)
ISBN 978-7-302-47301-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教材 Ⅳ. ①G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第124490号

责任编辑： 王　定　程　琪
封面设计： 周晓亮
版式设计： 思创景点
责任校对： 牛艳敏
责任印制：

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载： http://www.tup.com.cn，010-62794504
印 装 者：
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×260mm　　**印　　张：** 12　　**字　　数：** 242千字
版　　次： 2015年8月第1版　　2017年9月第2版　　**印　　次：** 2017年9月第1次印刷
印　　数： 1～6000
定　　价： 35.00元

产品编号：

本书编委会

主　编： 刘丹华

副主编： 黄迪君　王　伟　田淑文　鲍树林

编　委： 尚文婷　刘伟峰　于德林　张玉婷　李本红　谢　凯　杨贫智　缪　进　周笑嫒　丘　文　邹明华　孙泽生　钟伟明　张志芳　马　强

前　　言

本套教材是中等职业教育课程改革规划教材，是根据教育部颁布的《中等职业学校教学大纲》(以下简称“教学大纲”)的精神，以及多年来广东省中等职业学校的学科教学实践经验与学生的实际情况编写的。本套教材坚持“教学大纲”及《2017年广东省高等职业院校招收中等职业学校毕业生数学学科考试大纲》(以下简称“考试大纲”)对“课程教学目标”的定位要求，兼顾了专业教学与升学教学的需求，相应完成了《数学(第二版)》(上、下册)。每册教材配备了学习手册、电子教案及部分动画教学素材。教材内容的选择严格根据“教学大纲”与“考试大纲”规定的“教学内容的要求”“认知的要求”及“技能与能力的要求”。

本套教材包括以下书目：

《数学(上册)(第二版)》	ISBN：978-7-302-47301-5	定价：35.00元
《数学学习手册(上册)(第二版)》	ISBN：978-7-302-47302-2	定价：32.00元
《数学(下册)(第二版)》	ISBN：978-7-302-47295-7	定价：35.00元
《数学学习手册(下册)(第二版)》	ISBN：978-7-302-47300-8	定价：32.00元

本套教材主要体现了以下编写特色：

(1) 体现了基础性。在确保科学性的基础上，大幅度调整了教材难度，注重新旧知识的衔接，极大地减轻了学生的学习负担，增强了学生学习数学的自信心。

(2) 体现了分层教学的思想。考虑到学生的差异性与不同的教学目标要求，对知识应用的例题及跟踪练习的难度进行阶梯性设置，以适应不同层次学生的需求。其中，标示“●”的例题及跟踪练习是为满足学有余力或有升学要求的学生而设置的。

(3) 突出了教与学实践过程的有机结合。根据中职生的年龄特征和心理特点，以及课堂教学的基本理论，本套教材通过旧知识链接、小组互动、动动脑，以及说明、评注贯穿每小节的内容，并重视教学方法的指导，这样不仅引导教师合理地组织安排教学，而且帮助学生采用正确的学习方法学习数学。

(4) 突出了针对性。人性化结构模式，不仅可节省任课教师的教学设计时间，以便对中等职业教育数学学习困难生加强辅导力度，而且极大地方便了中职生课前预习、课后巩固复习和及时检查反馈。

(5) 突出了职业性。选择了与专业学习、日常生活、生产岗位及经济领域相关的素材，引入新知识学习，并体验利用数学知识解决实际问题。

(6) 突出了实用性。本套教材的学习手册不仅兼顾了普通配套练习的所有功能，而且每

章节配有学法指导，指导学生每学一节内容要及时梳理知识与总结解题方法，另增设课堂练习的配置，让学生能学会恰当的学习方式，并牢固掌握新知识及知识应用的方法。此外，本套教材编制了可修改的教学课件，不仅有新授课教学课件，而且有习题课与复习课的教学课件，每一小节教学课件还配有课堂练习的演讲答案。相关资源可通过 www.tupwk.com.cn 免费下载。

本套教材编写的依据为：不仅反复研读“教学大纲”与“考试大纲”，而且调研并分析近年来中等职业教育数学教学的实际情况，了解教学主体与客体喜爱哪种类型的教材，使本套教材不仅方便老师教学，也方便学生自学，以谋求教材结构的最优化，既减轻了学生的学习负担和老师的教学负担，又实现了课堂学科教学效率的最大化。

根据上述编写思路，本套教材每章节分两部分，一部分是教材主体内容，另一部分是教法与学法指导。主体内容由观察与思考、新知识学习、新知识应用组成，每一节还配有本节知识的综合习题，每一章配有本章知识的复习参考题及阅读材料。每小节新知识学习配有说明，以强化新知识的理解；每小节新知识应用配有评注，以揭示解题方法与思想，另外配备的跟踪练习是让学生模仿并理解每种题型的解题方法。无论是教材章节内容还是学习手册内容均能紧扣“教学大纲”和“考试大纲”要求，不仅有助于学生课前预习、课中学习、课后复习，而且有利于学生掌握扎实的基础知识，把握学习新知识的重点与难点，提高数学学科的学习能力与技能。此外还注重学科学习的实效性，收录了适量的应用型和能力型练习题，配有解题思路与方法的指导，使教师和学生在整个学习过程中能够做到“讲练结合，学练结合”，并能及时强化学习效果，提高应用数学知识解决问题的能力，激发学生对数学学科的学习兴趣。

本书为《数学(上册)(第二版)》，包含集合与充要条件、不等式、函数、指数函数与对数函数、数列 5 个章节及 3 个知识链接。完成本书内容需要 66 学时，学时分配如下表所示。

学时分配	第一章　集合与充要条件	第二章 不等式	第三章 函　数	第四章　指数函数与对数函数	第五章 数　列
学时数	10	10	12	12	10
机动学时数	12				

本书由刘丹华担任主编。清华大学出版社对本套教材的编写与出版提供了很大的帮助，在此深表感谢！

由于编者的学术水平有限，书中难免存在不足不处，恳请广大读者和专家提出宝贵的意见和建议，反馈邮箱 383270415@qq.com，电话 01062794504。

编　者

2017 年 5 月

目　　录

第 1 章　集合与充要条件

1.1　集合及集合之间的关系

1.1.1　集合的有关概念

观察与思考

如图 1－1 所示，给出了五种水果：香蕉、苹果、雪梨、水蜜桃、西瓜．这五种水果组成了常见水果的集合，香蕉、苹果、雪梨、水蜜桃、西瓜都是这个集合的元素．

图 1－1

旧知识链接：

阅读教材上册第 125～129 页知识链接 A 有关实数概念的内容.

新知识学习

1. 集合的概念及性质

（1）集合的概念

由某些确定的对象构成的整体叫做**集合**．构成集合的每个对象都叫做**集合的元素**．

例如：① 某中等职业学校一年级学生的全体构成一个集合，其中每个学生都是这个集合的元素；

② 偶数全体构成一个集合，每个偶数都是这个集合的元素；

小组互动：

列举几个集合的实例.

③ 平面上与定点距离等于定长的点的全体构成一个集合，这个集合是圆，该圆上的每个点都是这个集合的元素．

一个集合，通常用大写英文字母 A，B，C，…表示，它的元素通常用小写英文字母 a，b，c，…表示．

（2） 集合的性质

① 确定性

对于给定的集合，集合中的元素是确定的．

例如：“一些高个子学生”“一些很小的数”不能构成集合，因为整体对象不确定．

② 互异性

在同一个集合中，集合中的每个元素都是不同的对象．

③ 无序性

对于给定的集合，集合中的元素不考虑顺序关系．

例如：由 1，2，3 构成的集合与由 2，3，1 构成的集合表示同一个集合．

2. 特殊的集合

（1） 常用数集

我们约定用一些大写英文字母表示常用到的一些数集．

非负整数全体构成的集合，叫做**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$；

在自然数集内排除 0 的集合，叫做**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^*$；

整数全体构成的集合，叫做**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；

有理数全体构成的集合，叫做**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；

实数全体构成的集合，叫做**实数集**，记作 $\mathbf{R}$．

说明： 正数集在相应数集符号的右下角加上“+”，负数集在相应数集符号的右下角加上“－”.

例如：正整数集也可以记为 $\mathbf{Z}_+$，负实数集记为 $\mathbf{R}_-$．

（2） 有限集和无限集

含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无限个元素的集合叫做**无限集**．

例如：“集合的概念”中例①是有限集，例②、例③是无限集．

（3） 空集

不含有任何元素的集合叫做**空集**．空集用符号 $\varnothing$ 表示．

例如：一元二次方程 $x^2+1=0$ 的解集为 $\varnothing$.

小组互动：

$0\in\varnothing$？

3. 元素与集合的关系

如果元素 a 是集合 A 中的元素，就说 **a 属于集合 A**，记作 $a\in A$；

如果元素 a 不是集合 A 中的元素，就说 **a 不属于集合 A**，记作 **$a \notin A$**.

例如：$-\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$，$-3 \notin \mathbf{N}$.

新知识应用

例题 1　下列语句是否能确定一个集合？

(1) 周长为 10m 的三角形；

(2) 小于 6 的自然数的全体；

(3) 某中职学校二年级会唱歌的学生全体；

(4) 奇数的全体；

(5) 一些很大的数的全体.

解： 能确定一个集合的是(1)、(2)、(4)，因为它们的对象都是确定的；但(3)、(5)所陈述的对象不确定，故其整体不能构成集合.

跟踪练习 1　下列语句是否能确定一个集合？

(1) 某中职学校技能水平高的学生；

(2) 小于 0 的实数；

(3) 电脑专业开设课程的全体；

(4) 正方形的全体；

(5) 本班高个子学生的全体.

动动脑：

归纳判断构成集合的关键条件.

例题 2　用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1) 0 ________ $\mathbf{Z}$；　　(2) -1 ________ $\mathbf{N}$；

(3) $-\sqrt{3}$ ________ $\mathbf{R}$；　　(4) π ________ $\mathbf{Q}$.

解： (1) $\in$；(2) $\notin$；(3) $\in$；(4) $\notin$.

跟踪练习 2　用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1) 0 ________ $\mathbf{N}$；　　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ________ $\mathbf{Q}$；

(3) π ________ $\mathbf{R}$；　　(4) 0 ________ $\mathbf{Z}_+$.

动动脑：

归纳判断元素与集合关系的常规方法.

1.1.2 集合的表示方法

旧知识链接：

阅读教材上册第161～162页与第173～174页知识链接C有关一元一次方程及二元一次方程组的内容．

观察与思考

集合是近代数学中的一个最基本的概念，在今后的数学学习中，我们都要用到它．那怎样表示一个集合呢？

新知识学习

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫做**列举法**．一般格式是$\{a, b, c, \cdots\}$．

例如：(1) 由1，3，5，7这几个数组成的集合，可表示为$\{1, 3, 5, 7\}$；

(2) 偶数集可表示为$\{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$；

(3) 不大于100的正整数集合可表示为$\{1, 2, 3, \cdots, 99, 100\}$；

(4) 中国古代的四大发明构成的集合，可以表示为{指南针，造纸术，活字印刷术，火药}．

小组互动：

$a=\{a\}$？

说明：(1) 当集合元素不多时，常用列举法表示；

(2) 由集合的无序性可知，集合$\{a, b, c\}$与$\{c, b, a\}$表示同一个集合．

2. 描述法

对于给定的集合A，集合A的任一元素x都具有共同性质$p(x)$，把集合中的元素所具有的共同性质描述出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫做**描述法**．一般格式是$\{x\in A \mid p(x)\}$．

例如：(1) 方程$x^2-2x=0$的解集可表示为集合$\{x\in \mathbf{R} \mid x^2-2x=0\}$；

小组互动：

$\{x \mid x=2n+1, n\in \mathbf{Z}\}$能否写成$\{x \mid x=2n+1\}$？

(2) 奇数集可表示为$\{x \mid x \text{ 是奇数}\}$或$\{x \mid x=2n+1, n\in \mathbf{Z}\}$；

(3) 小于3的全体实数构成的集合，可以表示为$\{x\in \mathbf{R} \mid x<3\}$．

说明：(1) 当集合元素较多时，常用描述法表示；

(2) 我们约定当$x\in \mathbf{R}$时，可略去$x\in \mathbf{R}$，简写为x．例如：$\{x\in \mathbf{R} \mid x<3\}$可以表示为$\{x \mid x<3\}$．

新知识应用

例题3 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid x \text{ 是大于}-2\text{ 且小于 }5\text{ 的自然数}\}$；

(2) $\{x \mid x^2+x-6=0\}$；

(3) 方程组$\begin{cases}2x-y=5,\\ x+y=1\end{cases}$的解集．

解：（1）$\{0,1,2,3,4\}$；

（2）解方程 $x^2+x-6=0$ 得 $x_1=-3$，$x_2=2$，故方程的解集为 $\{-3,2\}$；

（3）解方程组 $\begin{cases}2x-y=5,\\x+y=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}$ 故方程组的解集为 $\{(2,-1)\}$.

评注：方程组的解写在大括号内，需要用小括号括起来，例如例题 3 的第(3)题.

跟踪练习 3　用列举法表示下列集合：

（1）绝对值小于 4 的整数构成的集合；

（2）方程 $|x+2|=3$ 的解集；

（3）方程组 $\begin{cases}x+y=5,\\3x+y=1\end{cases}$ 的解集.

动动脑：

归纳用列举法表示集合的常规方法与技巧.

例题 4　用描述法表示下列集合：

（1）大于 0 且小于 3 的实数组成的集合；

（2）不等式 $2x-3\geqslant 0$ 的解集；

（3）平面 α 内到定点 O 距离等于 6 的点组成的集合；

（4）由平面直角坐标系中第二象限的点组成的集合.

解：（1）$\{x\mid 0<x<3\}$；

（2）解不等式 $2x-3\geqslant 0$ 得 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$，故不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\, x\geqslant\dfrac{3}{2}\right\}$；

（3）$\{P\in$ 平面 $\alpha\mid |PO|=6$，O 为 α 内的定点$\}$；

（4）$\{(x,y)\mid x<0,\ y>0\}$.

评注：（1）在用描述法表示集合过程中，忌将 $\{x\in A\mid p(x)\}$ 写成 $\{p(x)\}$，例如将 $\{x\mid 0<x<3\}$ 错写成 $\{0<x<3\}$；

（2）在几何中，通常用大写字母表示点(元素)，用小写字母表示点的集合.

跟踪练习 4　用描述法表示下列集合：

（1）被 3 除余 2 的整数组成的集合；

（2）不等式 $3-4x>0$ 的解集；

（3）平面 α 内到两个定点 A、B 距离相等的点组成的集合；

（4）由平面直角坐标系中第三象限的点组成的集合.

动动脑：

归纳用描述法表示集合的常规方法与技巧.

1.1.3 集合之间的关系

旧知识链接：

阅读教材上册第 164～170 页知识链接 C 有关解一元二次方程与分式方程的内容.

观察与思考

(1) $A=\{b, c\}$，$B=\{a, b, c, d\}$；

(2) $P=\{$等边三角形$\}$，$Q=\{$等腰三角形$\}$；

(3) $M=\{-3, 5\}$，$N=\{x \mid x^2-2x-15=0\}$.

观察以上各组集合，它们之间有什么关系？

容易看出，集合 A 的任一个元素都是集合 B 的元素，集合 P 的任一个元素都是集合 Q 的元素，集合 M 的任一个元素都是集合 N 的元素．

新知识学习

1. 子集

(1) 子集的概念

如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

(2) 子集的性质

小组互动：

为什么空集是任何集合的子集？

依上述定义可知，子集具有以下性质：

① 任何一个集合 A 都是它本身的子集，即 $A\subseteq A$；

② 空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$；

③ 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

2. 真子集

(1) 真子集的概念

如果集合 A 是集合 B 的子集，并且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$，读作“A 真包含于 B”或“B 真包含 A”.

例如：集合 $A=\{3, 4\}$ 和 $B=\{2, 3, 4\}$，A 是 B 的子集，但 $2\in B$，$2\notin A$，所以 A 是 B 的真子集，即 $A\subsetneqq B$．

说明： 真子集是一种特殊的子集关系．

常用平面上一个封闭曲线的内部表示一个集合(如图 1－2(1)). 如果集合 A 是 B 的真子集，那么把表示 A 的区域画在表示 B 的区域的内部(如图 1－2(2))，这种图形叫做**维恩(Venn)图**．

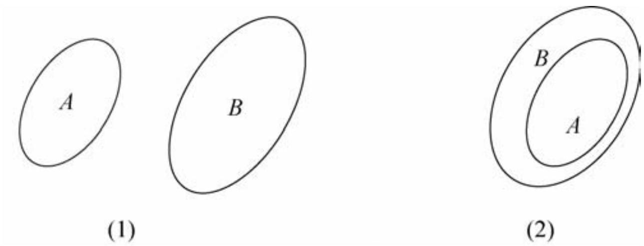

图 1－2

（2）真子集的性质

依上述定义可知，真子集具有以下性质：

① 一个集合不是它本身的真子集；

② 空集是任何非空集合的真子集，即$\varnothing \subsetneqq A(A\neq\varnothing)$；

③ 若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

小组互动：

为什么空集不是任何集合的真子集？

3. 集合的相等

如果两个集合的元素完全相同，那么就说这两个**集合相等**．集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$.

例如：已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-1=0\}$，$B=\{-1，1\}$，它们的元素完全相同，只是表示方法不同．

说明：由集合相等的定义可知，如果 $A\subseteq B$，又 $B\subseteq A$，那么 $A=B$；反之，如果 $A=B$，那么 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$.

小组互动：

$\{0\}=\varnothing$？

新知识应用

例题 5　说出以下两个集合之间的关系：

（1）$A=\{0，1，2，4\}$，$B=\{2，4\}$；

（2）$C=\{x\,|\,x^2=-1\}$，$D=\varnothing$；

（3）$E=\mathbf{Z}_+$，$F=\mathbf{N}$；

●（4）$M=\{x\,|\,x$ 是平行四边形$\}$，$N=\{x\,|\,x$ 是菱形$\}$.

解：（1）因为集合$\{2，4\}$的元素都是集合$\{0，1，2，4\}$的元素，且集合 A 的元素 0，1 不属于集合 B，所以 $A\supsetneqq B$.

（2）因为方程 $x^2=-1$ 无解，所以 $C=\{x\,|\,x^2=-1\}=\varnothing$，即 $C=D$.

（3）因为正整数集 $\mathbf{Z}_+$ 的元素都在自然数集 $\mathbf{N}$ 中，且自然数集 $\mathbf{N}$ 中元素 0 不属于正整数集 $\mathbf{Z}_+$，所以 $E\subsetneqq F$.

●（4）因为集合$\{x\,|\,x$ 是菱形$\}$内的元素在集合$\{x\,|\,x$ 是平行四边形$\}$内，但集合$\{x\,|\,x$ 是平行四边形$\}$内的部分元素（邻边不相等的平行四边形）不在集合$\{x\,|\,x$ 是菱形$\}$内，所以 $M\supsetneqq N$.

动动脑：

归纳集合之间关系的判断方法与技巧.

跟踪练习 5 说出以下两个集合之间的关系：

(1) $A=\{x \mid x<2\}$，$B=\{x \mid -1<x\leqslant 0\}$；

(2) $C=\{x \mid x^2+3x=0\}$，$D=\{0, -3\}$；

(3) $M=\mathbf{Q}$，$N=\mathbf{R}$；

(4) $P=\{x \mid x$ 是斜三角形$\}$，$Q=\{x \mid x$ 是锐角三角形$\}$.

例题 6 用适当的符号($\in$，$\notin$，$=$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$)填空：

(1) 2 ________ $\{x \mid x>0\}$；

(2) 0 ________ $\{x \mid x^2+5x+4=0\}$；

(3) $\{a, c\}$ ________ $\{a, b, c\}$；

(4) $\{x \mid |x-1|=2\}$ ________ $\{-1, 3\}$；

(5) $\{0\}$ ________ $\varnothing$；

(6) $\{x \mid x$ 是正方形$\}$ ________ $\{x \mid x$ 是矩形$\}$.

解：(1) $\in$；(2) $\notin$；(3) $\subsetneqq$；(4) $=$；(5) $\supsetneqq$；(6) $\subsetneqq$.

动动脑：

如何区分元素与集合、集合与集合的关系？

跟踪练习 6 用适当的符号($\in$，$\notin$，$=$，$\subseteq$，$\supseteq$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$)填空：

(1) 0 ________ $\{0\}$；

(2) 10 ________ $\{x \mid \sqrt{x-1}=3\}$；

(3) $\left\{x \,\middle|\, \dfrac{x^2+2x}{x+2}=0\right\}$ ________ $\{-2, 0\}$；

(4) $\varnothing$ ________ A；

(5) $\{x \mid x>0\}$ ________ $\{x \mid x\geqslant 2\}$；

(6) $\{x \mid x$ 能被 2 整除$\}$ ________ $\{x \mid x$ 能被 6 整除$\}$.

例题 7 写出集合 $A=\{x, y, z\}$的所有子集和真子集.

解：集合 A 的所有子集是：$\varnothing$，$\{x\}$，$\{y\}$，$\{z\}$，$\{x, y\}$，$\{x, z\}$，$\{y, z\}$，$\{x, y, z\}$. 在上述子集中，除去集合 A 本身，即$\{x, y, z\}$，剩下的都是 A 的真子集.

动动脑：

归纳写有限集合的所有子集与真子集的常规方法与技巧.

跟踪练习 7 写出集合 $A=\{1, 2, 3\}$的所有子集和真子集.

1.2　集合的运算

1.2.1　交集

观察与思考

已知集合 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{a, c, d, e\}$，由这两个集合的所有公共元素构造出一个新的集合$\{a, c, d\}$，这个集合就称为 A 与 B 的交集．

新知识学习

1. 交集的概念

对于两个给定的集合 A，B，由既属于 A 又属于 B 的所有公共元素所构成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B".

例如：观察与思考中 $A\cap B=\{a, b, c, d\}\cap\{a, c, d, e\}=\{a, c, d\}$.

说明：两个集合的交集有以下四种情况，可用图 1－3 所示的阴影部分表示．

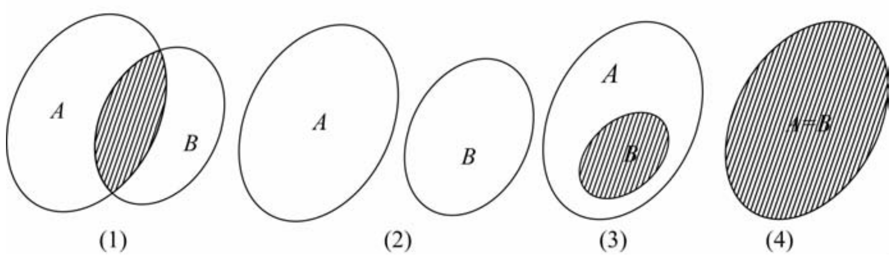

图 1－3

2. 交集的性质

由交集的定义可知，对于任意两个集合 A，B，都有

（1）$A\cap B=B\cap A$；

（2）$A\cap A=A$；

（3）$A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$；

（4）如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cap B=A$．

旧知识链接：

复习特殊三角形、平行四边形及特殊平行四边形的有关概念与性质．

小组互动：

结合交集的概念，探讨并理解交集的性质.

新知识应用

例题 1 已知集合 $A=\{0，2，4，7，9\}$，$B=\{2，3，4，5\}$，求 $A\cap B$.

解： $A\cap B=\{0，2，4，7，9\}\cap\{2，3，4，5\}=\{2，4\}$.

动动脑： 归纳求有限数集的交集的常规方法与技巧.

跟踪练习 1 已知集合 $A=\{a，b，c，d，e\}$，$B=\{b，e，f\}$，求 $A\cap B$.

例题 2 已知集合 $A=\{x\,|\,x$ 是平行四边形$\}$，$B=\{x\,|\,x$是矩形$\}$，$C=\{x\,|\,x$ 是菱形$\}$，求 $A\cap B$，$A\cap C$，$B\cap C$.

解： $A\cap B=\{x\,|\,x$ 是平行四边形$\}\cap\{x\,|\,x$是矩形$\}=\{x\,|\,x$ 是矩形$\}$；

$A\cap C=\{x\,|\,x$ 是平行四边形$\}\cap\{x\,|\,x$是菱形$\}=\{x\,|\,x$ 是菱形$\}$；

$B\cap C=\{x\,|\,x$ 是矩形$\}\cap\{x\,|\,x$是菱形$\}=\{x\,|\,x$ 是正方形$\}$.

动动脑： 归纳求几何图形集合的交集、数集的交集的常规方法与技巧.

跟踪练习 2 设集合 $A=\{x\,|\,x$ 是奇数$\}$，$B=\{x\,|\,x$ 是偶数$\}$，$Z=\{x\,|\,x$ 是整数$\}$，求 $A\cap Z$，$B\cap Z$，$A\cap B$.

例题 3 设集合 $A=\{x\,|\,x\geqslant 2\}$，$B=\{x\,|\,-1\leqslant x<4\}$，求 $A\cap B$，并在数轴上表示.

解： $A\cap B=\{x\,|\,x\geqslant 2\}\cap\{x\,|\,-1\leqslant x<4\}=\{x\,|\,2\leqslant x<4\}$.

如图 1－4 的阴影部分所示.

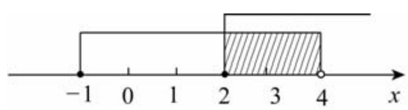

图 1－4

动动脑： 归纳求不等式解集的交集的常规方法与技巧.

跟踪练习 3 设集合 $A=\{x\,|\,x<5\}$，$B=\{x\,|\,-1<x\leqslant 3\}$，求 $A\cap B$，并在数轴上表示.

1.2.2　并集

观察与思考

已知集合 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{a, c, d, e\}$，由这两个集合的所有元素构造出一个新的集合 $\{a, b, c, d, e\}$，这个集合就称为 A 与 B 的并集.

旧知识链接：

阅读教材上册第 9 页有关交集的内容.

新知识学习

1. 并集的概念

对于两个给定的集合 A，B，把它们所有的元素合并在一起构成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B".

例如：观察与思考中 $A\cup B=\{a, b, c, d\}\cup\{a, c, d, e\}=\{a, b, c, d, e\}$.

说明：集合 A 与 B 的并集有以下四种情况，可用图 1－5 中的阴影部分表示.

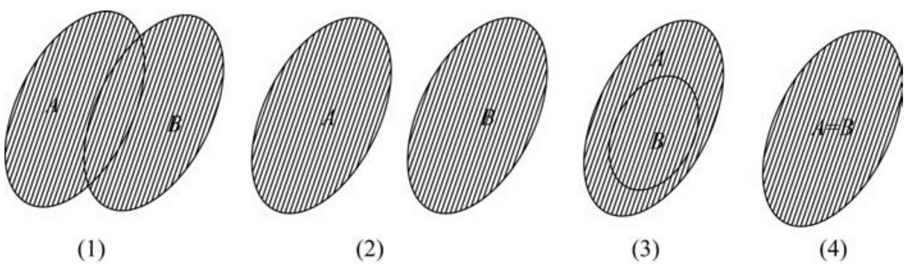

图 1－5

2. 并集的性质

由并集的定义可知，对于任意两个集合 A，B，都有

（1）$A\cup B=B\cup A$；

（2）$A\cup A=A$；

（3）$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$；

（4）如果 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$.

小组互动：

结合并集的概念，探讨并理解并集的性质.

新知识应用

例题 4　已知集合 $A=\{0, 2, 4, 7, 9\}$，$B=\{2, 3, 4, 5\}$，求 $A\cup B$.

解：$A\cup B=\{0, 2, 4, 7, 9\}\cup\{2, 3, 4, 5\}=\{0, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

跟踪练习 4　已知集合 $A=\{a, b, c, d, e\}$，$B=\{b, e, f\}$，求 $A\cup B$.

动动脑：

归纳求有限数集的并集的常规方法与技巧.

例题 5 已知集合 $A=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$，$B=\{x\mid x$是矩形$\}$，$C=\{x\mid x$ 是菱形$\}$，求 $A\cup B$，$A\cup C$，$B\cup C$.

解： $A\cup B=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}\cup\{x\mid x$是矩形$\}=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$；

$A\cup C=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}\cup\{x\mid x$是菱形$\}=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$；

$B\cup C=\{x\mid x$ 是矩形$\}\cup\{x\mid x$是菱形$\}=\{x\mid x$是矩形或菱形$\}$.

动动脑：

归纳求几何图形集合的并集、数集的并集的常规方法与技巧.

跟踪练习 5 设集合 $A=\{x\mid x$ 是奇数$\}$，$B=\{x\mid x$ 是偶数$\}$，$Z=\{x\mid x$ 是整数$\}$，求 $A\cup Z$，$B\cup Z$，$A\cup B$.

例题 6 设集合 $A=\{x\mid x\geqslant 2\}$，$B=\{x\mid -1\leqslant x<4\}$，求 $A\cup B$，并在数轴上表示.

解： $A\cup B=\{x\mid x\geqslant 2\}\cup\{x\mid -1\leqslant x<4\}=\{x\mid x\geqslant -1\}$.

如图 1－6 的阴影部分所示.

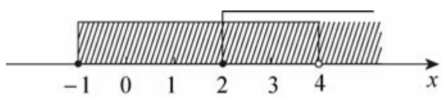

图 1－6

动动脑：

归纳求不等式解集的并集的常规方法与技巧.

跟踪练习 6 设集合 $A=\{x\mid x<5\}$，$B=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$，求 $A\cup B$，并在数轴上表示.

●**例题 7** 已知集合 $A=\{a, b, d\}$，$B=\{c, e, f, g\}$，$C=\{a, c, d, e\}$，求 $(A\cup B)\cap C$.

解： $(A\cup B)\cap C=(\{a, b, d\}\cup\{c, e, f, g\})\cap\{a, c, d, e\}$

$=\{a, b, c, d, e, f, g\}\cap\{a, c, d, e\}$

$=\{a, c, d, e\}$.

动动脑：

归纳集合交集与并集综合运算的常规方法与技巧.

●**跟踪练习 7** 已知集合 $A=\{0, 2, 4\}$，$B=\{0, 3, 4, 6\}$，$C=\{2, 3, 4, 5\}$，求 $(A\cap B)\cup C$.

1.2.3　补集

观察与思考

某数学学习兴趣小组学生的集合为 $U=\{$王晓明，张军，吴能，刘海，宋云，黄亮，何佳，李伟$\}$，其中在数学知识应用大赛中获奖的学生集合为 $A=\{$张军，刘海，何佳$\}$，则没有获奖的学生集合为$\{$王晓明，吴能，宋云，黄亮，李伟$\}$，则这个集合称为 A 的补集.

旧知识链接：

阅读教材上册第 125～129 页知识链接 A 中有关实数的概念，并复习三角形分类的有关内容.

新知识学习

1. 补集的概念

（1） 全集

在研究集合与集合之间的关系时，如果一些集合都是某一给定集合的子集，那么称这个给定的集合为这些集合的**全集**，通常用 U 表示.

例如：在研究数集时，常把实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集.

（2） 补集

如果 A 是全集 U 的一个子集，由 U 中的所有不属于 A 的元素构成的集合，叫做 A 在 U 中的**补集**，记作 $\complement_U A$，读作“A 在 U 中的补集”.

例如：已知 $U=\{x|x$ 是整数$\}$，$A=\{x|x$ 是奇数$\}$，则 $\complement_U A=\{x|x$ 是偶数$\}$.

说明： 集合 A 的补集的情况，如图 1－7 中的阴影表示.

2. 补集的性质

由补集定义可知，对于任意集合 A，都有：

（1） $A\cup \complement_U A=U$；

（2） $A\cap \complement_U A=\varnothing$；

（3） $\complement_U(\complement_U A)=A$；

（4） $\complement_U U=\varnothing$，$\complement_U \varnothing=U$.

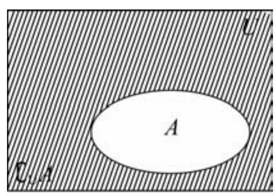

图 1－7

小组互动：

结合补集的概念，探讨并理解补集的性质.

新知识应用

例题 8　已知全集 $U=\{x\in\mathbf{N}|x\leqslant 7\}$，集合 $A=\{1, 3, 5\}$，求 $\complement_U A$，$A\cap \complement_U A$，$A\cup \complement_U A$.

解： 因为 $U=\{x\in\mathbf{N}|x\leqslant 7\}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，

$\complement_U A=\complement_U\{1, 3, 5\}=\{0, 2, 4, 6, 7\}$，

所以 $A\cap \complement_U A=\{1, 3, 5\}\cap\{0, 2, 4, 6, 7\}=\varnothing$，

$A\cup \complement_U A=\{1, 3, 5\}\cup\{0, 2, 4, 6, 7\}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}=U$.

动动脑：

归纳求有限数集的补集的常规方法与技巧.

跟踪练习 8　已知全集 $U=\{a, b, c, d, e, f\}$，集合 $A=\{b, d, f\}$，求 $\complement_U A$，$A\cap \complement_U A$，$A\cup \complement_U A$.

例题 9　已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\mathbf{Q}$，求 $\complement_U A$.

解： $\complement_U A=\complement_U \mathbf{Q}=\{x\mid x$ 是无理数$\}$.

动动脑：

归纳求几何图形集合的补集、数集的补集的常规方法与技巧.

跟踪练习 9　已知全集 $U=\{x\mid x$ 是三角形$\}$，集合 $P=\{x\mid x$ 是直角三角形$\}$，求 $\complement_U P$.

例题 10　已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x\geqslant 0\}$，求 $\complement_U A$，并在数轴上表示出来.

解： $\complement_U A=\{x\mid x<0\}$，如图 1－8 的阴影部分所示.

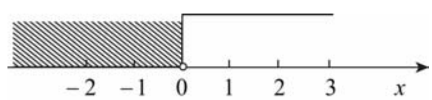

图 1－8

动动脑：

归纳求不等式解集的补集的常规方法与技巧.

跟踪练习 10　已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x<4\}$，求 $\complement_U A$ 并在数轴上表示出来.

例题 11　已知全集 $U=\{-4, 0, 2a\}$，集合 $A=\{0, a-2\}$，$\complement_U A=\{-4\}$，求 a.

解： 因为 $U=\{-4, 0, 2a\}=\{0, a-2\}\cup\{-4\}=\{-4, 0, a-2\}$，所以 $2a=a-2$，解得 $a=-2$.

动动脑：

归纳利用补集的性质确定集合中未知元素的常规方法与技巧.

跟踪练习 11　已知全集 $U=\{0, 2, 4\}$，集合 $P=\{4, |x-1|\}$，$\complement_U P=\{0\}$，求 x.

例题 12　设全集 $U=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x|\leqslant 3\}$，集合 $A=\{-2, 0, 3\}$，$B=\{0, 2, 3\}$，求 $\complement_U A\cup\complement_U B$，$\complement_U A\cap\complement_U B$，$\complement_U(A\cap B)$，$\complement_U(A\cup B)$.

解： $U=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,|x|\leqslant 3\}=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

因为 $\complement_U A=\complement_U\{-2,\ 0,\ 3\}=\{-3,\ -1,\ 1,\ 2\}$，

$\complement_U B=\complement_U\{0,\ 2,\ 3\}=\{-3,\ -2,\ -1,\ 1\}$，

所以 $\complement_U A\cup\complement_U B=\{-3,\ -1,\ 1,\ 2\}\cup\{-3,\ -2,\ -1,\ 1\}$

$=\{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2\}$，

$\complement_U A\cap\complement_U B=\{-3,\ -1,\ 1,\ 2\}\cap\{-3,\ -2,\ -1,\ 1\}$

$=\{-3,\ -1,\ 1\}$.

又因为$A\cap B=\{-2,\ 0,\ 3\}\cap\{0,\ 2,\ 3\}=\{0,\ 3\}$，

$A\cup B=\{-2,\ 0,\ 3\}\cup\{0,\ 2,\ 3\}=\{-2,\ 0,\ 2,\ 3\}$，

所以 $\complement_U(A\cap B)=\complement_U\{0,\ 3\}=\{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2\}$，

$\complement_U(A\cup B)=\complement_U\{-2,\ 0,\ 2,\ 3\}=\{-3,\ -1,\ 1\}$.

●**评注：** 集合的交、并、补运算满足 $\complement_U A\cap\complement_U B=\complement_U(A\cup B)$，$\complement_U A\cup\complement_U B=\complement_U(A\cap B)$.

●**跟踪练习 12**　设全集 $U=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x<6\}$，集合 $A=\{0,\ 1,\ 3\}$，$B=\{0,\ 1,\ 4\}$，求 $\complement_U A\cup\complement_U B$，$\complement_U A\cap\complement_U B$，$\complement_U(A\cap B)$，$\complement_U(A\cup B)$.

动动脑：

归纳有限数集综合运算的常规方法与技巧.

●●**例题 13**　设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|-1\leqslant x<3\}$，$B=\{x\,|\,x<2\}$，求 $A\cap\complement_U B$，$\complement_U A\cap\complement_U B$.

解： $A\cap\complement_U B=\{x\,|-1\leqslant x<3\}\cap\complement_U\{x\,|\,x<2\}$

$=\{x\,|-1\leqslant x<3\}\cap\{x\,|\,x\geqslant 2\}$

$=\{x\,|\,2\leqslant x<3\}$，

$\complement_U A\cap\complement_U B=\complement_U(A\cup B)$

$=\complement_U(\{x\,|-1\leqslant x<3\}\cup\{x\,|\,x<2\})$

$=\complement_U\{x\,|\,x<3\}$

$=\{x\,|\,x\geqslant 3\}$.

●●**跟踪练习 13**　设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|-2\leqslant x<5\}$，$B=\{x\,|\,x>-1\}$，求 $A\cup\complement_U B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$.

动动脑：

归纳不等式解集综合运算的常规方法与技巧.

1.3 充要条件

旧知识链接：

阅读教材上册第 125～129 页知识链接 A 有关实数的内容，并复习平行四边形与特殊平行四边形的有关内容.

观察与思考

（1）由条件 $x>0$ 成立可以推出结论 $x>-1$ 成立；

（2）由条件“x 是有理数”成立不能推出结论“x 是分数”成立，但由结论“x 是分数”成立可推出条件“x 是有理数”成立；

（3）由条件“对角线互相平分的四边形”成立能推出结论“四边形为平行四边形”成立，且由结论“四边形为平行四边形”成立也能推出条件“对角线互相平分的四边形”成立.

新知识学习

1. 充分条件与必要条件

设条件 p 和结论 q.

如果条件 p 成立能推出结论 q 成立，就说条件 p 是结论 q 的**充分条件**，记作 $p\Rightarrow q$，读作“p 推出 q”.

例如：观察与思考(1) 中 $x>0$ 是 $x>-1$ 的充分条件.

如果结论 q 成立能推出条件 p 成立，就说条件 p 是结论 q 的**必要条件**，记作 $p\Leftarrow q$，读作“q 推出 p”.

例如：观察与思考(2)中“x 是有理数”是“x 是分数”的必要条件.

说明：（1）当 p 是 q 的充分条件时，也可以说 q 是 p 的必要条件，例如 $x>0$ 是 $x>-1$ 的充分条件，也可以说 $x>-1$ 是 $x>0$ 的必要条件；

（2）下列三句话表示同一个意思：

① $p\Rightarrow q$；

② p 是 q 的充分条件；

③ q 是 p 的必要条件.

2. 充要条件

小组互动：

通过列举实例，探讨并理解充分条件、必要条件及充要条件的概念.

如果 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$，那么就说 p 是 q 的，简称**充分必要条件**，记作 $p\Leftrightarrow q$.

例如：观察与思考(3)中“四边形为平行四边形”是“对角线互相平分的四边形”的充要条件.

说明：（1）如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件；

（2）p 是 q 的充要条件，又常说成 q 当且仅当 p，或 p 与 q 等价．

新知识应用

例题 1　用充分条件、必要条件、充要条件填空：

（1）$x=y$ 是 $x^2=y^2$ 的________；

（2）“x 是自然数”是 x“是整数”的________；

（3）$x^2-9=0$ 是 $x=3$ 的________；

（4）$x>2$ 是 $x>3$ 的________；

（5）$A=\varnothing$是 $A\cap B=\varnothing$的________；

（6）“ 一个内角为直角的平行四边形”是“四边形为矩形”的________．

解：（1）当 $x=y$ 成立时，可推出 $x^2=y^2$ 成立；但 $x^2=y^2$ 成立时，不能推出 $x=y$，可能 $x=-y$. 所以应填充分条件．

（2）若 x 是自然数，则 x 一定是整数；但若 x 是整数，x 不一定是自然数．所以应填充分条件．

（3）因为 $x^2-9=0$ 等价于 $x=-3$ 或 $x=3$，则 $x^2-9=0$ 成立不一定能推出 $x=3$ 成立，但 $x=3$ 成立可推出 $x^2-9=0$ 成立，所以应填必要条件．

（4）当 $x>2$ 成立时，不能推出 $x>3$ 成立；而当 $x>3$ 成立时，能推出 $x>2$ 成立．所以应填必要条件.

（5）当 $A=\varnothing$成立时，可推出 $A\cap B=\varnothing$；但若 $A\cap B=\varnothing$成立，不能推出 $A=\varnothing$. 所以应填充分条件．

（6）由矩形的判定及性质定理可知，“一个内角为直角的平行四边形”是“四边形为矩形”的充要条件．

跟踪练习 1　用充分条件、必要条件、充要条件填空：

（1）$x<-1$ 是 $x<0$ 的________；

（2）$a^2-4=0$ 是 $a-2=0$ 的________；

（3）“x 是实数”是“x 是无理数”的________；

（4）“四边形 $ABCD$ 是正方形是四边形”的“四边相等”的________；

（5）$x^2+y^2=0$ 是 $x=0$ 且 $y=0$ 的________；

（6）“对角线垂直且平分的四边形”是“四边形为菱形”的________．

动动脑：

归纳充分条件、必要条件与充要条件的判断方法与技巧.

例题 2 已知 p 是 q 的充分条件，s 是 r 的必要条件，p 是 s 的充要条件，求 q 与 r 的关系.

解： 根据已知可得

$$p \Rightarrow q，r \Rightarrow s，p \Leftrightarrow s，$$

所以 $r \Rightarrow s \Leftrightarrow p \Rightarrow q$，

所以 $r \Rightarrow q$.

r 是 q 的充分条件，q 是 r 的必要条件.

动动脑：

归纳利用命题之间的关系判断两个命题关系的常规方法与技巧.

跟踪练习 2 已知 p 是 q 的充分条件，r 是 q 的必要条件，s 是 r 的充要条件. 问：

（1）s 是 p 的什么条件？　　（2）p 是 s 的什么条件？

阅读材料一

“罗素悖论”

一天，萨维尔村理发师挂出了一块招牌：“村里所有不自己理发的男人都由我给他们理发，我也只给这些人理发.”于是有人问他：“您的头发由谁理呢?”理发师顿时哑口无言．因为，如果他给自己理发，那么他就属于自己给自己理发的那类人．但是，招牌上说明他不给这类人理发，因此他不能自己理．如果由另外一个人给他理发，他就是不给自己理发的人．但是，招牌上明明说他要给所有不自己理发的男人理发，因此，他应该自己理．由此可见，不管做怎样的推论，理发师所说的话总是自相矛盾的．这是一个著名的悖论，称为“罗素悖论”. 这是由英国哲学家罗素提出的，他把关于集合论的一个著名悖论用故事通俗地表述出来．1874 年，德国数学家康托尔创立了集合论，很快渗透到大部分数学分支，成为它们的基础．到 19 世纪末，全部数学几乎都建立在集合论的基础之上了．就在这时，集合论中接连出现了一些自相矛盾的结果，特别是 1902 年罗素提出的理发师故事反映的悖论，它极为简单、明确、通俗．于是，数学的基础被动摇了，这就是所谓的第三次“数学危机”. 此后，为了克服这些悖论，数学家们做了大量研究工作，由此产生了大量新成果，也带来了数学观念的革命．