

第3章 微分中值定理与导数的应用

习题 3-1 中值定理

知识提要

1. 微分中值定理: 罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理.

2. 罗尔(Rolle)定理.

(1) 若函数 $f(x)$ 满足以下条件:

(a) 在 $[a, b]$ 上连续; (b) 在 (a, b) 内可导; (c) $f(a) = f(b)$;

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$;

(2) 几何意义: 对于光滑曲线, 若两端点函数值相等, 则可在曲线上找到切线水平的点.

3. 拉格朗日(Lagrange)中值定理.

(1) 若函数 $f(x)$ 满足罗尔定理的条件(a)和(b), 则存在 $\xi \in$

(a, b) , 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$;

(2) 几何意义: 对于光滑曲线, 可在曲线上找到切线与两端点连线平行的点^①;

(3) 推论: $f'(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv C$.

4. 柯西(Cauchy)中值定理.

若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 皆满足罗尔定理的条件(a)和(b), 且^②

$\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

5. 掌握罗尔定理和拉格朗日中值定理:

(1) 条件和结论;

(2) [难点] 用于证明一些等式和不等式.

6. 三者联系: 柯西中值定理 $\xrightarrow{g(x)=x}$ 拉格朗日中值定理 $\xrightarrow{f(a)=f(b)}$ 罗尔定理.

基础题

1. 填空题.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 _____;

(2) 函数 $y = \ln(1+x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi =$ _____.

2. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理的是().

A. $f(x) = x^3 + x - 1, [0, 1]$

B. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \end{cases} [0, 2]$

C. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, [-1, 1]$

D. $f(x) = \sin 2x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

① 罗尔定理和拉格朗日中值定理都可理解为“切线与两端点连线平行”.

② 作为分母, 额外要求 $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$.

提高题

3. 证明: 对 $f(x) = px^2 + qx + r$ 应用拉格朗日中值定理所求得的点 ξ 总位于区间的正中间.

4. 证明恒等式: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} (-1 \leq x \leq 1)$.

综合题

5. 在 $[-1, 1]$ 上, 下列 4 个函数中满足罗尔定理条件的有 _____ 个.

$$f_1(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \arctan x, & x \geq 0, \\ -\arctan x, & x < 0; \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ -x^3, & x < 0. \end{cases}$$

6. 在不求出 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数的前提下, 说明方程 $f'(x) = 0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间. (提示: 可用“任意 n 次多项式最多有 n 个实根”以及罗尔定理共同证明.)

7. 利用中值定理证明: 当 $x > 1$ 时,

(1) $e^x > ex$;

(2) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$.

习题 3-2 洛必达法则

知识提要

注:本提要中的“0”表示无穷小;本节内容皆须掌握.

1. 洛必达法则的用途:求未定型极限.

2. 七种未定型极限.

(1) 基本类型: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, 洛必达法则能够直接应用的形式;

(2) $0 \cdot \infty, \infty - \infty$, 可通过倒数或通分转化为基本类型;

(3) 幂指型 $[f(x)]^{g(x)}$: $(1+0)^\infty, \infty^0, 0^0$, 可通过 $e^{\ln f^g}$ 转化为

$0 \cdot \infty$ 型, 即

$$\lim f^g = \lim e^{g \ln f} = e^{\lim g \ln f}.$$

3. 洛必达 (L'Hospital) 法则: 若极限 $\lim \frac{f}{g}$ 为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 且

$$\lim \frac{f'}{g'} \text{ 存在 (或为 } \infty) \text{ ①, 则 } \lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}.$$

4. 洛必达法则的使用说明:

(1) 可以连续使用, 但是分子或分母一旦不再同时为 0 或 ∞ 时, 须立即停止;

(2) 应合理配合其他求极限的方法和技巧, 如有理化、 $0 \cdot \infty$ 有界函数 = 0、(特别) 等价无穷小量.

基础题

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 利用洛必达法则求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln \cot x}{\tan x}.$$

提高题

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$4. \text{ 利用洛必达法则求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x.$$

综合题

5. 选择题.

(1) 以下各式中, 极限存在但不能应用洛必达法则的是 ();

$$A. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$B. \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$C. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

$$D. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^n} \quad (a > 0)$$

① 此处可认为“极限为 ∞ ”是极限存在的一种特殊情况.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = (\quad).$$

A. 0

B. 1

C. ∞

D. 不存在但不是 ∞

6. 利用洛必达法则, 结合其他方法, 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\operatorname{arccot} x} \quad (\text{提示: } \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} x = 0);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1 + 2x^3)}.$$

思考题

7. 选用合适的方法求下列极限(不用洛必达法则).

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\operatorname{arccot} x} \quad (\text{提示: } \operatorname{arccot} x = \arctan \frac{1}{x});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$$

习题 3-3 泰勒公式

知识提要

1. 泰勒(Taylor)中值定理: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有 0 到 $n+1$ 阶导数, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad x \in (a, b), \end{aligned}$$

其中:

- (1) $x_0 \in (a, b), \xi \in (x_0, x)$ 或 (x, x_0) ;
- (2) $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日余项, 记为 $R_n(x)$.

2. $x_0 = 0$ 时, 称泰勒公式为麦克劳林(Maclaurin)公式.

3. [了解] 关于泰勒公式的说明:

- (1) 是泰勒级数的基础;
- (2) 注意要求 $n+1$ 阶可导, 而展开式仅对应 $0 \sim n$ 阶, 余项需

要 $n+1$ 阶;

(3) 利用充分多项的泰勒展开, 可方便地求某些极限.

4. 常用麦克劳林公式.

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3);$$

$$(2) \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3);$$

$$(3) \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5);$$

$$(4) \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4).$$

基础题

1. 求函数 $f(x) = \tan x$ 的二阶麦克劳林公式.

综合题

2. 利用泰勒展开式, 结合其他方法, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$.

习题 3-4 函数的单调性

知识提要

1. 用一阶导数判定单调性: 若 $x \in (a, b)$ 时, $f'(x) \geq 0$ (或 $f'(x) \leq 0$), 则^①

(1) $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加(或减少);

(2) 称 (a, b) 为 $f(x)$ 的单调增加(或减少)区间.

2. 若曲线 $y=f(x)$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 处连续, 且在 x_0 的左右两侧严格单调性相异, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极值点.

基础题

1. $y=2x+\frac{8}{x}(x>0)$ 的单调增加区间为 _____,

单调减少区间为 _____.

提高题

2. 利用严格单调性证明:

(1) 当 $x>0$ 时, $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$;

(2) 当 $x>1$ 时, $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$.

综合题

3. 利用严格单调性证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.
(提示: 利用零点定理.)

思考题

4. 在 (a, b) 内, 若 $f(x)$ 可导, 下列说法是否正确? 若不正确, 试举出反例.

(1) 若 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 严格单调增加;

(2) 若 $f(x)$ 严格单调增加, 则 $f'(x)>0$.

5. 思考如何利用一阶导数求函数的极值点. 并求 $f(x)=2x+\frac{8}{x}(x>0)$ 的极值点.

^① 若等号不可取到, 即 $f'(x)$ 恒为正(或负), 则单调性为严格单调性. 在用单调性讨论“只有一个实根”或证明某些严格不等式时, 须指明严格单调性.

习题 3-5 曲线的凹凸性与拐点

知识提要

1. 用二阶导数判定凹凸性: 若 $x \in (a, b)$ 时, $f''(x) > 0$ (或 $f''(x) < 0$), 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内凹 (凸).

2. 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 处连续, 且在 x_0 的左右两侧凹凸性相异, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为 $y = f(x)$ 的拐点.

基础题

1. 曲线 $y = x^3$ 的凹区间是_____, 凸区间是_____, 拐点_____.

2. 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的凹区间是_____, 凸区间是_____, 拐点_____.

3. 设 $f'(x) = (x-1)(2x+1)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 则 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内().

A. 单调增加、凹

B. 单调减少、凹

C. 单调增加、凸

D. 单调减少、凸

提高题

4. 曲线 $y = \arctan x - x$ 的凹区间是_____, 凸区间是_____, 拐点是_____.

5. 曲线 $y = 1 - e^{-x^2}$ 的凹区间是_____, 凸区间是_____, 拐点是_____.

6. $(0, 1)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2 + c$ 的拐点, 则必有().

A. $a = 1, b = -3, c = 1$

B. $a \neq 0, b = 0, c = 1$

C. $a = 1, b = 0, c$ 任取

D. $c = 1, a, b$ 任取

习题 3-6 曲线的渐近性及作图

知识提要

1. 用极限确定曲线的水平渐近线和铅直渐近线.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 且在 $+\infty$ 的某个邻域 (即 $(a, +\infty)$) 内恒有 $f(x) > A$ 或 $f(x) < A$, 则称曲线 $y = f(x)$ 有水平渐近线 $y = A$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的情况类似;

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 则称 $x = x_0$ 为 $y = f(x)$ 的铅直渐近线^①.

2. 作曲线示意图的步骤:

(1) 求出单调性、凹凸性可能发生变化的点, 以及渐近线所对应的点 (坐标);

(2) 利用这些点将定义域分成若干子区间;

(3) 分析各个子区间上的单调性、凹凸性、渐近性;

(4) 结合上述点处的函数值 (或极限) 作图.

基础题

1. 填空题.

(1) 曲线 $y = \frac{1}{x-1} + 2$ 的渐近线是_____;

(2) 曲线 $y = 1 - e^{-x^2}$ 的渐近线是_____;

^① 也可按照水平渐近线的方式反向理解: 对于 $y = f(x)$, 若 $y \rightarrow +\infty$ 或 $y \rightarrow -\infty$ 时, $x \rightarrow x_0^+$ 或 $x \rightarrow x_0^-$, 则 $x = x_0$ 为铅直渐近线.

(3) 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 有 _____ 条渐近线.

综合题

2. 作出下列函数的图像.

(1) $y = x^3 - x^2 - x + 1$;

(2) $y = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$.

思考题

3. 以 $x \rightarrow +\infty$ 的情形为例, 水平渐近线的定义中, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的另外一种描述方式为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - A) = 0$, 即表示: $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = f(x)$ 无限趋近于 $y = A$.

类似地可定义斜渐近线为: $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = f(x)$ 无限趋近于 $y = kx + b$, 即

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ 且在某个 $(a, +\infty)$ 内恒有 $f(x) > kx + b$ 或 $f(x) < kx + b$, 则称曲线 $y = f(x)$ 有斜渐近线 $y = kx + b$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ 的情况类似.

现思考如下两个问题:

(1) 如何确定函数的斜渐近线, 即如何求出参数 k 和 b ?

(2) 求 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的渐近线.

习题 3-7 函数的极值和最值

知识提要

1. 函数的极值和最值.

步骤	极值		最值
	第一判别法	第二判别法	一般情况
1	求极值可疑点($f'(x)=0$ 及不存在的点) $\{x_i\}$		
2	利用 $\{x_i\}$ 分区间 讨论各子区间单调性	讨论 $f''(x_i)$ 的符号 即 x_i 处的凹凸性 ^①	计算边界点处的函数值 $f(a), f(b)$
3	若 x_i 处单调性变化 则为极值点	凹($f''(x_i)>0$)则极小 凸($f''(x_i)<0$)则极大	比较 $f(x_i)$ 及 $f(a), f(b)$

2. 实际问题的最值.

若某实际问题的目标函数在考虑的区间内有唯一的极大(小)值点,则该点必为该区间上的唯一最大(小)值点.

基础题

1. 若 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值,则必有().

- A. $f'(x_0)=0$
- B. $f''(x_0)<0$
- C. $f'(x_0)=0, f''(x_0)<0$
- D. $f'(x_0)=0$ 或不存在

2. 填空题.

- (1) $y=x2^x$ 取得极小值的点为 $x=$ _____;
- (2) 设 $f'(x_0)$ 存在, $f(x_0)$ 是函数的极值,则必有 $f'(x_0)=$ _____;
- (3) 设 $f''(x_0)$ 存在,且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$,则当 $f''(x_0)$ _____

时, $f(x_0)$ 为极大值.

3. 求下列函数的极值.

- (1) $y=x^2-2x+3$;
- (2) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

提高题

4. 填空题.

- (1) 若函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值,则 $a=$ _____;
- (2) $y=x+\sqrt{1-x}$ 在 $[-3,1]$ 上的最大值是_____,最小值是_____.
5. 若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$,则在 $(0,+\infty)$ 内有().

① 此判别法仅对 $f'(x_i)=0$ 的情况有效.

A. $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

C. $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

6. 求下列函数的极值.

(1) $y = x - \ln(1+x)$;

B. $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

D. $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

(2) $y = x + \sqrt{1-x}$.

7. 确定 a, b, c, d , 使 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $x=0$ 处有极大值 1, 在 $x=2$ 处有极小值 0.

思考题

8. 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$, 则在 $x=a$ 处().

A. $f(x)$ 存在, 且 $f'(a) \neq 0$

B. $f(x)$ 取得极大值

C. $f(x)$ 取得极小值

D. $f(x)$ 的导数不存在

9. 注意如下两条信息:

(a) 一阶导数判断单调性, 二阶导数判断凹凸性;

(b) 极值的第二判别法中所述: “若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极值点”.

思考如下两个问题:

(1) 猜测拐点的“第二”判别法: “若 $f''(x_0) \cdots, \cdots, \cdots$, 则……”;

(2) 上述猜测是否正确? 试证明之.