一、极限与连续

1.1 数列极限

判断数列极限是否存在及求数列极限是考研数学的重要考点.

夹逼准则和单调有界准则是常用的判别极限是否存在的方法. 求数列极限的方法有利用定积分定义、夹逼准则、化为函数极限等.

例 1(2012 年) (Ⅰ) 证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$(n 为大于 1 的整数)在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根;

(Ⅱ) 记(Ⅰ)中的实根为 x_n,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求此极限.

【考点分析】 本题考查连续函数的零点存在定理及极限存在准则(单调有界数列必有极限).

【解】 (Ⅰ) 令 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$,则 $f_n(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续,且

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}-1=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-1<\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-1=0,$$

又 $f_n(1)=n-1>0$,即 $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$与 $f_n(1)$异号,于是由连续函数的零点存在性定理知,$f_n(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内至少存在一个零点. 又

$$f_n'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0,\quad x\in\left(\frac{1}{2},1\right),$$

故知 $f_n(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调增加,所以 $f_n(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内最多有一个零点,综上得 $f_n(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有唯一零点,也即方程:$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ 在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且只有 1 个实根.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$ 在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内存在唯一的零点,记为 x_n,则 $x_n\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. 记

$$f_{n+1}(x)=x^{n+1}+x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1=x^{n+1}+f_n(x).$$

又

$$f_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots+\frac{1}{2}-1=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-1<\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-1=0,$$

$f_{n+1}(x_n)=x_n^{n+1}+f_n(x_n)=x_n^{n+1}>0$(因为 x_n 是 $f_n(x)$的一个零点),故 $f_{n+1}(x)$在$\left(\frac{1}{2},x_n\right)$内必存在唯一的零点 x_{n+1},即

$$\frac{1}{2}<x_{n+1}<x_n,$$

由此可见，数列$\{x_n\}$单调减少且有界$\left(由(\text{Ⅰ})知\frac{1}{2}<x_n<1\right)$，故必存在极限(收敛). 不妨将$\{x_n\}$的极限记为$a$，则$a\in\left[\frac{1}{2},1\right)$. 又因为

$$f_n(x_n)=x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n-1=0,\quad 即\quad x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1,$$

故有$\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1$(等比数列前$n$项和公式). 两端取极限有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=\frac{a-0}{1-a}=1,\quad 解得\ a=\frac{1}{2},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

【方法点击】　(1) 在实根存在性问题上，经常会用到连续函数的零点存在性定理，即：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，又$f(a)$和$f(b)$异号，则存在$c\in(a,b)$，使得

$$f(c)=0,\quad c\ 为\ f(x)\ 的零点.$$

本题思路是构造函数$f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，将讨论已知方程根的问题转化为讨论$f_n(x)$零点的问题.

(2) 当没有x_n的具体表达式时，可考虑利用递归数列求极限，其基本方法是先证明递归数列$\{x_n\}$收敛(常用单调有界数列必收敛的定理)，再设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对递归方程取极限后，解出$A$即可. 也可先求出$A$，再证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

【典型错误】　大部分考生没有做对第(Ⅱ)问，主要原因是不能很好地利用第(Ⅰ)问的结论且不会运用极限存在准则. 2011年(19)题、2013年(20)题和本题类似，这也是近年来命题的特点，请考生关注. 部分考生第(Ⅰ)问时没有验证$f_n(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调增加，则在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内最多有一个零点，导致失分.

例 2(2006年)　设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限.

(Ⅱ) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【考点分析】　本题考查极限的存在准则及极限的求法.

【解】　(Ⅰ) 因为$0<x_1<\pi$，则$0<x_2=\sin x_1\leqslant 1<\pi$.

可推得$0<x_{n+1}=\sin x_n\leqslant 1<\pi$，$n=1,2,\cdots$，则数列$\{x_n\}$有界.

又有$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sin x_n}{x_n}<1$(因当$x>0$时，$\sin x<x$)，则有$x_{n+1}<x_n$，可见数列$\{x_n\}$单调减少，故由单调减少有下界数列必有极限知，极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在$x_{n+1}=\sin x_n$两边令$n\to\infty$，得$l=\sin l$，解得$l=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$(因$f(x)=x-\sin x$在$(-\infty,+\infty)$单调上升，有唯一零点$x=0$).

(Ⅱ) **解法一**　因$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，由(Ⅰ)知该极限为"$1^\infty$"型，令$t=x_n$，则

$n\to\infty$时，$t\to 0$，而

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{t}-1\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin t}{t}-1\right)^{\frac{1}{\frac{\sin t}{t}-1}}\right]^{\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\frac{\sin t}{t}-1}{1}}.$$

又

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{6t}=-\frac{1}{6}.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$$

解法二 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}.$$

又由(Ⅰ)知，当$n\to\infty$时，$x_n\to 0$，故考虑函数极限：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right).$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\xlongequal{\text{等价无穷小量代换}}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$$

从而

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$$

【方法点击】 本题中用到了求数列极限的两种非常重要的方法.

(1) 在(Ⅰ)问中，对于有递推关系的数列极限的证明问题，利用单调有界数列必有极限准则来证明. 此类题型在以往的考研试题中经常出现.

(2) 在(Ⅱ)问中，关键一步是将离散的数列极限转化为连续的函数极限求解，其中出现的未定式极限求法多样，也可以利用 $\sin x$ 的麦克劳林展开式进行计算.

【典型错误】 有的考生在数列极限存在的证明过程中，没有用数学归纳法证明，因而证明不完整，另一个常见错误是直接用洛必达法则计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)}{x_n^2}$，这是不允许的，即对数列不能直接用洛必达法则. 还有一些考生在求解方程 $l=\sin l$ 时遇到困难，导致丢分.

例 3(2016 年) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________.

【考点分析】 本题考查数列的极限，定积分的定义，定积分的分部积分法.

【解】 由定积分的定义知

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)\\&=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{d}\cos x=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\mathrm{d}x\\&=-\cos1+\sin x\Big|_0^1=\sin1-\cos1.\end{aligned}$$

【方法点击】 设 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 常用下列方法：

(1) 根据数列特点，先求数列的和再求极限.

(2) 利用定积分定义.

若 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 可以表示为 $x_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，而 $b_i=f\left(\frac{i}{n}\right)$或 $f\left(\frac{i-1}{n}\right)$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 利用夹逼准则.

【典型错误】 本题利用定积分的定义把数列的极限表示为定积分，再应用定积分的分部积分法计算定积分，题中加项的项数随 n 变动，不能用加法求极限法则. 另有部分考生在将积分 $\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x$ 化为 $-\int_0^1 x\mathrm{d}\cos x$ 时，丢掉负号，导致结果错误.

1.2 函数极限

求函数的极限是考研数学的必考题目. 方法有利用极限的四则运算法则、等价无穷小代换、洛必达法则、重要极限、泰勒公式等.

例 4(2016 年) 求 $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

【考点分析】 本题考查未定式的极限.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos2x+2x\sin x)}{x^4}}$，且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos2x+2x\sin x)}{x^4}&=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos2x+2x\sin x}\cdot\frac{-2\sin2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-2\cos2x+2\cos x-x\sin x}{6x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{4\sin2x-3\sin x-x\cos x}{12x}\\&=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

【方法点击】 求极限的方法：

(1) 利用极限的四则运算法则.

(2) 利用极限存在准则.

(3) 利用关于无穷小的定理(如有界函数乘以无穷小量仍为无穷小量等).

(4) 利用极限存在的充要条件 $f(x_0+0)=f(x_0-0)$.

(5) 利用等价无穷小代换定理.

(6) 利用函数的连续性.

(7) 利用恒等变形.

(8) 利用两个重要极限及一些常用的极限.

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$;

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$;

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ m=n,\\ 0, & 当\ m<n,\\ \infty, & 当\ m>n;\end{cases}$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a(a>0)$;

⑥ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(9) 利用洛必达法则求极限.

① 在极限式子中,如果出现有非零的极限因子,则用极限的乘法把它分离出去,然后使用洛必达法则,可使计算变得简单.

② 在"$\dfrac{0}{0}$"未定型中,若能用简单的等价无穷小替换,则先替换,然后应用洛必达法则,可使求导计算简单.

(10) 利用导数定义.

(11) 利用定积分定义.

(12) 利用泰勒公式.

【典型错误】 在第一次洛必达法则后,再用乘法极限法则先求出 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x+2x\sin x}=1$,有的考生没有注意到这一点,直接用洛必达法则求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3(\cos 2x+2x\sin x)}$,由于太烦琐,最后没有得出正确结果.

例 5(2005 年) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0)\neq 0$,求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}.$$

【考点分析】 本题将未定式极限与积分上限函数求导结合在一起考查,属于常见的命题方式.

【解】
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$$
$$\xlongequal{\text{设 } x-t=u}\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{-x\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}$$
$$\xlongequal[(\xi\text{在 }0\text{ 和 }x\text{ 之间})]{\text{积分中值定理}}\lim_{\substack{x\to0\\(\xi\to0)}}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

【方法点击】 此类未定式极限的典型方法是用洛必达法则，但本题中因为分子、分母所含的变上限定积分形式特殊(上限与被积函数都有 x)，故分子、分母求导前应先变形，利用换元法将 x 转化到定积分外面.

【典型错误】 本题容易出现的错误是：在利用一次洛必达法则后，继续用洛必达法则
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{f(x)+f(x)+xf'(x)}=\frac{1}{2}.$$
错误的原因：$f(x)$未必可导，即 $f'(x)$未必存在.

1.3　无穷小比较

无穷小的比较在研究生入学考试中是近几年数学一、数学二常考内容，虽然占分不多(一般为选择题或填空题)，但此部分内容考到的概率很高，所以复习时应引起重视.

例 6(2012 年)　已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

(Ⅰ)求 a 的值.

(Ⅱ)若 $x\to0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，求常数 k 的值.

【考点分析】 本题考查极限求法；无穷小的比较.

【解】 (Ⅰ)
$$a=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x-\sin x}{x^2}\right)=1+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}$$
$$=1+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2}=1+0=1,$$
故 $a=1$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $a=1$，则 $f(x)-a=\dfrac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}-1=\dfrac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x\sin x}$.

由于 $f(x)-a\sim\dfrac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^2}(x\to0)$，令 $g(x)=\dfrac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^2}$，故只需

求解 $x\to 0$，$g(x)$是 x^k 的同阶无穷小时，k 的取值.

解法一 待定系数法.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(x-\sin x)}{x^{k+2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{k+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(k+2)x^{k+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{(k+2)x^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{2(k+2)}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k+1}}=C,\quad \text{其中 } C \text{ 为常数，且 } C\neq 0;$$

故 $k+1=2$，即 $k=1$ 时，$g(x)$与 x^k 是同阶无穷小，也即 $f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，也即 $f(x)-a$ 与 x 是同阶无穷小.

解法二 泰勒公式法.

由于 $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^k}=\frac{x^2+x-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-x^2+o(x^3)}{x^{k+2}}=\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^{k+2}}$$

可知当 $k+2=3$ 时，$g(x)$是 x 的同阶无穷小，故 $k=1$.

【方法点击】 (1) 判断无穷小 $f(x)$，$g(x)$ $(x\to a)$是同阶、等价或高阶的最基本方法是求$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases} l\neq 0,l\neq 1, & \text{同阶而不等价},\\ 1, & \text{等价},\\ 0, & f(x)\text{ 比 } g(x)\text{ 高阶},\\ \infty, & f(x)\text{ 比 } g(x)\text{ 低阶}.\end{cases}$$

(2) 应该熟练掌握一些基本初等函数的泰勒公式，如：

$$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_n(x),\quad \text{其中 } R_n(x)=o(x^n),(x\to 0);$$

$$\sin x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2n}(x),\quad \text{其中 } R_{2n}(x)=o(x^{2n}),(x\to 0);$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2n+1}(x),\quad \text{其中 } R_{2n+1}(x)=o(x^{2n+1}),(x\to 0);$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+R_n(x),$$

其中，$R_n(x)=o(x^n)$，$x\to 0$；

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+R_n(x),\text{其中 } R_n(x)=o(x^n),(x\to 0).$$

(3) 等价无穷小代换定理. 若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=A$，则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=A.$$

常见的等价无穷小. 设 $\alpha(x)\to 0$,则:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x);\quad \tan\alpha(x)\sim\alpha(x);\quad \arctan\alpha(x)\sim\alpha(x);$$
$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x);\quad e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x);\quad \ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x);$$
$$1-\cos\alpha(x)\sim\frac{1}{2}[\alpha(x)]^2;\quad [1+\alpha(x)]^k-1\sim k\alpha(x),k\neq 0.$$

【典型错误】 本题的主要出错点在于将分子中的 $\sin x$ 用等价无穷小代换. 要特别注意的是: $\sin x$ 作为因子出现时,可以用等价无穷小代换,否则不可以直接代换,但是可以如解法二作泰勒展开. 另有一些考生将 $\sin x$ 的泰勒展开式: $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$记错,导致最后结论错误.

例 7(2006 年)　试确定常数 A,B,C 的值,使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

【考点分析】 本题考查无穷小的比较,题设方程右边为关于 x 的多项式,要联想到 e^x 的泰勒展开式,比较 x 的同次项的系数,可得 A,B,C 的值.

【解】 将 e^x 的泰勒展开式 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$代入题设等式得

$$\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right](1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

整理得

$$1+(B+1)x+\left(B+C+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(\frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)=1+Ax+o(x^3),$$

比较两边同次幂系数得

$$\begin{cases}B+1=A,\\ B+C+\frac{1}{2}=0,\\ \frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}=0,\end{cases}\quad 解得\begin{cases}A=\frac{1}{3},\\ B=-\frac{2}{3},\\ C=\frac{1}{6}.\end{cases}$$

【方法点击】 题设条件中含有高阶无穷小形式的条件时,要想到用泰勒公式求解. 考生需熟练掌握常用函数的泰勒公式.

【典型错误】 许多考生看到高阶无穷小,就想到根据无穷小比较的定义,利用极限来确定 A,B,C 的值,这种方式对本题不太适用,易出现错误的结论.

1.4　连续

函数的连续性的讨论在近几年的考研试题中经常出现,虽然连续不如极限考得频繁,但它是常考的内容. 连续的题目在考题中即使没有直接出现,也会在讨论函数可导性时用到它的定义.

例 8(2003 年)　设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0.\end{cases}$$

问 a 为何值时，$f(x)$在 $x=0$ 处连续，a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点？

【考点分析】 本题主要考查分段函数在分界点处的连续性.

【解】 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax^3}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}\cdot\lim_{x\to0^-}\sqrt{1-x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{6ax}{\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=-6a;$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}=4\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}$$

$$=4\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}=2\lim_{x\to0^+}(a^2e^{ax}+2)=2a^2+4.$$

令 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，有 $-6a=2a^2+4$，得

$$a=-1,\quad 或\quad a=-2.$$

当 $a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=6=f(0)$，即 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

当 $a=-2$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=12\neq f(0)$，因而 $x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点.

【方法点击】 函数 $f(x)$在点 x_0 处连续应满足 3 个条件：

(1) 在 $x=x_0$ 处有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

【典型错误】 部分考生求左、右极限错误，另有部分考生没有求出 $f(x)$在 $x=0$ 处为可去间断点的 a 的范围. 考生应注意在利用洛必达法则求左、右极限时，等价无穷小代换的应用及析出非零的极限因子.

例 9(2008 年) 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$有( ).

(A) 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点　　(B) 1 个可去间断点，1 个无穷间断点

(C) 2 个跳跃间断点　　(D) 2 个无穷间断点

【考点分析】 本题考查函数的间断点及其类型.

【解】 当 $x=0$ 时，$f(x)$无定义，当 $x=1$ 时，分母 $|x-1|=0$，因此 $f(x)$有 2 个间断点 $x=0$，$x=1$. 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\csc x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\csc x\cot x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin^2 x}{x \cos x} = 0,$$

故 $x=0$ 是可去间断点；而

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \sin 1 \cdot \lim_{x \to 1^-} \frac{\ln[1+(x-1)]}{1-x} = \sin 1 \cdot \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{1-x} = -\sin 1,$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \sin 1 \cdot \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} = \sin 1 \cdot \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \sin 1,$$

故 $x=1$ 是跳跃间断点.

故应选(A).

【方法点击】 一般地，求函数的间断点并判定其类型的做题步骤为：

(1) 找出间断点 $x_1, x_2, \cdots, x_k$；

(2) 对每一个间断点 x_i，求极限 $\lim\limits_{x \to x_i^-} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to x_i^+} f(x)$；

(3) 判断类型.

设 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，则有：

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=\infty$），则 x_0 为无穷间断点；

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在（此时或 $f(x_0)$ 不存在，或 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$），则 x_0 为可去间断点；

(3) 若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 均存在且不相等，则 x_0 为跳跃间断点.

即间断点的类型依据 $f(x)$ 在 x 趋近于间断点处的极限状态或者在间断点处的极限特征判定.

除此之外，间断点又分两类：左、右极限均存在的称为第一类间断点，其余的称为第二类间断点，可去间断点、跳跃间断点为第一类间断点；无穷间断点、振荡间断点属第二类间断点.

【典型错误】 少数考生只考虑 $x=1$ 时分母为 0，$\lim\limits_{x \to 0} \ln|x|=\infty$，没有仔细分析就选择(B)或者(D). 判断间断点的类型一定要在求出极限后再下结论.

例 10(2002 年)　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$，利用闭区间上连续函数性质，证明存在一点 $\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x) \mathrm{d}x.$$

【考点分析】 本题考查闭区间上连续函数的性质：最值定理和介值定理.

【解】 因为 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$，由最值定理，知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m，即 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，故

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x),$$

$$\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x,$$

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M.$$

由介值定理知，存在 $\xi \in [a,b]$，使

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},\text{即}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

【方法点击】 闭区间上连续函数的性质：

(1) 最大值和最小值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上必存在 x_1,x_2，使得 $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$，$f(x_2)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$.

(2) 有界性定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，即存在常数 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) 介值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)\neq f(b)$，则对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数 η，必存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=\eta$.

(4) 零点存在性定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$（c 称为 $f(x)$ 的零点）.

【典型错误】 有些考生没有想到先用最值定理，再用介值定理.

二、一元函数微分学

一元函数微分学在高等数学中占有重要地位，内容多且覆盖面广，绝大多数章节均涉及它，应深入加以理解．本章是考研数学复习的重点．

2.1 导数的定义

导数是由极限定义，如果极限存在，函数才可导．如果左极限存在，则函数左导数存在，右极限存在，则函数右导数存在．导数定义是考研数学的一个出题点，大部分以选择、填空题的形式出题．

例 1（2013 年） 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=$（　　）．

（A）2　　　　（B）1　　　　（C）-1　　　　（D）-2

【考点分析】 本题是一道小型综合题，考查导数定义、隐函数求导及数列极限与对应函数极限的关系．

【解】 因为 $x=0$ 时，$y=1$，即 $f(0)=1$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}-0}=2f'(0).$$

又 $\cos(xy)+\ln y-x=1$，两边对 x 求导得

$$-\sin(xy)\cdot(y+xy')+\frac{1}{y}\cdot y'-1=0,$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式得 $y'=1$．

故应选（A）．

【方法点击】（1）隐函数所确定函数的导数求解：方程两边关于 x 求导，y 看做 x 的函数，得到导数方程，解导数方程得导数．

（2）数列极限与对应函数极限的关系：

$$\lim_{n\to\infty}F\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{t\to\infty}F\left(\frac{1}{t}\right)\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\lim_{x\to0}F(x).$$

（3）极限与导数的关系：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}.$$

【典型错误】 本题出错点之一是未能对所求极限的表达式进行有效的整理，要注意：导数是用极限来定义的，这一点是考研中的高频考点；出错之二是隐函数求导计算错误．

例 2（2011 年） 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　　）．

（A）$-2f'(0)$　　　　（B）$-f'(0)$　　　　（C）$f'(0)$　　　　（D）0

【考点分析】 本题考查导数的定义．

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).$$

故应选(B).

【方法点击】 在 $f(x)$ 在 x_0 处可导的前提下,若极限式 $\lim\limits_{\varphi(x)\to x_0}\dfrac{f(\varphi(x))-f(x_0)}{\varphi(x)-x_0}$ 存在,则该极限等于函数在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$. 一般地,在 $f(x)$ 于 x_0 处可导条件下,我们可以利用这种上下对应性,计算给定极限式的极限.

【典型错误】 有的考生利用洛必达法则计算:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}f'(x)-2\lim_{x\to 0}f'(x^3)=-f'(0).$$

该方法的错误在于计算中增加了条件 $f'(x)$ 连续,但本题中仅仅知道 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,因此 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不一定存在.

2.2 分段函数的导数

讨论分段函数在定义域内的可导性,对于非分界点处的可导性,显然,只需用定义讨论其分界点处的可导性即可. 因为可导的必要条件是连续,所以在做这类题目时,可首先观察分界点处的连续性. 若不连续则必不可导;若在该点连续,则须用导数的定义.

例 3(2015 年) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$,若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续,则( ).

(A) $\alpha-\beta>1$　　(B) $0<\alpha-\beta\leqslant 1$　　(C) $\alpha-\beta>2$　　(D) $0<\alpha-\beta\leqslant 2$

【考点分析】 本题考查分段函数的导数及在分界点的可导、连续性.

【解】 当 $x<0$ 时,$f'(x)=0$;

当 $x>0$ 时,$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}$.

由题意,知 $f'(0)$ 存在,则 $f'(0)=f'_-(0)=f'_+(0)$,而 $f'_-(0)=0$,则 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}=0$,由此得 $\alpha-1>0$,即 $\alpha>1$. 又因 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点连续,则

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=f'(0)=0,$$

即

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}\right)=0,$$

由此得 $\alpha-\beta-1>0$,即 $\alpha-\beta>1$.

故应选(A).

【方法点击】 (1) 求分段函数 $f(x)$ 的导数应按如下步骤：

第1步，用导数公式与求导法则求分界点 x_0 两侧的导数；

第2步，用导数定义求分界点 x_0 处的导数或左、右导数，并根据 $f(x)$ 在 x_0 点导数 $f'(x_0)$ 存在当且仅当左、右导数 $f'_-(x_0)$，$f'_+(x_0)$ 存在且相等来判定 $f(x)$ 在 x_0 点的导数是否存在.

(2) 判断分段函数 $g(x)$ 在分界点 x_0 的连续性，往往要先求左、右极限，看左、右极限和函数值三者是否相等，判断 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 点是否连续. 结论：$g(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=g(x_0)$.

(3) 本题中考虑分段函数 $f'(x)$ 在分界点 $x=0$ 的连续性，故应先按照(1)求分段函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$，再按照(2)考查 $f'(x)$ 在分界点 $x=0$ 处的连续性.

【典型错误】 部分考生在计算 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}}{x}$ 时，利用洛必达法则. 实际上，此为无穷小量乘有界量仍为无穷小量. 另有部分考生在计算当 $x>0$ 时，$f'(x)$ 计算错误.

2.3 一元函数的求导运算

近年来，有关初等函数的求导法则常放在综合计算题中讨论，单独出题的可能性减少了，但求导的基本运算仍为每年必考的内容.

例 4(2010年) 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$________.

【考点分析】 高阶导数. 本题得分率为35.4%.

【解】 **解法一** 由于 $y'=\dfrac{-2}{1-2x}=-2(1-2x)^{-1}$，

$y''=-2\cdot(-1)(1-2x)^{-2}\cdot(-2)=-2^2(1-2x)^{-2}$，

$y'''=-2^2\cdot(-2)(1-2x)^{-3}\cdot(-2)=-2^3\cdot 2(1-2x)^{-3}$，

$y^{(4)}=-2^3\cdot 2\cdot(-3)(1-2x)^{-4}\cdot(-2)=-2^4\cdot 3!\,(1-2x)^{-4}$.

一般地，有 $y^{(n)}=-2^n(n-1)!\,(1-2x)^{-n}$，所以

$$y^{(n)}(0)=-2^n(n-1)!.$$

解法二 由于 $y(0)=0$，$y'(x)=\dfrac{-2}{1-2x}=-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x)^n=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n$，

$$y(x)-y(0)=\int_0^x y'(t)\mathrm{d}t=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n+1}x^{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n,$$

由麦克劳林级数得

$$\frac{y^{(n)}(0)}{n!}=-\frac{2^n}{n},$$

因此，$y^{(n)}(0)=-2^n(n-1)!$.

【方法点击】 求高阶导数，基本思路是逐项求导，利用各阶导数表达式的规律写出 $y^{(n)}$ 的表达式. 考生应熟记一些比较特殊的函数的高阶导数公式.

① $y=\sin x$，$y^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$；

② $y=\cos x, y^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$；

③ $y=a^x, y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$；

④ $y=xe^x, y^{(n)}=(x+n)e^x$；

⑤ $y=\dfrac{1}{x}, y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}$.

另外，求具体点处的 n 阶导数 $y^{(n)}(x_0)$，还可以利用泰勒系数 $a_n=\dfrac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$.

【典型错误】 有些考生在尚未正确总结出规律时，就写出了 n 阶导数的表达式，当然导致错误. 其中最常见的错误是丢了 $(n-1)!$，还有些考生在复合函数求导时忘记了乘以 -2.

例 5(2007 年) 曲线 $\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t,\\ y=1+\sin t\end{cases}$ 上对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为________.

【考点分析】 参数方程的导数及导数的几何意义.

【解】 因为 $\dfrac{dy}{dx}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\cos t}{-\sin t-2\cos t\sin t}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

所以曲线在对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点的切线斜率为 $-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$，故曲线在对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点的法线斜率为 $1+\sqrt{2}$.

【方法点击】 (1) 参数方程求导公式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

(2) 曲线 $y=y(x)$ 在点 $(x_0, y(x_0))$ 的切线斜率为 $f'(x_0)$，法线斜率为 $-\dfrac{1}{f'(x_0)}(f'(x_0)\neq 0)$.

【典型错误】 有些考生由于粗心，或是将导数写成

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{-\sin t-2\sin t\cos t}{\cos t}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}},$$

或是误以为求切线斜率，填写了错误的答案，是非常可惜的事情，应平时多加练习.

例 6(2008 年) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是________.

【考点分析】 本题考查隐函数求导及导数的应用.

【解】 **解法一** 设 $F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$，则斜率

$$k=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y\cos(xy)+\frac{-1}{y-x}-1}{x\cos(xy)+\frac{1}{y-x}}.$$

在 $(0,1)$ 处 $k=1$，所以切线方程为 $y-1=x$，即 $y=x+1$.

解法二 直接两边求导，其中 y 视为 x 的函数.

方程两边对 x 求导得

$$\cos(xy)(x+xy')+\frac{y'-1}{y-x}=1,$$

则 $y'\big|_{(0,1)}=1$，所以切线方程为 $y-1=x$，即 $y=x+1$.

解法三 等式两边同时求微分有

$$\cos(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+\frac{\mathrm{d}y-\mathrm{d}x}{y-x}=\mathrm{d}x,$$

则$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,1)}=1$,所以切线方程为 $y-1=x$,即 $y=x+1$.

【方法点击】 隐函数求导问题的求解方法主要有 3 种:运用隐函数存在定理用公式法求解(解法 1)、直接法(解法 2)、微分法(解法 3). 本题题目简单,3 种方法的繁简程度差不多,若对于复杂的多元隐函数,后两种方法较简便.

【典型错误】 最常见的错误是填 $y=-x+1$,占到了所有错误答案的 80%左右;$y=\frac{1}{2}x+1$ 也是一个比较常见的错误结果,这都是因为计算出错. 部分考生将切线方程写为 $x+1$,这是很可惜的.

2.4 平面曲线的切线与法线

考查平面曲线的切线方程或法线方程的题目,往往与考查一元函数的求导法则联系在一起.

例 7(2013 年) 曲线$\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为________.

【考点分析】 本题考查曲线的法线方程.

【解】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t}{\frac{1}{1+t^2}}=t$,所以,$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=t\Big|_{t=1}=1$.

当 $t=1$ 时,$x_0=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$,$y_0=\ln\sqrt{1+1}=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2$,所以法线方程为

$$y-y_0=-1(x-x_0),\quad 即\quad y-\frac{1}{2}\ln 2=-x+\frac{\pi}{4}.$$

【方法点击】 求平面曲线的切线或法线方程关键在于确定切点的位置以及求切点处的导数. 根据曲线的不同表达方式应分别用不同的求导方法进行计算.

曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$的切线方程是

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0);$$

曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$的法线方程是

$$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0),\quad (当\ f'(x_0)\neq 0\ 时).$$

【典型错误】 本题的出错点主要在于考生的"粗心". 许多考生将切线斜率错当成法线斜率.

2.5 微分中值定理

中值定理是一元函数微分学的重点,也是难点. 从考点分布表中我们可以看出来,几乎年年都有本部分的考题,且此部分的题目多为证明题,复习时我们应及时总结证明的各种方法.

例 8(2007 年)　设函数 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$. 证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

【考点分析】 本题考查中值定理的应用. 本题得分率为 20.8%.

【解】 令 $h(x)=f(x)-g(x)$,则 $h(a)=h(b)=0$.

由题设 $f(x),g(x)$在(a,b)内的最大值 M 分别在 $\alpha\in(a,b)$,$\beta\in(a,b)$取得.

当 $\alpha=\beta$ 时,取 $\eta=\alpha$,则 $h(\eta)=0$.

当 $\alpha\neq\beta$ 时,

$$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=M-g(\alpha)\geqslant 0,$$
$$h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=f(\beta)-M\leqslant 0,$$

由介值定理知,存在介于 α 与 β 之间的点 η,使得 $h(\eta)=0$.

综上,存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $h(\eta)=0$.

因此,由罗尔定理可知,存在 $\xi_1\in(a,\eta)$,$\xi_2\in(\eta,b)$,使得

$$h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0,$$

再由罗尔定理可知,存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得

$$h''(\xi)=0,\quad 即 \quad f''(\xi)=g''(\xi).$$

【方法点击】 对命题为 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明,一般利用以下两种方法:

方法一,验证 ξ 为 $f^{(n-1)}(x)$的最值或极值点,利用极值存在的必要条件或费马引理可得证.

方法二,验证 $f^{(n-1)}(x)$在包含 $x=\xi$ 于其内的区间上满足罗尔定理条件.

【典型错误】 (1) 有的考生将题设"存在相等的最大值"误解为"不但最大值相等,并且取得最大值处的 x 也相等",即存在 $x_1\in(a,b)$,使

$$f(x_1)=\max_{[a,b]}\{f(x)\}=g(x_1)=\max_{[a,b]}\{g(x)\},$$

于是立即有 $h(x_1)=0$ 这样一种误解,使得证明变得十分简单,失去了原题的意义. 也有的考生将题设"存在相等的最大值"误解为"存在相等的最大值点",而最大值并不一定相等. 这样一来就无法往下做了.

(2) 有的考生一见到题中涉及两个函数 $f(x)$与 $g(x)$,立即采用柯西中值定理. 有的考生见到题目条件有二阶可导,就想到采用泰勒公式. 这些都反映了部分考生只会套用某种套路,而没有深刻掌握实质. 柯西中值定理要求某函数的导数不为零,泰勒公式要求某函数在某点的函数值及一阶导数值能方便地求得(或消去). 无法获得以上要求的这些信息,试题自然就做不下去了.

例 9(2008 年)　(Ⅰ)证明积分中值定理:若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$,使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\eta)(b-a)$;

(Ⅱ)若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数,且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$,$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x$,则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$,使得 $\varphi''(\xi)<0$.

【考点分析】 本题考查连续函数的介值定理、拉格朗日中值定理. 得分率为 40.7%.

【解】 (Ⅰ)因 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,故在$[a,b]$上存在最大值 M 和最小值 m,则

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in[a,b].$$

由定积分性质，有

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a),$$

即

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M,$$

由连续函数介值定理知，至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得

$$f(\eta)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\eta)(b-a).$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)的结论，可知至少存在一点 $\eta\in[2,3]$，使

$$\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(\eta)(3-2)=\varphi(\eta).$$

所以 $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(\eta)$，其中 $2<\eta\leqslant 3$.

对 $\varphi(x)$ 在 $[1,2]$ 和 $[2,\eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，并注意到 $\varphi(1)<\varphi(2)$，$\varphi(\eta)<\varphi(2)$，得

$$\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}>0,\quad 1<\xi_1<2,$$

$$\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2}<0,\quad 2<\xi_2<\eta\leqslant 3.$$

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对导函数 $\varphi'(x)$ 应用拉格朗日中值定理，有

$$\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0,\quad \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3).$$

结论得证.

【方法点击】 (1) 积分中值定理为高等数学基础定理之一. 读者应掌握这些基本定理的证明思路与证明方法. 如罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西定理等.

(2) 一般地，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)>0$（或 <0）的命题与证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)=0$ 的思路基本相同，都是考虑运用中值定理. 所不同的是前者要对 $f'(x)$ 应用拉格朗日中值定理，而后者对 $f'(x)$ 应用罗尔定理.

【典型错误】 大部分考生不能证明第Ⅱ问，主要原因是不能有效地利用第Ⅰ问的结论，另外，部分考生错误地应用了别的中值定理.

例 10(2005 年)　已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(Ⅱ) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

【考点分析】 本题考查连续函数的零点存在定理及拉格朗日中值定理.

【解】 (Ⅰ) 构造辅助函数 $F(x)=f(x)+x-1$，则

$$F(0)=f(0)+0-1=-1,\quad F(1)=f(1)+1-1=1,$$

所以 $F(0)\cdot F(1)=-1<0$. 根据零点存在定理可得,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=1-\xi$.

(Ⅱ) 由题意可知,$f(x)$在$[0,\xi]$上连续,在$(0,\xi)$内可导,应用拉格朗日中值定理可得,存在一点 $\eta\in(0,\xi)$,使 $f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\dfrac{1-\xi}{\xi}$. 同理,$f(x)$在$[\xi,1]$上连续,在$[\xi,1]$内可导,再应用拉格朗日中值定理可得,存在一点 $\zeta\in(\xi,1)$,使 $f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{\xi}{1-\xi}$. 从而,存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$,使

$$f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1,\text{即命题得证.}$$

【方法点击】 本题中要证明(Ⅰ)的关键是构造辅助函数 $F(x)$;证明(Ⅱ)的关键是在已证得(Ⅰ)的基础上,两次巧妙地利用拉格朗日中值定理,考查中值定理是近年来经常出的题目.

【典型错误】 有的考生对本题(Ⅱ)问证明如下:

由题设条件对 $f(x)$在$[0,1]$上用拉格朗日中值定理得

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{1-0}{1-0}=1,\quad \eta\in(0,1).$$

同理存在 $\zeta\in(0,1)$,使得 $f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

从而得到 $f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=1$. 请指出上述证明错在哪里.

事实上,以上 η 与 ζ 是同一个值,不符合题目的要求,这种做法仅是对同一个函数 $f(x)$ 在同一个区间$[0,1]$上,使用了两次拉格朗日中值定理,将得到的同一个点用不同符号来表示罢了.

这种证明思路显然是错误的.

2.6 函数的单调性,极值,最大值、最小值

函数的单调性及极值定义多在填空、选择题中考查,有关函数最大值和最小值的应用题多出现在计算题中,证明题中主要考查使用单调性及极值证明不等式的方法.

例 11(2012 年) 证明:

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}\quad(-1<x<1).$$

【考点分析】 本题考查用最大、最小值法或函数单调性等方法证明不等式.

证 由不等式的形状有 $f(x)\leqslant g(x)$,故用最大、最小值法完成.

令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$,$-1<x<1$,则

$$\begin{aligned}f'(x)&=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\sin x-x\\&=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\\&=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1>0,\quad(-1<x<1).\end{aligned}$$

从而 $f'(x)$ 单调递增. 又因为 $f'(0)=0$, 所以当 $-1<x<0$ 时, $f'(x)<0$; 当 $0<x<1$ 时, $f'(x)>0$, 从而 $f(0)=0$ 是 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内的最小值, 从而当 $-1<x<1$ 时, 恒有 $f(x)\geqslant f(0)=0$, 即 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}\geqslant 0$, 亦即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1.$$

【方法点击】 证明不等式的方法主要有:

(1) 用函数的单调性证明不等式.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加; 若 $f(a)\geqslant 0$(或 $f(b)\leqslant 0$), 则 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$) 在 $x\in(a,b]$(或 $x\in[a,b)$) 时成立.

同理, 若 $f(x)$ 是单调减少函数也有类似的结论.

(2) 用中值定理证明: 主要是构造适当的辅助函数, 然后选择满足中值定理条件的区间, 利用拉格朗日中值定理或柯西中值定理证明.

(3) 用函数的凹凸性证明: 一般是利用凹凸性的定义来证明.

(4) 用泰勒公式证明: 根据已知条件, 围绕证明目标不等式, 选取恰当的点将函数在这些点展成泰勒展式, 向着有利于证明目标不等式的方向对上面的展式做适当的处理, 直到可以结合已知条件证出不等式为止.

(5) 用定积分理论证明:

① 利用定积分的性质: 对可积函数 $f(x),g(x)$, 先证出 $f(x)\leqslant g(x)$, 然后由定积分的性质可证 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

② 构造变上限辅助函数: 对于含有定积分的不等式, 可把常数变为变数构造辅助函数, 利用变上限积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}x$ 及函数的单调性解决此类不等式.

【典型错误】 (1) 部分考生求 $f'(x),f''(x)$ 时出错.

(2) 有的考生利用幂级数展开证明, 没有得到最终结果.

(3) 在判断 $f'(x)$ 的正负性时, 没有通过 $f''(x)$ 判断, 最终失败.

例 12(2010 年)　求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

【考点分析】 本题考查变上限积分的求导; 单调区间与极值的求法. 本题得分率为 45.2%.

【解】 由 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=x^2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$, 则

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+x^2\mathrm{e}^{-(x^2)^2}\cdot 2x-x^2\mathrm{e}^{-(x^2)^2}\cdot 2x=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

$$f''(x)=2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+2x\mathrm{e}^{-(x^2)^2}\cdot 2x=2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+4x^2\mathrm{e}^{-x^4}.$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=0,x=\pm 1$.

又 $f''(0)=2\int_1^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<0,f''(\pm 1)=4\mathrm{e}^{-1}>0$, 所以 $f(0)=\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$ 是极大值,