三、一元函数积分学

（一）内容概括

积分学是微积分的主要部分，在高等数学中占有十分重要的地位，而一元函数积分学是积分学的基础. 从某种意义上讲不定积分处于辅助位置，不定积分为定积分的计算提供了一种简便快捷的工具. 利用定积分可以解决许多实际问题.

（二）考试要求

一元函数积分学是考研数学复习的重点及难点之一. 最新颁布的全国硕士研究生入学考试大纲(数学一)中对一元函数积分学的要求是：

1. 理解原函数的概念，理解不定积分和定积分的概念.

2. 掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理，掌握换元积分法与分部积分法.

3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分.

4. 理解积分上限的函数，会求它的导数，掌握牛顿-莱布尼茨公式.

5. 了解反常积分的概念，会计算反常积分.

6. 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心等)及函数的平均值.

（三）真题解析

例 1(2017 年)　求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

【考点分析】　本题考查和式极限的求法. 首先将已知和式转化为函数 $f(x)=x\cdot\ln(1+x)$在区间$[0,1]$上的积分和；再根据定积分定义将所求和式极限用定积分表示，最后计算定积分便可得所求极限值.

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\\
&=\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{4}(x-1)^2\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1\\
&=\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

【方法点击】　(1) 利用定积分定义计算和式的极限是常考题型. 解答这类题目的关键

是将已知和式转化为某个函数在具体区间上的积分和，即用定积分表示和式的极限；其中关键是确定被积表达式及定积分的上、下限，这时一般是将积分区间 n 等分.

(2) 求和式的极限一般采用两种方法：一是利用定积分的定义；二是利用夹逼准则.

【典型错误】 本题的主要出错点是：考生不能正确地用定积分表示已知和式的极限；其原因是没有真正理解定积分的定义.

例 2(2017 年) 甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10(单位：m)处. 在图 1-8 中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位：m/s)，虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10，20，3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位：s)，则(　　).

(A) $t_0=10$　　(B) $15<t_0<20$　　(C) $t_0=25$　　(D) $t_0>25$

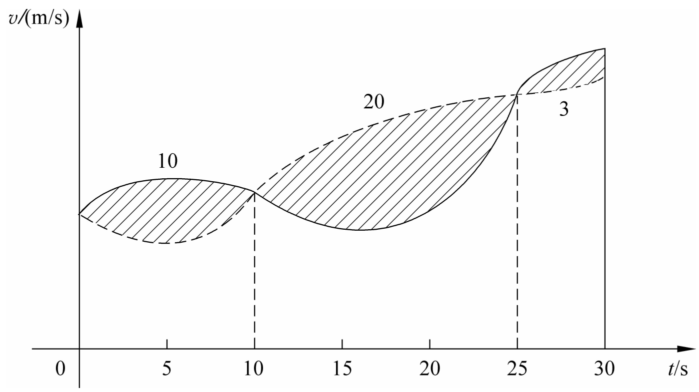

图 1-8

【考点分析】 本题考查定积分的物理意义——变速直线运动的路程. 根据路程与速度之间的关系，由速度求出路程；当乙追上甲时，乙应比甲多跑 10m，由此便可得结论.

解 设 $S_1(t)$，$S_2(t)$ 分别表示甲、乙两人在相同时间 t 内跑过的距离，则 $S_1(t)=\int_0^t v_1(t)\mathrm{d}t$，$S_2(t)=\int_0^t v_2(t)\mathrm{d}t$.

由题意知：$S_2(t_0)=10+S_1(t_0)$，即

$$S_1(t_0)-S_2(t_0)=-10. \qquad (*)$$

故乙追上甲的时刻 t_0 必须满足$(*)$式.

当 $t=10$ 时

$$S_1(10)-S_2(10)=\int_0^{10}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t=10.$$

当 $15<t<20$ 时

$$S_1(t)-S_2(t)=\int_0^t[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t=\int_0^{10}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t+\int_{10}^t[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t$$
$$=10-\int_{10}^t[v_2(t)-v_1(t)]\mathrm{d}t>10-\int_{10}^{25}[v_2(t)-v_1(t)]\mathrm{d}t=10-20=-10.$$

故当 $t=25$ 时，有

$$S_1(25)-S_2(25)=\int_0^{25}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t=\int_0^{10}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t$$
$$+\int_{10}^{25}[v_1(t)-v_2(t)]\mathrm{d}t=10-\int_{10}^{25}[v_2(t)-v_1(t)]\mathrm{d}t$$
$$=10-20=-10.$$

综上分析知：当 $t_0=25\text{s}$ 时满足(*)式.故应选(C).

【方法点击】 前几年的考题主要考的是定积分的几何应用,而本题考查的是定积分的物理应用;另外,题型较新颖,但难度不大.考生可依据本题发散思维,举一反三,将这种出题方式拓展到其他知识点.

【典型错误】 有的考生没有理解原函数的概念,不会用定积分表示速度与路程之间的关系.

例 3(2016 年) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是(　　).

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1\end{cases}$

【考点分析】 本题考查原函数的概念及计算.由定义知原函数是可导的,由连续与可导的关系知原函数必然连续.本题先分段计算原函数,再利用原函数在分段点的连续性即可得结论.

解 当 $x<1$ 时,$F(x)=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=x^2-2x+C_1$;

当 $x\geqslant 1$ 时,$F(x)=\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x+C_2$;

且 $\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-2x+C_1)=C_1-1$;$\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x\ln x-x+C_2)=C_2-1$.

又 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续,因此有 $\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=F(1)$,即 $C_1-1=C_2-1$,所以 $C_1=C_2=C$,故原函数为

$$F(x)=\begin{cases}x^2-2x+C, & x<1,\\ x\ln x-x+C, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

当 $C=1$ 时,对应的原函数为(D).

【方法点击】 分段函数的原函数要分段计算.在分段点处原函数连续,利用左、右连续可将积分中的任意常数建立关系,从而得到具体的、正确的结论.

【典型错误】 本题常见错误解法是：分段函数各自积分,但是不会运用分段点处原函数的连续性,导致解不出正确结论.

例 4(2004 年) 已知 $f'(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^{-x}$,且 $f(1)=0$,则 $f(x)=$________.

【考点分析】 本题考查不定积分及原函数概念,先求出 $f'(x)$,再积分便可.

解 令 $\mathrm{e}^x=t$,则 $x=\ln t$,于是有 $f'(t)=\dfrac{\ln t}{t}$,即 $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

积分得 $f(x)=\int\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$.利用初始条件 $f(1)=0$,得 $C=0$,故所求函数为 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

【方法点击】 已知导函数求原函数一般用不定积分.

【典型错误】 少数考生容易遗漏条件 $f(1)=0$,错写出全体原函数 $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$.

例 5(2012 年) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\,dx (k = 1,2,3)$, 则(　　).

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$　　(C) $I_2<I_3<I_1$　　(D) $I_2<I_1<I_3$

【考点分析】 本题考查定积分的性质及计算,比较两个被积函数相同,而积分区间不同的定积分大小,关键是合理划分积分区间.

解　解法一　① 先比较 I_1 与 I_2 的大小.

由于 $I_2 - I_1 = \int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx < 0$(因为 $x \in (\pi,2\pi)$ 时,$\sin x < 0$),所以 $I_1 > I_2$.

② 再比较 I_2 与 I_3 的大小.

由于 $I_3 - I_2 = \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx > 0$(因为 $x \in (2\pi,3\pi)$ 时,$\sin x > 0$),所以 $I_3 > I_2$.

③ 最后比较 I_1 与 I_3 的大小.

由于

$$
\begin{aligned}
I_3 - I_1 &= \int_\pi^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx = \int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx \\
&= \int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx + \int_\pi^{2\pi} e^{(u+\pi)^2}\sin(u+\pi)\,du \\
&= \int_\pi^{2\pi} [e^{x^2} - e^{(x+\pi)^2}]\sin x\,dx > 0,
\end{aligned}
$$

所以 $I_3>I_1$;故应选(D).

解法二　$I_1 = \int_0^\pi e^{x^2}\sin x\,dx$;

$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx = \int_0^\pi e^{x^2}\sin x\,dx + \int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx = I_1 + \int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx,$$

因为 $x\in(\pi,2\pi)$时,$\sin x<0$,$e^{x^2}>0$,所以 $e^{x^2}\sin x<0$,并且 $e^{x^2}\sin x$ 连续,所以 $\int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx < 0$,因此 $I_2<I_1$.

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx = \int_0^\pi e^{x^2}\sin x\,dx + \int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx. \\
&= I_1 + \int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx.
\end{aligned}
$$

令 $x=u+\pi$,则 $\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx = \int_\pi^{2\pi} e^{(u+\pi)^2}\sin(u+\pi)\,d(u+\pi)$

$$= -\int_\pi^{2\pi} e^{(u+\pi)^2}\sin u\,du = -\int_\pi^{2\pi} e^{(x+\pi)^2}\sin x\,dx.$$

从而 $\int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x\,dx = \int_\pi^{2\pi} e^{x^2}\sin x\,dx - \int_\pi^{2\pi} e^{(x+\pi)^2}\sin x\,dx$

$$= \int_\pi^{2\pi} \sin x(e^{x^2} - e^{(x+\pi)^2})\,dx.$$

当 $x \in (\pi,2\pi)$ 时,显然有 $x^2 < (x+\pi)^2$,所以

$$e^{x^2} - e^{(x+\pi)^2} < 0,\quad \sin x < 0,$$

从而$[e^{x^2} - e^{(x+\pi)^2}]\sin x>0$. 又因为$[e^{x^2} - e^{(x+\pi)^2}]\sin x$ 连续,所以有 $\int_\pi^{2\pi}[e^{x^2} - e^{(x+\pi)^2}]\sin x\,dx > 0$,故 $I_1 < I_3$. 综上 $I_2 < I_1 < I_3$.

故应选(D).

【方法点击】 定积分比较大小是常考题型.考生要注意两点：一是当被积函数相同，但积分区间不同时，解题的关键是合理划分积分区间，从而寻找定积分之间的关系；二是此类题目中的积分往往不用计算最后结果，只需判别正负号即可.

【典型错误】 有的考生没有划分积分区间，没有得到3个积分之间的关系，而是直接计算3个积分，这样做计算过程烦琐，容易出错.

例6(2010年) (Ⅰ)比较$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$与$\int_0^1 t^n |\ln t| dt(n=1,2,\cdots)$的大小，说明理由；

(Ⅱ)记$u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt(n=1,2,\cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

【考点分析】 本题考查定积分的性质及夹逼准则.

解 (Ⅰ)当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$0\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$，故当$0\leqslant t\leqslant 1$时，$[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n$，所以$|\ln t|[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n|\ln t|$.从而$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|dt$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知$0\leqslant u_n\leqslant\int_0^1 |\ln t| t^n dt$，而

$$\int_0^1 |\ln t| t^n dt=-\int_0^1 t^n\ln t dt=-\frac{1}{n+1}\lim_{\varepsilon\to 0^+}(t^{n+1}\ln t)\Big|_{\varepsilon}^{1}+\int_0^1\frac{1}{n+1}t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2}.$$

又由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+n)^2}=0$，根据夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

【方法点击】 (1)设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积，则有：

① 若在$[a,b]$上恒有$f(x)\leqslant g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$.

② 若$f(x)$在$[a,b]$上的最大值为M，最小值为m，则$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$.

③ 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

(2)对于结论：当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$\ln(1+x)\leqslant x$，可以如下证明：

令$f(x)=\ln(1+x)-x$，则当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1\leqslant 0$，所以$f(x)\leqslant f(0)=0$，即$\ln(1+x)\leqslant x$.

【典型错误】 有的考生不会利用不等式：$0\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，因此没有得到(Ⅰ)的结果；当然也就求不出极限：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$的值.

例7(2007年) 积分$\int_1^2\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=$________.

【考点分析】 本题考查定积分的计算.该题为简单的定积分计算题，利用变量代换法及分部积分法即可求解.

解 $\int_1^2\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\int_1^{\frac{1}{2}}t^3e^t\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 te^t dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 t de^t=te^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1-\int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}.$

故应填$\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$.

【方法点击】 对定积分的计算应熟练运用基本方法(换元、分部积分、分项、凑微分等),只是作变量代换时要注意相应积分限的变化.

【典型错误】 本题为基础题,有的考生在利用定积分换元法时由于忘了换积分的上、下限而导致结果不正确.

例 8(2011 年)　设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$, $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关系是(　　).

(A) $I<J<K$　　(B) $I<K<J$　　(C) $J<I<K$　　(D) $K<J<I$

【考点分析】 本题考查定积分的性质.

解　如图 1-9 所示:

当 $0<x<\frac{\pi}{4}$时,$\sin x<\cos x<1<\cot x$,于是$\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$. 由定积分性质得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x,$$

即 $I<K<J$.

故应选(B).

【方法点击】 比较定积分的大小常用下列结论:

设 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积,则有

① 若在$[a,b]$上恒有 $f(x)\leqslant g(x)$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

② 若 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上的最大值为 M,最小值为 m,则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$.

【典型错误】 有的考生选(A),究其原因是没有分清在 $0<x<\frac{\pi}{4}$时,函数 $\sin x,\cos x,\cot x$ 之间的大小关系.

例 9(2005 年)　如图 1-10,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点(3,2)是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线,其交点为(2,4). 设函数 $f(x)$具有三阶连续导数,计算定积分 $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$.

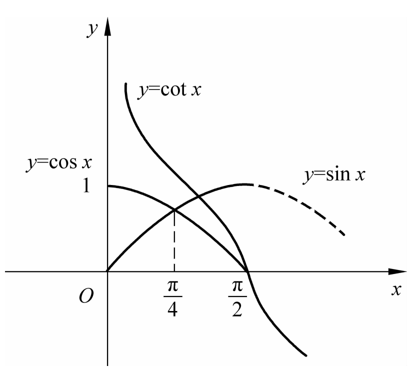

图　1-9

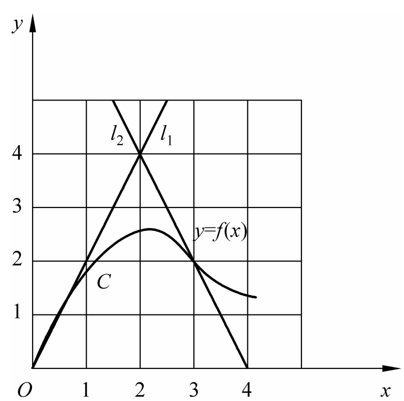

图　1-10

【考点分析】 本题考查导数的几何意义，取得拐点的必要条件及定积分的分部积分法.

解 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x = \int_0^3 (x^2+x)\mathrm{d}f''(x) = (x^2+x)f''(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 f''(x)(2x+1)\mathrm{d}x$

$$= 12f''(3) - (2x+1)f'(x)\Big|_0^3 + \int_0^3 f'(x)\cdot 2\mathrm{d}x$$

$$= 12f''(3) - 7f'(3) + f'(0) + 2f(3) - 2f(0).$$

由题知(3,2)是 $f(x)$的拐点，所以 $f''(3)=0$. 而 $f'(3)=\frac{4-2}{2-3}=-2$，$f'(0)=\frac{4-0}{2-0}=2$ （l_1，l_2 的斜率分别为 $f'(3)$，$f'(0)$），及 $f(3)=2$，$f(0)=0$，所以

$$原积分 = 12\times 0 - 7\times(-2) + 2 + 2\times 2 - 2\times 0 = 20.$$

【方法点击】 本题是一道简单的综合题，考查的主要是运算能力. 涉及导数的几何意义，切线方程，可导函数拐点的必要条件及定积分的分部积分公式等.

【典型错误】 虽然本题涉及的知识点较多，但并不难，可是从得分情况看很不理想. 其主要原因是：考生对基本概念理解不够，基本运算能力较差. 例如，不会利用 $f''(3)=0$，$f(3)=2$ 等题设条件，不知道怎么求 $f'(0)$，$f'(3)$.

例 10(2015 年)　积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$ ________.

【考点分析】 本题考查定积分的计算.

解 因为$\frac{\sin x}{1+\cos x}$为奇函数，$|x|$是偶函数，且积分区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$关于原点对称，所以由奇、偶函数在对称区间上的定积分性质得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|\,\mathrm{d}x$$

$$= 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

故应填$\frac{\pi^2}{4}$.

【方法点击】 本题为基本题型，主要考查了关于原点对称区间上奇偶函数的积分性质. 设 $f(x)$在$[-a,a]$上连续，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x)\text{ 为奇函数}, \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 为偶函数}. \end{cases}$$

【典型错误】 本题不难，但有的考生由于粗心导致结果错误.

例 11(2016 年)　若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛，则(　　).

(A) $a<1$ 且 $b>1$　　(B) $a>1$ 且 $b>1$

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$　　(D) $a>1$ 且 $a+b>1$

【考点分析】 本题考查反常积分的敛散性，利用排除法和反常积分收敛的定义即可得结论.

解 取 $a=0$，若 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^b} = \frac{1}{1-b}(1+x)^{1-b}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1-b}\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+x)^{b-1}}-1\right]$收

敛，只需 $b>1$ 即可. 说明 $a<1$ 可以使原反常积分收敛，排除(B)，(D).

再取 $a=-1, b=2$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty}=+\infty,$$

发散. 说明满足 $a<1$ 且 $b>1$，原反常积分发散，排除(A).

故应选择(C).

【方法点击】 本题是既包含瑕点($x=0$)又区间无限的反常积分，常规做法是将积分拆为两个反常积分，使得一个只是瑕积分，另一个只是无穷区间的积分. 但本题又是选择题，可采用选择题的特殊解法——排除法.

无穷区间广义积分的定义和计算：

① $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)-F(a)\,(F'(x)=f(x))$；

② $\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-\lim\limits_{t\to-\infty}F(t)\,(F'(x)=f(x))$；

③
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\mathrm{d}x+\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\\&=F(a)-\lim_{t\to-\infty}F(t)+\lim_{t\to+\infty}F(t)-F(a).\end{aligned}$$

当上述 $\lim\limits_{t\to-\infty}F(t)$，$\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)$ 都存在时，称上述积分收敛. 否则发散.

【典型错误】 有的考生不是采用排除法解答本题，而是直接计算广义积分，由于计算较繁导致结论不正确.

例 12(2010 年)　设 m,n 均是正整数，则反常积分 $\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性(　　).

(A) 仅与 m 的取值有关　　(B) 仅与 n 的取值有关

(C) 与 m,n 的取值都有关　　(D) 与 m,n 的取值都无关

【考点分析】 本题考查被积函数有瑕点的反常积分的敛散性判定. 首先找出瑕点，然后将积分区间分段，再分别讨论.

解　显然广义积分 $\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 有两个瑕点 $x=0$ 与 $x=1$，则

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x.$$

对于 $\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$，瑕点为 $x=0$. 设 $n>1$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac1m}}{x^{\frac1n}}\cdot x^{\frac1n}=0$，由于 $0<\frac1n<1$，故收敛.

设 $n=1, m=1,2$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac1m}}{x^{\frac1n}}$ 存在，故此时不是反常积分.

设 $n=1,m>2,\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x}\cdot x^{1-\frac{2}{m}}$存在，又 $0<1-\dfrac{2}{m}<1$，故收敛.

对于 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$，瑕点为 $x=1$，当 m 为正整数时，$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}=0$，故收敛.

所以，不论 m,n 取何正整数，反常积分都收敛. 故选(D).

【方法点击】 (1) 注意反常积分的瑕点存在的隐蔽性，以免将广义积分当作定积分讨论而出错. 对于不止一个瑕点的情况，要将积分分解为多个单一瑕点的反常积分再逐个运算.

(2) 瑕积分 $\int_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$($a$ 为瑕点)，当 $p<1$ 时收敛，当 $p\geqslant1$ 时发散.

(3) 设 $f(x)$在$(a,b]$上连续且 $f(x)\geqslant0,\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$.

若存在 $0<q<1$ 使 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^qf(x)$存在，则 $\int_a^bf(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

若存在 $q\geqslant1$ 使 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^qf(x)=d>0$(或$+\infty$)，则 $\int_a^bf(x)\mathrm{d}x$ 发散.

【典型错误】 有的考生只注意到 $x=0$ 为瑕点，而未看出 $x=1$ 也是瑕点.

例 13(2013 年) 计算 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$.

【考点分析】 本题考查无界函数反常积分的计算.

解 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t$，则 $f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$，$f(1)=0$，于是

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=2\int_0^1f(x)\mathrm{d}\sqrt{x}=2[f(x)\sqrt{x}]\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}f'(x)\mathrm{d}x\\&=2f(1)-2\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x}\sqrt{x}\mathrm{d}x=-2\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\&=-4\int_0^1\ln(x+1)\mathrm{d}\sqrt{x}=-4\left[\ln(x+1)\sqrt{x}\,\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x\right]\\&=-4\ln2+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x&\xlongequal[\substack{x=t^2\\ \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t}]{\sqrt{x}=t}\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\cdot2t\mathrm{d}t=2\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\int_0^1\mathrm{d}t-2\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=2(t-\arctan t)\Big|_0^1=2\times\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

所以 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=-4\ln2+4\times\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)=8-2\pi-4\ln2.$

【方法点击】 无界函数反常积分和无穷区间上的反常积分均为考研数学中的高频考点. 2013 年的第(12)小题和本题分别考查了这两种反常积分，这足以引起我们对这一知识点的高度重视.

【典型错误】 有的考生思路不正确，即想求出 $f(x)$ 的具体表达式后再计算积分：$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；由于本题中求不出 $f(x)$ 的初等函数表达式，因此没有得到积分$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 的结果.

例 14(2010 年) 设$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2)\mathrm{d}u, \end{cases}$求$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0} =$ ________.

【考点分析】 本题考查变上限定积分求导；由参数方程所确定的函数的高阶导数.

解 由题设条件得 $x'(t)=-\mathrm{e}^{-t}$，$y'(t)=\ln(1+t^2)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\ln(1+t^2)\mathrm{e}^t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)} = \left(-\mathrm{e}^t\ln(1+t^2) - \mathrm{e}^t\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)(-\mathrm{e}^t)$$

$$= \mathrm{e}^{2t}\ln(1+t^2) + \frac{2t\mathrm{e}^{2t}}{1+t^2} = \mathrm{e}^{2t}\left[\ln(1+t^2)+\frac{2t}{1+t^2}\right].$$

从而$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=0$，故应填 0.

【方法点击】 考生应掌握用变上限定积分定义的函数的求导公式；应特别注意参数方程所确定的函数的二阶导数的求法.

【典型错误】 本题的典型错误是：由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 求 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ 时漏掉了因子 $\frac{1}{x'(t)}$，即由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\ln(1+t^2)\mathrm{e}^t$，只对 t 求导数得$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=-\mathrm{e}^t\ln(1+t^2)-\mathrm{e}^t\,\frac{2t}{1+t^2}$且$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=0$，在本题中虽然由错误的二阶导数$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$的表达式也可得到正确答案 0，但这只是巧合. 出现这种错误的原因是由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$求$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$时 t 是中间变量，x 才是自变量，应该用复合函数求导法即

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}.$$

又因为 $x=x(t)$ 与 $t=t(x)$ 互为反函数，所以由反函数求导法则得$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{x'(t)}$，故$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}$.

例 15(2008 年) 设函数 $f(x) = \int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$，则 $f'(x)$的零点个数为( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【考点分析】 本题考查变上限定积分定义的函数的求导问题及函数零点的概念.

解 由 $f(x) = \int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$，得 $f'(x) = 2x\ln(2+x^2)$.

令 $f'(x)=2x\ln(2+x^2)=0$，知 $x=0$ 为 $f'(x)$的零点. 故应选(B).

【方法点击】 以下是变上限积分求导的推论：