第一部分

微积分

一、函数　极限　连续

（一）内容概括

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立，数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限和右极限，无穷小和无穷大的概念及其关系，无穷小的性质及无穷小的比较，极限的四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

（二）考试要求

最新颁布的全国硕士研究生入学考试大纲（数学三）中对函数、极限、连续这部分内容的要求是：

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.
9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

（三）真题解析

例 1（2014 年）　设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时有（　　）.

（A）$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　（B）$|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$　　（C）$a_n>a-\dfrac{1}{n}$　　（D）$a_n<a+\dfrac{1}{n}$

【考点分析】　极限的性质及定义.

【解】　因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，所以 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N$，当 $n>N$ 时，有

$$|\,a_n-a\,|<\varepsilon,\quad 即\quad a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

则$|a|-\varepsilon<|a_n|\leqslant|a|+\varepsilon$，取 $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$，则知$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$.

故应选（A）.

【方法点击】 本题也可以利用极限的保号性推论：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0$，则$\exists N$，当$n>N$时，

$$|a_n|>\lambda|a|,\quad 0<\lambda<1.$$

【典型错误】 本题考查极限的性质，考生出错的主要原因是对极限的性质没有真正理解.

例 2（2012 年） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________.

【考点分析】 未定式的极限；洛必达法则.

【解】 解法一 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}}{-\sin x-\cos x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{(\sin x+\cos x)\cdot\sin x\cdot\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}.$$

解法二 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}[1+(\tan x-1)]^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln[1+(\tan x-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{-\sin x-\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}.$$

【方法点击】 注意到本题为1^{∞}型未定式，即幂指函数的极限，请先化为指数函数形式，再求极限.

【典型错误】 本题的主要出错点在于有的考生利用等价无穷小替换$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$来化简，从而导致错误. 请考生一定要记住：当无穷小量$\varphi(x)$作为因子出现在极限式中时，才能利用它的等价无穷小量来代换.

例 3（2016 年） 已知函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则$\lim\limits_{x\to0}f(x)=$________.

【考点分析】 函数的极限.

【解】 由于当$x\to0$时，$\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\sin2x$，$\sin2x\sim2x$，$e^{3x}-1\sim3x$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin2x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{3}=2,$$

所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=6$.

【方法点击】 牢记下列等价无穷小结果：

当$x\to0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

当$\alpha(x)$为无穷小时，上面等价无穷小结果中的x都可换为$\alpha(x)$，如$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

【典型错误】 未定式的极限常用等价无穷小替换，本题中部分同学对于$\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\sin2x$不熟悉，容易出错. 另由于不知$f(x)$是否可导，故不能用洛必达法则.

例 4（2007 年） 当$x\to0^+$时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是（ ）.

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　　　　　　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

【考点分析】 本题考查等价无穷小的判断,利用洛必达法则或等价无穷小代换即可.

【解】 **解法一**　当 $x\to0^+$ 时,

$$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x},\quad \sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x},\quad 1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}x,$$

故用排除法可得正确选项为(B).

解法二　$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=$

1,或 $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})=x+o(x)+\sqrt{x}+o(\sqrt{x})=\sqrt{x}+o(\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$.

故应选(B).

【方法点击】 利用等价无穷小代换可简化计算.如果利用定义则需求多个未定式的极限,计算量较大.考生需要记住几个常用的等价无穷小代换.如,当 $\varphi(x)\to0$ 时,$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$,$\tan\varphi(x)\sim\varphi(x)$,$\ln[1+\varphi(x)]\sim\varphi(x)$,$1-\cos\varphi(x)\sim\dfrac{1}{2}[\varphi(x)]^2$,$e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$,$[1+\varphi(x)]^\alpha-1\sim\alpha\varphi(x)$,$\arcsin\varphi(x)\sim\varphi(x)$,$\arctan\varphi(x)\sim\varphi(x)$等.

【典型错误】 本题在求极限时,有的考生是利用洛必达法则,但在计算过程中因为粗心导致错误.希望考生在复习时注意自己计算能力的培养.

例 5(2016 年)　极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________.

【考点分析】 数列的极限,定积分的定义,定积分的分部积分法.

【解】 由定积分定义知

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)\\&=\int_0^1x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^1x\mathrm{d}\cos x=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\mathrm{d}x\\&=-\cos1+\sin x\Big|_0^1=\sin1-\cos1.\end{aligned}$$

【方法点击】 ① 利用定积分定义可求数列和式的极限.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,把区间 $[a,b]$ 进行 n 等分,记 $\xi_i=a+\dfrac{b-a}{n}i$,$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$,则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x_i\to0}\sum_{i=1}^nf(\xi_i)\Delta x_i&=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{n}\right)+\cdots+f\left(a+n\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]\\&=\int_a^bf(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

② 定积分的分部积分法:若 $u(x)$,$v(x)$ 可导,则

$$\int_a^bu(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^bv(x)\mathrm{d}u(x).$$

例 6(2007 年) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$渐近线的条数为( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【考点分析】 曲线渐近线的求法.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0$，所以 $y=0$ 是曲线的水平渐近线；

$x=0$ 是间断点，由于 $\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty$，所以 $x=0$ 是曲线的垂直渐近线；

又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=0,$$

所以 $y=x$ 是曲线的斜渐近线. 故应选(D).

【方法点击】 应熟练掌握曲线的水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线的求法. 并注意当 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$时的情形不同.

① $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}f(x)=A\Rightarrow y=A$ 是水平渐近线；

② $\lim\limits_{x\to a^+(a^-)}f(x)=\infty\Rightarrow x=a$ 是垂直渐近线；

③ $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}\frac{f(x)}{x}=a\neq0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}[f(x)-ax]=b\Rightarrow y=ax+b$ 是斜渐近线；

④ 务必牢记无论求哪种渐近线都应利用单侧极限. 否则将导致错误.

比如：求曲线 $y=x-2\arctan x$ 的渐近线.

由于函数 $y=x-2\arctan x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，因此曲线没有垂直渐近线；

又$\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x-2\arctan x)$，极限不存在，于是曲线也没有水平渐近线；

下面求斜渐近线，因为 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\arctan x}{x}=1$，则

$$b=\lim_{x\to\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(x-2\arctan x-x)=-2\lim_{x\to\infty}\arctan x,$$

显然极限不存在. 所以曲线也没有斜渐近线.

事实上曲线没有水平及垂直渐近线，但有斜渐近线. 出现错误的原因在于求 b 时没有利用单侧极限. 正确解法应该为：

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2\arctan x}{x}=1,\quad k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2\arctan x}{x}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}(x-2\arctan x-x)=-2\lim_{x\to+\infty}\arctan x=-2\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y(x)-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}(x-2\arctan x-x)=\lim_{x\to-\infty}(-2\arctan x)=-2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\pi,$$

因此曲线 $y=x-2\arctan x$ 有两条斜渐近线：$y_1=k_1x+b_1=x-\pi$，$y_2=k_2x+b_2=x+\pi$.

【典型错误】 有些考生在本题求水平渐近线的时候直接求$\lim\limits_{x\to\infty}y(x)$，得到极限不存在，而认为不存在水平渐近线，其实，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$和$\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)$在求水平渐近线的时候要分开考虑，有一个存在即有一条水平渐近线，若两个都存在且不等则意味着有两条水平渐近线（如 $y=\arctan x$）. 同样的，在求垂直渐近线的时候也只要在函数的间断点处求单侧极限即可.

例 7（2009 年）　当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　　）.

（A）$a=1,b=-\frac{1}{6}$　　（B）$a=1,b=\frac{1}{6}$

（C）$a=-1,b=-\frac{1}{6}$　　（D）$a=-1,b=\frac{1}{6}$

【考点分析】 本题考查等价无穷小概念及极限的求法，这两个知识点经常考到，应引起足够的重视.

【解】 由条件知：$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 在 $x\to0$ 时为等价无穷小，则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2(-bx)}$$

$$\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=-\frac{1}{3b}\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{x^2}=1,$$

其中$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=1$ 蕴涵了：$1-a\cos ax\to0(x\to0)$，故 $a=1$$\left(\text{否则，}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty\text{，这与当 }x\to0\text{ 时，}f(x)\text{与 }g(x)\text{为等价无穷小矛盾}\right)$，于是

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2}=-\frac{1}{6b}=1,\quad \text{所以 } b=-\frac{1}{6}.$$

故应选（A）.

【方法点击】 本题是利用等价无穷小代换及洛必达法则求 a,b 的值；也可利用等价无穷小代换及泰勒公式求得结果. 再次强调：一般当无穷小量 $\alpha(x)$ 作为因子（不论是分子或分母中的因子）出现在极限式中时，才可用它的等价无穷小量来代换，否则易出错，如：

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\xlongequal[\text{代换}]{\text{等价无穷小}}\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}0=0$，这种解法是错误的.

正确解法之一为

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

出现以上错误的原因是：$\tan x$ 与 $\sin x$ 不是因子，不能用其等价无穷小代换.

【典型错误】 本题有两种错法：

① 若忽视了洛必达法则的使用前提必须是$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型，则会漏掉 $a=1$ 这一结果，仅能得到$-\frac{a^3}{6b}=1$，从而有可能错选（D）.

② 本题还有一种常见错误在于等价无穷小代换的不恰当应用，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-ax}{x^2(-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x}{-bx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-a}{-bx^2},$$

致使题目无法顺利解答.

例 8(2010 年) 若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$,则 a 等于(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【考点分析】 函数的极限.

【解】 **解法一** 因为$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{axe^x+1-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(ae^x+axe^x-e^x)=a-1$,由题设条件知 $a-1=1$,即 $a=2$.

解法二 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(ae^x+\frac{1-e^x}{x}\right)=a+\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{x}=a-1$.

由 $a-1=1$ 知 $a=2$.

故应选(C).

【方法点击】 对于已知极限值反求极限式中参数的命题,当极限式为未定式时,可以利用洛必达法则直接求解,也可以利用等价无穷小化简后求解,或者利用极限的基本结论:

已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$,则有:

① 当 $x\to x_0$ 时,若 $g(x)\to 0$,则必有 $f(x)\to 0$;

② 当 $x\to x_0$ 时,若 $f(x)\to 0$ 且 $A\neq 0$,则必有 $g(x)\to 0$.

【典型错误】 在利用等价无穷小代换时,有的考生将 $x\to 0$ 时,$1-e^x$ 的等价无穷小错记为 x,从而由 $a+1=1$,得到错误选项(A).

例 9(2014 年) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

【考点分析】 本题考查变上限定积分求导及未定式求极限.

【解】 **解法一**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left\{x^2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-x\right\}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}+x^2\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

解法二

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]\end{aligned}$$

$$\xlongequal{令 u=\frac{1}{x}} \lim_{u\to 0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{e^u-1}{2u}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

【方法点击】 ① 本题将未定式极限与积分上限函数求导结合在一起考查，属于常见的命题方式.

② 利用洛必达法则求极限时，要注重多种方法的综合运用，如等价无穷小代换、泰勒公式、变量代换等.

【典型错误】 有的考生在求极限过程中，没有先将 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 在 $x\to\infty$ 时用其等价无穷小 $\frac{1}{x}$ 代替后再用洛必达法则，而是直接用洛必达法则对 $x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 进行求导；由于求导过程中粗心导致结论错误.

例 10(2015 年) 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时为等价无穷小，求 a,b,k 的值.

【考点分析】 本题考查等价无穷小的概念，洛必达法则. 利用等价无穷小的定义写出极限表达式：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$，再由极限逆问题求 a,b,k 的值.

【解】 **解法一** 由题设条件，知

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}\xlongequal{“\frac{0}{0}”}\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2},$$

由该式，知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{a}{1+x}\right)=1+a=0$，则 $a=-1$. 代入上式知

$$1=\frac{1}{3k}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{x^2}=\frac{1}{3k}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{2x}.$$

若使该式成立，则必有

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x\right]=1+2b=0,$$

则 $b=-\frac{1}{2}$. 再将 $b=-\frac{1}{2}$ 代入，得原式化为

$$1=\frac{1}{6k}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x+\frac{1}{2}x\sin x}{x}$$

$$=\frac{1}{6k}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{(1+x)^3}+\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x}{1}=-\frac{1}{3k},$$

解得 $k=-\frac{1}{3}$，即 $a=-1$，$b=-\frac{1}{2}$，$k=-\frac{1}{3}$.

解法二 由于 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$，根据题意知

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]+bx\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]}{kx^3}\\&=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+\left(b-\frac{1}{2}a\right)x^2+\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{3!}x^4+o(x^3)}{x^3}.\end{aligned}$$

欲使上式成立，则必有

$$\begin{cases}a+1=0,\\ b-\frac{1}{2}a=0,\\ \frac{a}{3k}=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1,\\ b=-\frac{1}{2},\\ k=-\frac{1}{3}.\end{cases}$$

【方法点击】 已知极限存在或已知极限值求其表达式中的待定常数这类问题称为极限的逆问题.解答这类问题的一般思路为：

① 将所给极限式利用洛必达法则或泰勒展开式进行化简.

② 利用“当 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)$ 同时为零式或同时不为零”；如若 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在且 $\lim\limits_{x\to\square}g(x)=0$，则必有 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0$，由此建立含有待定常数的关系式或方程组，便可求得参数值.

【典型错误】 有的考生没有真正理解洛必达法则的含义及利用条件，因此未求出待定常数.

例 11(2006 年) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

【考点分析】 数列的极限.

【解】 **解法一** 由于

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$.

解法二 由于 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\leqslant\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}\leqslant\frac{n+1}{n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$.

【方法点击】 给定数列 $\{a_n\}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 的方法，除了利用极限四则运算法则外，对于那些连加的数列，也可采用相应的方法.