

第3章 离散傅里叶变换(DFT)

离散傅里叶变换(DFT)是数字信号处理中非常有用的一种变换,因为它是频域也离散化的一种傅里叶变换。也就是说,时域和频域都离散化了,这样使计算机对信号的时域、频域都能进行计算;另外 DFT 作为有限长序列的一种傅里叶表示法在理论上相当重要;最后由于 DFT 有多种快速算法,使得信号处理速度有非常大的提高,这些快速算法可用于快速计算信号通过系统的卷积运算中——快速卷积,也可用于快速对信号的频谱分析以及用于随机信号的功率谱估计等一系列应用中。

3.1 傅里叶变换的四种可能形式

由“时间”和“频率”两个自变量的连续或离散的组合,可以构成傅里叶变换的四种可能形式,我们先简单讨论这四种情况的时域频域表示式。

1. 连续时间、连续频率——傅里叶变换。即连续时间非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换关系,所得到的是连续的非周期的频谱密度函数 $X(j\Omega)$ 。在“信号与系统”课程的内容中,已知这一变换对为

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3.1.1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3.1.2)$$

这一变换对的示意图(只说明关系,并不表示实际的变换对)见表 3.1。可以看出时域连续函数造成频域是非周期的谱,而时域的非周期性造成频域是连续的谱密度函数。

2. 连续时间、离散频率——傅里叶级数。即连续时间周期信号的傅里叶级数。

设 $x(t)$ 代表一个周期为 T_0 的周期性连续时间函数, $x(t)$ 可展成傅里叶级数,其傅里叶级数的系数为 $X(jk\Omega_0)$, $X(jk\Omega_0)$ 是离散频率的非周期函数, $x(t)$ 和 $X(jk\Omega_0)$ 组成变换对,表示为

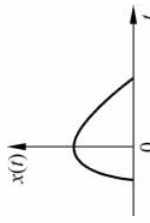
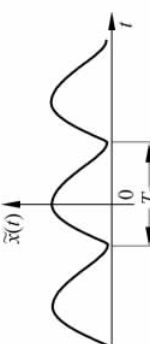
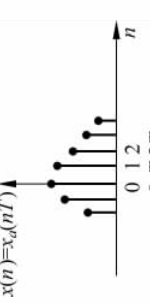
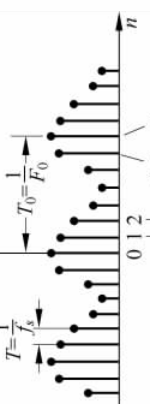
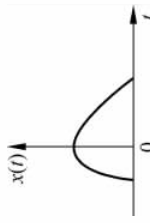
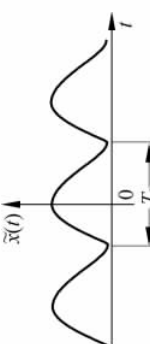
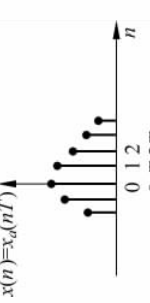
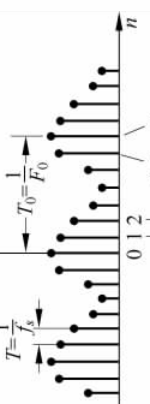
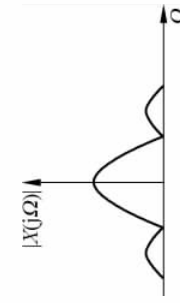
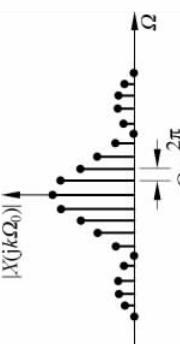
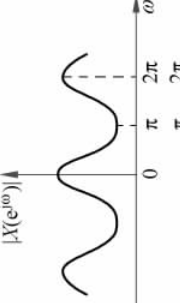
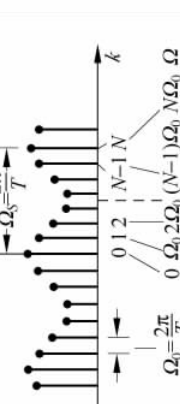
$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3.1.3)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \quad (3.1.4)$$

其中 $\Omega_0 = 2\pi F_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ 为离散频谱相邻两谱线之间的角频率间隔, k 为谐波序号。

这一变换对的示意图见表 3.1。可以看出,时域连续函数造成频域是非周期的频谱函数,而频域的离散频谱则与时域的周期时间函数相对应。

表 3.1 四种傅里叶变换形式的时域、频域表示及图形

傅里叶变换对	连续时间非周期信号的傅里叶变换(FT)对	连续时间周期信号的傅里叶级数(FS)对	非周期序列的傅里叶变换(DTFT)对	周期序列的傅里叶级数对——离散傅里叶级数(DFS)对
$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$ $x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$		$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$ 	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ 	$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ 
时域波形				
频域幅度特性				

- (1) 所有的频率响应幅度都对 $\Omega=0$ (或 $\omega=0$ 或 $k=0$) 呈偶对称性。
- (2) 任何一个域连续, 则在另一个域为非周期的; 任何一个域离散, 则在另一个域为周期的。
- (3) 有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)是(DFS)取一个周期中的值即取主值区间 ($0 \leq n \leq N-1, 0 \leq k \leq N-1$) 中的值。
- (4) 频域只画了幅度响应。

3. 离散时间、连续频率——序列的傅里叶变换。即第2章中讨论过的序列(离散时间信号)的傅里叶变换对

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.1.5)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.1.6)$$

这里的 ω 是数字频率,它和模拟角频率 Ω 的关系为 $\omega = \Omega T$ 。

如果把序列看成模拟信号的抽样,抽样时间间隔为 T ,抽样频率为 $f_s = 1/T$, $\Omega_s = 2\pi/T$,则这一变换对也可写成(代入 $x(n) = x(nT)$, $\omega = \Omega T$)

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-jn\Omega T} \quad (3.1.7)$$

$$x(nT) = \frac{1}{\Omega_s} \int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} X(e^{j\Omega T}) e^{jn\Omega T} d\Omega \quad (3.1.8)$$

这一变换对的示意图见表3.1,图中注明了两种自变量坐标,在时域是 t 和 n ,在频域是模拟频率 Ω 和数字频率 ω 。

同样可看出,时域的离散化造成频域的周期延拓,而时域的非周期对应于频域的连续。

4. 离散时间、离散频率——离散傅里叶级数。

上面讨论的三种傅里叶变换对都不适于在计算机上运算,因为它们至少在一个域(时域或频域)中函数是连续的。从数字计算角度出发,我们感兴趣的是时域及频域都是离散的情况,这就是这里要谈到的周期序列的傅里叶级数,即离散傅里叶级数。

离散傅里叶级数的全面讨论将在下几节进行,这里只是引入一些结果。首先指出,这一变换对是针对有限长序列或周期序列才存在的;其次,它相当于把序列的连续傅里叶变换(3.1.7)式加以离散化(抽样),频域的离散化造成时间函数也呈周期。令 $\Omega = k\Omega_0 = k \cdot 2\pi F_0$,则 $d\Omega = \Omega_0$,从(3.1.7)式与(3.1.8)式可得离散傅里叶级数对为

$$\tilde{X}(e^{jkF_0}) = X(e^{jk\Omega_0 T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jnk\Omega_0 T} \quad (3.1.9)$$

$$\tilde{x}(nT) = \frac{\Omega_0}{\Omega_s} \sum_{k=1}^{N-1} X(e^{jk\Omega_0 T}) e^{jnk\Omega_0 T} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} X(e^{jk\Omega_0 T}) e^{jnk\Omega_0 T} \quad (3.1.10)$$

其中 $\frac{f_s}{F_0} = \frac{\Omega_s}{\Omega_0} = N$ 表示有限长序列(时域及频域)的抽样点数,或周期序列一个周期的抽样点数。

时间函数是离散的,其抽样间隔为 T ,故频率函数的周期(即抽样频率)为 $f_s = \frac{\Omega_s}{2\pi} = \frac{1}{T}$ 。

又因为频率函数是离散的,其抽样间隔为 F_0 ,故时间函数的周期 $T_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$,又有

$$\Omega_0 T = \frac{2\pi\Omega_0}{\Omega_s} = \frac{2\pi}{N} \quad (3.1.11)$$

将(3.1.11)式代入(3.1.9)式与(3.1.10)式中,可得到

$$\tilde{X}(k) = \tilde{X}(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.1.12)$$

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.1.13)$$

这一离散傅里叶级数对的示意图见表 3.1, 图中时间轴及频率轴上都注明了两种自变量标识, 时间轴是 n, t , 频率轴是 $k(\Omega, \omega)$ 。

将以上讨论结果归纳在表 3.1 中, 从表中可以看出, 任何一个域是连续的, 则对应的另一个域一定是非周期的; 任何一个域是离散的, 则对应的另一个域一定是周期的。本章主要讨论第四种变换——离散傅里叶级数(DFS)引申出来的离散傅里叶变换(DFT), 这二者的时域、频域都是离散的, 因而它们的时域、频域又必然是周期的。但是 DFT 是针对有限长序列的, 实际上, 它是取周期序列的 DFS 的一个周期的对应关系来加以定义和研究的, 因而它是隐含有周期性的, 下面将会讨论到它。

3.2 周期序列的傅里叶级数——离散傅里叶级数(DFS)

3.2.1 DFS 的定义

$\tilde{x}(n)$ 表示一个周期为 N 的周期序列, 即

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN) \quad (3.2.1)$$

其中 N 为正整数, r 为任意整数。

由于周期序列 $\tilde{x}(n)$ 不是绝对可和的, 因而其 z 变换是不存在的, 也就是说找不到任何一个衰减因子 $|z|$ 使周期序列绝对可和。即有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)| |z^{-n}| = \infty$$

所以周期序列不能作 z 变换。但是与连续时间周期信号一样, 也可以用离散傅里叶级数来表示周期序列, 即用周期为 N 的复指数序列 $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ 表示周期序列。

可以将连续周期信号的复指数信号与离散周期信号的复指数序列引用以下表格来加以对比。

	基频序列(信号)	周 期	基 频	k 次谐波序列(信号)
连续周期	$e^{j\Omega_0 t} = e^{j(\frac{2\pi}{T_0})t}$	T_0	$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	$e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$
离散周期	$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$	N	$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

所以周期为 N 的复指数序列的基频序列为

$$e_0(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})n}$$

其 k 次谐波序列为

$$e_k(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})kn}$$

虽然表现形式上和连续周期函数是相同的, 但是离散傅里叶级数的谐波成分只有 N 个是独

立成分,这是和连续傅里叶级数不同之处(后者有无穷多个谐波成分)。原因是

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad r \text{ 为任意整数}$$

也就是

$$e_{k+rN}(n) = e_k(n)$$

因而对离散傅里叶级数,只能取 $k=0 \sim (N-1)$ 的 N 个独立谐波分量,不然就会产生二义性。因而 $\tilde{x}(n)$ 可展成如下的离散傅里叶级数,即

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.2.2)$$

这里的 $1/N$ 是一个常用的常数,选取它是为了下面的 $\tilde{X}(k)$ 表达式成立的需要, $\tilde{X}(k)$ 是 k 次谐波的系数。下面求解系数 $\tilde{X}(k)$, 这要利用以下性质,即

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}rN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r}} \\ &= \begin{cases} 1, & r = mN, m \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他 } r \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

将(3.2.2)式两端同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$, 然后从 $n=0 \sim (N-1)$ 的一个周期内求和,考虑到(3.2.3)式,可得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} \right] \\ &= \tilde{X}(r) \end{aligned}$$

把 r 换成 k , 可得

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.2.4)$$

这就是求 $k=0 \sim (N-1)$ 的 N 个谐波系数 $\tilde{X}(k)$ 的公式。同时看出, $\tilde{X}(k)$ 也是一个以 N 为周期的周期序列,即

$$\tilde{X}(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}(k) \quad (3.2.5)$$

这和(3.2.2)式的复指数只在 $k=0, 1, \dots, N-1$ 时才各不相同,即离散傅里叶级数只有 N 个不同的系数 $\tilde{X}(k)$ 的说法是一致的。所以可看出,时域周期序列的离散傅里叶级数在频域(即其系数)也是一个周期序列。因而把(3.2.2)式与(3.2.4)式一起看做是周期序列的离散傅里叶级数对。 $\tilde{x}(n)$ 、 $\tilde{X}(k)$ 都是离散且周期的序列,只要研究它们的一个周期的 N 个序列值就足够了,所以和有限长序列有本质的联系。

一般常采用以下符号:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

则(3.2.2)式及(3.2.4)式的离散傅里叶级数(DFS)对可表示为

正变换

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \quad (3.2.6)$$

反变换

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} \quad (3.2.7)$$

$\text{DFS}[\cdot]$ 表示离散傅里叶级数正变换, $\text{IDFS}[\cdot]$ 表示离散傅里叶级数反变换。

函数 W_N 具有以下性质:

(1) 共轭对称性

$$W_N^n = (W_N^{-n})^* \quad (3.2.8)$$

(2) 周期性

$$W_N^n = W_N^{n+iN}, \quad i \text{ 为整数} \quad (3.2.9)$$

(3) 可约性

$$W_N^{in} = W_{N/i}^n, \quad W_{N/i}^{in} = W_N^n \quad (3.2.10)$$

(4) 正交性

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{nk} (W_N^{mk})^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k} = \begin{cases} 1, & n-m = iN \\ 0, & n-m \neq iN \end{cases} \quad (3.2.11)$$

其中 i 为整数。

一个周期中的 $\tilde{X}(k)$ 与 $\tilde{x}(n)$ 为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.2.12)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.2.13)$$

【例 3.1】 设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 $N=5$ 的周期序列, 其一个周期内的序列为 $x(n) = R_5(n)$,

$\tilde{x}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+5i)$ 。求 $\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)]$ 。

解

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^4 e^{-j\frac{2\pi}{5}nk} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j2\pi k/5}} \\ &= \frac{e^{-j\pi k} (e^{j\pi k} - e^{-j\pi k})}{e^{-j\pi k/5} (e^{j\pi k/5} - e^{-j\pi k/5})} = e^{-j4\pi k/5} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/5)} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

则

$$|\tilde{X}(k)| R_5(k) = \begin{cases} 5, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

图 3.1 画出了 $|\tilde{X}(k)|$ 及 $\tilde{x}(n)$ 的图形。

现在求 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^4 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j5\omega/2} (e^{j5\omega/2} - e^{-j5\omega/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\ &= e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

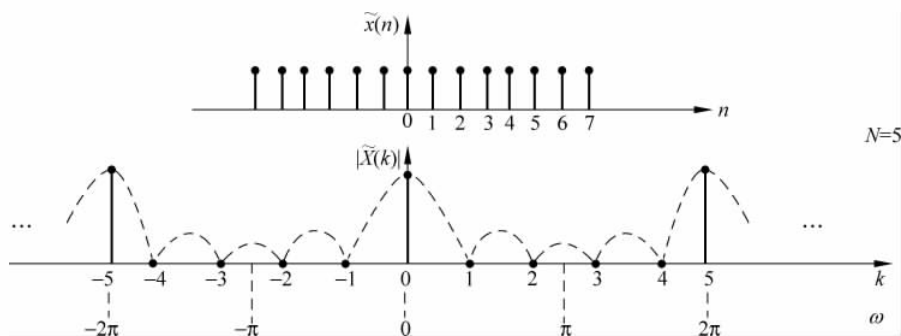


图 3.1 例 3.1 中的 $\tilde{x}(n)$ 与 $|\tilde{X}(k)|$ ($N=5$) (虚线表示 $X(e^{j\omega})$ 的包络线)

由此式可以得到 $X(e^{j\omega})$ 和 $\tilde{X}(k)$ 的关系, 即

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad N=5 \quad (3.2.16)$$

由此式可引出结论为: $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶级数的系数, 即 $\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)]$ 等于 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ 在 $\omega = 2\pi k/N$ (这里 $N=5$) 上的抽样值。由于此例中 $\tilde{x}(n)$ 实际上是抽样间隔为 1 的常数序列 (幅度为 1), 故 $|\tilde{X}(k)|$ 一定是周期为 $N=5$ (相当于 $\omega=2\pi$) 的周期性单位抽样序列 (一个周期中只有一个抽样值不为零, 其他抽样值正好处于 $X(e^{j\omega})$ 为零处, 因而其值为零, 即有 $\tilde{X}(0)=5, |\tilde{X}(1)|=|\tilde{X}(2)|=|\tilde{X}(3)|=|\tilde{X}(4)|=0$)。

【例 3.2】 若 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期的表达式与例 3.1 相同为 $x(n) = R_5(n)$, 求 $N=10$ 的 $\tilde{X}(k)$ 并与例 3.1 中的 $\tilde{X}(k)$ 加以比较。

解 由于是周期序列运算, 在离散时域及离散频域都应有相同的周期 N , 这里 $N=10$, 因而 $\tilde{x}(n)$ 的表达式中的一个周期 ($N=10$) 应为在 $x(n)$ 的后面补 5 个零值点, 即有

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & 5 \leq n \leq N-1 = 9 \end{cases}$$

由于 $\tilde{x}(n)$ 补零值后没有变化, 故 $X(e^{j\omega})$ 与 (3.2.15) 式相同。而 $N=10$ 的 $\tilde{X}(k)$ 则为

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=2\pi k/N} = e^{-j2\pi k/5} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}, \quad N=10 \quad (3.2.17)$$

与上例中 $N=5$ 的 $\tilde{X}(k)$ 相比, 这里 $N=10$ 的 $\tilde{X}(k)$ 其包络函数是没有变化的, 只是抽样间隔减半, 也就是在一个周期内 ($0 \leq \omega < 2\pi$) 抽样数由 5 个变成 10 个, 增加了一倍, 即频谱抽样更密, 故可以看到 $X(e^{j\omega})$ 的更密的频率抽样值。

图 3.2 画出了 $\tilde{x}(n)$ 与 $|\tilde{X}(k)|$ 、 $|X(e^{j\omega})|$ 、 $\arg[\tilde{X}(k)]$ 以及 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 的图形 [$X(e^{j\omega})$ 的表达式见例 3.1 中的 (3.2.15) 式, $|X(e^{j\omega})|$ 、 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 可分别见 (2.3.8) 式与 (2.3.9) 式 (代入 $N=5$) 以及图 2.21]。

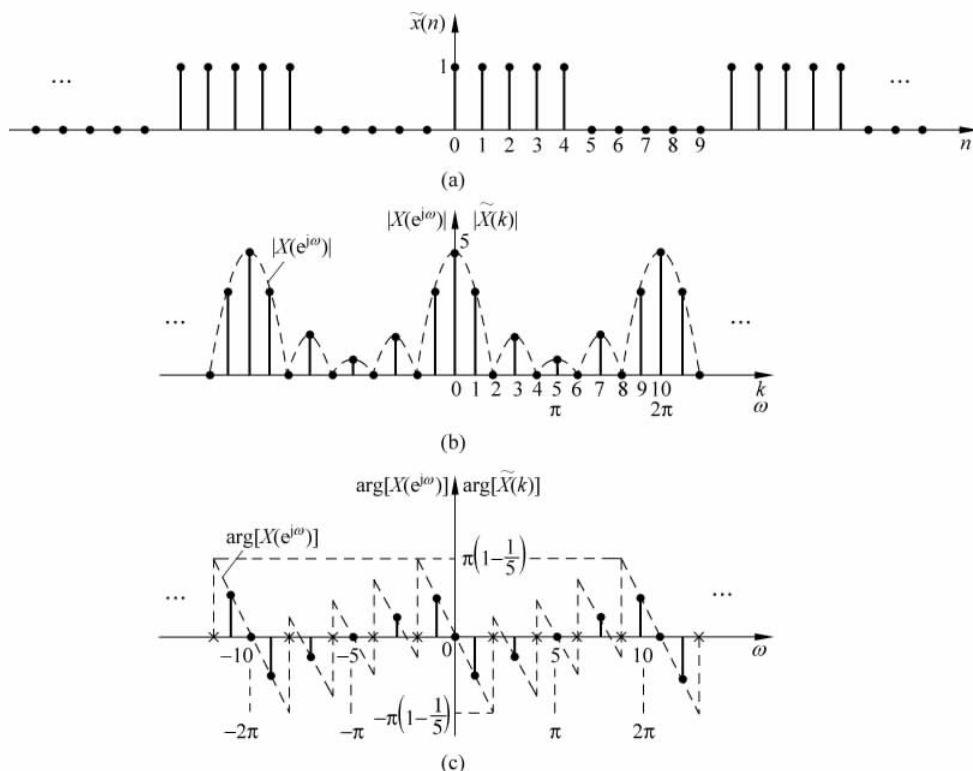


图 3.2 例 3.2 的图形,“×”表示相位是不确定的(因为此处 $X(e^{j\omega})=0$, 相位有突变)

【例 3.3】 设有一个周期为 N 的周期性单位抽样序列串

$$\tilde{x}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(n - iN) = \begin{cases} 1, & n = iN, \quad i \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases} \quad (3.2.18)$$

求

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)]$$

解 因为在 $0 \leq n \leq N-1$ 范围内 $\tilde{x}(n) = \delta(n)$, 按照 DFS 的定义(3.2.6)式, 可得

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(n - iN)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{nk} = W_N^0 = 1 \quad (3.2.19)$$

因而, 对所有 k 值 ($-\infty < k < \infty$) 皆有 $X(k) = 1$, 是一个常数序列, 现在将(3.2.19)式的 $\tilde{X}(k)$ 代入(3.2.7)式中, 可得 $\tilde{x}(n)$ 的另一种表示式

$$\tilde{x}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(n - iN) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

即当 n 等于 N 的整数倍时, N 个复指数 $e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ ($k=0, 1, \dots, N$) 之和为 N , 当 n 为其他整数时, 这一取值之和为零, 即有

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(n - iN) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3.2.20)$$

在例 3.1 的讨论中已说到 $\tilde{X}(k)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 的关系, 同样, 可以找到 $\tilde{X}(k)$ 和 $X(z)$ 的关系。

周期序列 $\tilde{X}(k)$ 可以看成是对 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 作 z 变换, 然后将 z 变换在 z 平面

单位圆上按等间隔角 $\frac{2\pi}{N}$ 抽样而得到的。令

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

则 $x(n)$ 的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

将此式与(3.2.6)式比较可知

$$\tilde{X}(k) = X(z) \big|_{z=e^{j2\pi k/N}} \quad (3.2.21)$$

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=2\pi k/N} \quad (3.2.22)$$

可以看出, $\tilde{X}(k)$ 是在 z 平面单位圆上(从 $\omega=0$ 到 $\omega=2\pi$)的 N 个等间隔角点($2\pi k/N, k=0, 1, \dots, N-1$)上对 z 变换 $X(z)$ 的抽样,而第一个抽样点为 $k=0$,即出现在 $z=1$ 处,图3.3画出了这些抽样点。

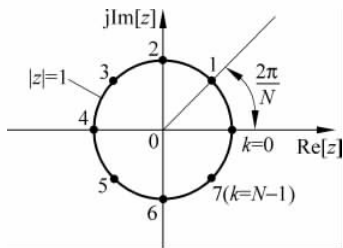


图 3.3 为了得到周期序列 $\tilde{X}(k)$, $X(z)$ 在 z 平面单位圆上抽样的各抽样点($N=8$)

3.2.2 DFS 的性质

由于可以用抽样 z 变换解释DFS,因此它的许多性质与 z 变换的性质非常相似,但是,由于 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 两者都具有周期性,这就使它与 z 变换的性质还有一些重要差别。此外,DFS在时域和频域之间具有严格的对偶关系,这是序列的 z 变换表示所不具有的。研究DFS的性质,是为了引申出有限长序列的DFT(离散傅里叶变换)的各有关性质。

令 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 皆是周期为 N 的周期序列,它们各自的DFS为

$$\tilde{X}_1(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_1(n)], \quad \tilde{X}_2(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_2(n)]$$

学习要点

1. 线性。

$$\text{DFS}[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k) \quad (3.2.23)$$

其中 a, b 为任意常数,所得到的频域序列也是周期序列,周期为 N 。这一性质可由DFS定义直接证明,留给读者自己去做。

2. 周期序列的移位。

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \tilde{X}(k) \quad (3.2.24)$$

证

$$\begin{aligned}\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(n+m) W_N^{nk} \\ &= \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ki} W_N^{-mk}, \quad i = n+m\end{aligned}$$

由于 $\tilde{x}(i)$ 及 W_N^{ki} 都是以 N 为周期的周期函数,故

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ki} = W_N^{-mk} \tilde{X}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \tilde{X}(k)$$

3. 调制特性。

$$\text{DFS}[W_N^{ln} \tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k+l) \quad (3.2.25)$$

证

$$\text{DFS}[W_N^{ln} \tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{ln} \tilde{x}(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{(l+k)n} = \tilde{X}(k+l)$$

4. 对偶性。

在“信号与系统”课程中,我们知道,连续时间傅里叶变换在时域、频域间存在着对偶性,即若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega)$, 则有 $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-j\Omega)$ 。但是,非周期序列和它的离散时间傅里叶变换是两类不同的函数,时域是离散的序列,频域则是连续周期的函数,因而不存在对偶性。而从 DFS 和 IDFS 公式看出,它们只差 $\frac{1}{N}$ 因子和 W_N 的指数的正负号,故周期序列 $\tilde{x}(n)$ 和它的 DFS 的系数 $\tilde{X}(k)$ 是同一类函数,即都是离散周期的,因而也一定存在时域与频域的对偶关系。

从(3.2.7)式的关系中可得到

$$N \tilde{x}(-n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{nk} \quad (3.2.26)$$

由于等式右边是与(3.2.6)式相同的正变换表达式,故将(3.2.26)式中 n 和 k 互换,可得

$$N \tilde{x}(-k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(n) W_N^{nk} \quad (3.2.27)$$

(3.2.27)式与(3.2.6)式相似,即周期序列 $\tilde{X}(n)$ 的 DFS 系数是 $N \tilde{x}(-k)$,因而有以下的对偶关系:

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k) \quad (3.2.28)$$

$$\text{DFS}[\tilde{X}(n)] = N \tilde{x}(-k) \quad (3.2.29)$$

5. 对称性。

与 2.2.4 节中的傅里叶变换的一些对称性质一样,周期性序列的离散傅里叶级数在离散时域及离散频域间也有同样的对称关系。在这里不一一列出这些对称性质,将在离散傅里叶变换一节中着重讨论这些对称性,而把那里讨论的结果加以周期延拓,就可得到周期性序列的离散傅里叶级数的对称性。

6. 周期卷积和。

如果

$$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

则

$$\begin{aligned}\tilde{y}(n) &= \text{IDFS}[\tilde{Y}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m) \tilde{x}_1(n-m)\end{aligned}\quad (3.2.30)$$

即频域周期序列的乘积,对应于时域周期序列的周期卷积。

证
$$\tilde{y}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k) W_N^{-kn}$$

代入

$$\tilde{X}_1(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) W_N^{mk}$$

则

$$\begin{aligned}\tilde{y}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{X}_2(k) W_N^{-(n-m)k} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_2(k) W_N^{-(n-m)k} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m)\end{aligned}$$

将变量进行简单换元,即可得等价的表示式

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m) \tilde{x}_1(n-m)$$

(3.2.30)式是一个卷积和公式,但是它与非周期序列的线性卷积和不同。首先 $\tilde{x}_1(m)$ 和 $\tilde{x}_1(n-m)$ (或 $\tilde{x}_2(m)$ 与 $\tilde{x}_1(n-m)$)都是变量 m 的周期序列,周期为 N ,故乘积也是周期为 N 的周期序列;其次,求和只在—一个周期上进行,即 $m=0 \sim (N-1)$,所以称为周期卷积。

图 3.4 用来说明两个周期序列(周期为 $N=6$)的周期卷积的形成过程。过程中,一个周期的某一序列值移出计算区间时,相邻的一个周期的同一位置的序列值就从另一端移入计算区间。运算在 $m=0 \sim (N-1)$ 区间内进行,先计算出 $n=0,1,\dots,N-1$ 的结果,然后将所得结果周期延拓,就得到所求的整个周期序列 $\tilde{y}(n)$ 。

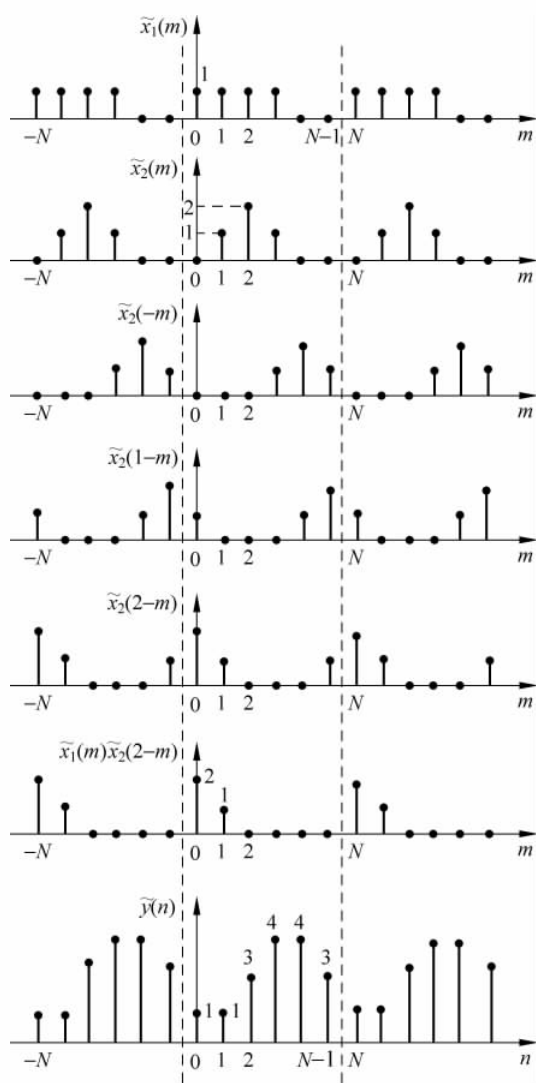
同样,由于 DFS 和 IDFS 的对称性,可以证明(请读者自己证明)时域周期序列的乘积对应着频域周期序列的周期卷积结果除以 N 。即,若

$$\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) \tilde{x}_2(n)$$

则

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(k) &= \text{DFS}[\tilde{y}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n) W_N^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \tilde{X}_2(k-l) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l) \tilde{X}_1(k-l)\end{aligned}\quad (3.2.31)$$

【例 3.4】 (1)设有两个周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 的周期为 N_1 , $\tilde{x}_2(n)$ 的周期为 N_2 。试求 $\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) + \tilde{x}_2(n)$ 的周期;(2)若 $\tilde{X}_1(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_1(n)]$, N_1 点, $\tilde{X}_2(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_2(n)]$, N_2 点,试求 $\tilde{Y}(k) = \text{DFS}[\tilde{y}(n)]$ 。

图 3.4 两个周期序列($N=6$)的周期卷积过程

解 (1) 若 $N_2 = MN_1$ 为整倍数关系, 则取 $N = \max[N_1, N_2] = N_2$ 作为 $\tilde{y}(n)$ 的周期, 即

$$\tilde{y}(n + N_2) = \tilde{x}_1(n + MN_1) + \tilde{x}_2(n + N_2) = \tilde{x}_1(n) + \tilde{x}_2(n) = \tilde{y}(n)$$

若 N_1 与 N_2 为互素的整数, 则取 $N = N_1N_2$ 作为 $\tilde{y} = \tilde{x}_1(n) + \tilde{x}_2(n)$ 的周期, 即

$$\tilde{y}(n + N) = \tilde{y}(n + N_1N_2) = \tilde{x}_1(n + N_1N_2) + \tilde{x}_2(n + N_1N_2) = \tilde{x}_1(n) + \tilde{x}_2(n) = \tilde{y}(n)$$

因此 $\tilde{y}(n)$ 的周期为 $N = N_1N_2$ 。

概括起来, $\tilde{y}(n)$ 的周期就是 N_1N_2 的最小公倍数。

(2) 由于 $\tilde{x}_1(n)$ 是周期为 N_1 的周期序列, 由上面讨论看出, $\tilde{x}_1(n)$ 也是周期为 $N = N_1N_2$ 的序列 (设 N_1, N_2 为互素的正整数), 则有

$$\tilde{X}_{1N}(k) = \sum_{n=0}^{N_1N_2-1} \tilde{x}_1(n) W_{N_1N_2}^{nk}$$

令 $n=m+rN_1$, 则可将周期为 N 的 $\tilde{x}_1(n)$ 序列看成是 N_2 段的 N_1 点长序列的相加, 也就是看成取原 $\tilde{x}_1(n)$ 的 N_2 个周期, 即

$$\tilde{x}_1(n) = \sum_{m=0}^{N_1-1} \tilde{x}_1(m+rN_1), \quad r=0, 1, \dots, N_2-1$$

因此

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{1N_1N_2}(k) &= \tilde{X}_{1N_1N_2}(k) = \sum_{r=0}^{N_2-1} \sum_{m=0}^{N_1-1} \tilde{x}_1(m+rN_1) W_{N_1N_2}^{(m+rN_1)k} \\ &= \sum_{m=0}^{N_1-1} \tilde{x}_1(m) W_{N_1N_2}^{mk} \sum_{r=0}^{N_2-1} W_{N_1N_2}^{rN_1k} \end{aligned}$$

由于

$$\sum_{r=0}^{N_2-1} W_{N_1N_2}^{rN_1k} = \sum_{r=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{rk} = \begin{cases} N_2, & \text{当 } k \text{ 为 } N_2 \text{ 的整数倍时} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即

$$\sum_{r=0}^{N_2-1} W_{N_1N_2}^{rN_1k} = N_2 \delta(k - rN_2)$$

故有

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{1N_1N_2}(k) &= N_2 \sum_{m=0}^{N_1-1} \tilde{x}_1(m) W_{N_1N_2}^{mrN_2} \delta(k - rN_2) \\ &= N_2 \sum_{m=0}^{N_1-1} \tilde{x}_1(m) W_{N_1}^{mr} \delta(k - rN_2) \\ &= N_2 \sum_{m=0}^{N_1-1} \tilde{x}_1(m) W_{N_1}^{m(k/N_2)} \delta(k - rN_2) \\ &= N_2 \tilde{X}_1\left(\frac{k}{N_2}\right) \delta(k - rN_2) \end{aligned}$$

同样, 当把 $\tilde{x}_2(n)$ 看成是周期为 $N=N_1N_2$ 的周期序列时, 则有

$$\tilde{X}_{2N_1N_2}(k) = N_1 \tilde{X}_2\left(\frac{k}{N_1}\right) \delta(k - rN_1)$$

故

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(k) &= \text{DFS}[\tilde{x}_1(n) + \tilde{x}_2(n)] = \text{DFS}[\tilde{y}(n)] \\ &= \tilde{X}_{1N_1N_2}(k) + \tilde{X}_{2N_1N_2}(k) \\ &= N_2 \tilde{X}_1\left(\frac{k}{N_2}\right) \delta(k - rN_2) + N_1 \tilde{X}_2\left(\frac{k}{N_1}\right) \delta(k - rN_1) \end{aligned}$$

3.3 离散傅里叶变换——有限长序列的离散频域表示

3.3.1 DFT 的定义, DFT 与 DFS、DTFT 及 z 变换的关系

学习要点

1. 主值区间、主值序列。

由于周期序列是周期性的, 因而只有有限个序列值有意义, 所以将 DFS 表示式用于有限长序列, 就可得到 DFT 关系。

设 $x(n)$ 为有限长序列, 只在 $0 \leq n \leq N-1$ 时有值, 可以把它看成是以 N 为周期的周期性序列 $\tilde{x}(n)$ 的第一个周期 ($0 \leq n \leq N-1$), 将它称为主值区间, 主值区间的序列 $x(n)$ 就称为主值序列, 则有

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = x((n))_N R_N(n) \quad (3.3.1a)$$

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \quad (3.3.1b)$$

其中 $x((n))_N$ 表示模运算关系

$$x((n))_N = x(n \text{ 模 } N) = x(n \text{ 对 } N \text{ 取余数}) = x(n_1) = x(n \bmod N)$$

即

$$n = n_1 + mN, \quad 0 \leq n_1 \leq N-1, \quad m \text{ 为整数}$$

也就是说, 余数 n_1 是主值区间中的值, 例 $N=8$, 则

$$n = 27 = 3 \times 8 + 3 \quad \text{故 } ((27))_8 = 3 \quad \text{即 } n_1 = 3$$

$$n = -6 = -1 \times 8 + 2 \quad \text{故 } ((-6))_8 = 2 \quad \text{即 } n_1 = 2$$

因此

$$\tilde{x}(27) = x((27))_8 = x(3)$$

于是, 还可将 $((n))_N$ 表示为

$$((n))_N = n - \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor N$$

$\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor$ 表示小于或等于 $\frac{n}{N}$ 的整数。

同样, 对频域序列也可表示为

$$X(k) = X((k))_N R_N(k) \quad (3.3.2a)$$

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N \quad (3.3.2b)$$

2. DFT 定义。

从(3.2.6)式、(3.2.7)式的 DFS、IDFS 式看出, 求和只限定在主值区间, 故完全适用于主值序列 $x(n)$ 和 $X(k)$, 因而, 可以得到有限长序列的 DFT 和 IDFT 定义。

设 $x(n)$ 为 M 点有限长序列, 即在 $0 \leq n \leq M-1$ 内有值, 则可定义 $x(n)$ 的 N 点 ($N \geq M$)。当 $N > M$ 时, 补 $N-M$ 个零值点, N 点离散傅里叶变换定义为

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.3.3a)$$

而 $X(k)$ 的 N 点离散傅里叶反变换定义为

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.3.3b)$$

或简捷地表示成

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} R_N(n) = \tilde{X}(k) R_N(k) \quad (3.3.4a)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} R_N(n) = \tilde{x}(n) R_N(n) \quad (3.3.4b)$$

所以, $x(n)$ 和 $X(k)$ 是一个有限长序列的离散傅里叶变换对。已知其中的一个序列, 就能唯一地确定另一个序列。这是因为 $x(n)$ 与 $X(k)$ 都是点数为 N 的序列, 都有 N 个独立值(可以是复值), 所以信息当然等量。

点数为 N 的有限长序列和周期为 N 的周期序列, 都是由 N 个值定义。但是应该记住, 凡是说到离散傅里叶变换关系之处, 有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的, 都隐含有周期性意义。

3. DFT 用矩阵表示。

由(3.3.3a)式定义的 DFT 也可用矩阵表示

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x} \quad (3.3.5)$$

式中 $\mathbf{X}$ 是 N 点 DFT 频域的列向量, 即

$$\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-2), X(N-1)]^T \quad (3.3.6)$$

$\mathbf{x}$ 是 N 点时域序列的列向量, 即

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-2), x(N-1)]^T \quad (3.3.7)$$

$\mathbf{W}_N$ 称为 N 点 DFT 矩阵, 定义为

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

因此(3.3.3b)式定义的 IDFT 也可用矩阵表示

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X} \quad (3.3.9)$$

其中 $\mathbf{W}_N^{-1}$ 称为 N 点 IDFT 矩阵, 定义为

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

将 $\mathbf{W}_N$ 与 $\mathbf{W}_N^{-1}$ 的表示式进行比较, 可得到

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \quad (3.3.11)$$

将(3.3.6)式、(3.3.7)式及(3.3.8)式代入(3.3.5)式, 可得 DFT 具体矩阵表达式

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \mathbf{W}_N \mathbf{x} \quad (3.3.12)$$

同样将(3.3.6)式、(3.3.7)式、(3.3.10)式代入(3.3.9)式可得 IDFT 具体矩阵及表达式

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = W_N^* X / N \quad (3.3.13)$$

4. DFT 与 DFS 的关系。

由于在研究 DFT 和 DFS 时,时域和频域都是离散的,因而时域和频域应都是周期的,本质上都是离散周期的序列。

定义于第一个周期($0 \leq n \leq N-1$)中的 DFS 对,就得到 DFT 对。也就是说,对 DFT 来说,人们感兴趣的定义范围,在 $x(n)$ 为 $0 \leq n \leq N-1$,在 $X(k)$ 则为 $0 \leq k \leq N-1$,但是,由上面提到本质上的周期性可知,它们都隐含有周期性,即在 DFT 讨论中,有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的。也就是说,对 DFT 的任何处理,都是看成先把序列值周期延拓后,再作相应的处理,然后取主值序列后,就是处理的结果。

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.3.14a)$$

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-nk} \quad (3.3.14b)$$

即 $x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列, $\tilde{x}(n)$ 是 $x(n)$ 的以 N 为周期的周期延拓序列,同样

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.3.15a)$$

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{nk} \quad (3.3.15b)$$

即 $X(k)$ 是 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列, $\tilde{X}(k)$ 是 $X(k)$ 的以 N 为周期的周期延拓序列。

5. DFT 与 DTFT 及 z 变换的关系——频域抽样。

在 3.2.1 节中已提到, $\tilde{X}(k)$ 与 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 的关系,以及 $\tilde{X}(k)$ 与 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的关系,分别可由 (3.2.21) 式与 (3.2.22) 式确定。取此二式中 $\tilde{X}(k)$ 的主值区间,即可得 $X(k)$ 与 $X(z)$ 及 $X(e^{j\omega})$ 的关系为

$$X(k) = X(z) \big|_{z=e^{j2\pi k/N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.3.16a)$$

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.3.16b)$$

从 (3.3.16a) 式及 (3.3.16b) 式看出, $x(n)$ 的 N 点 DFT 的含义是 $x(n)$ 的 z 变换在单位圆上的抽样值,即 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在 $0 \leq \omega < 2\pi$ 上的 N 个等间隔点 $\omega_k = 2\pi k/N$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) 上的抽样值,其抽样间隔为 $2\pi/N$ 。

对某一特定 N , $X(k)$ 与 $x(n)$ 是一一对应的,当频域有效抽样点数 N 变化时, $X(k)$ 也将变化,当 N 足够大时, $X(k)$ 的幅度谱 $|X(k)|$ 的包络可更逼近 $X(e^{j\omega})$ 曲线,在用 DFT 作谱分析时,这一概念起很重要的作用。

6. 离散傅里叶变换对 $(x(n)$ 与 $X(k))$ 中的各参量间的关系。

表 3.1 最后一列给出了离散傅里叶级数对的离散时间、离散频率序列的两个图形,若将两个图形各取主值区间(即一个周期)来研究,即为离散傅里叶变换对,其中各参量为

T_0 : 时域长度; T : 时域两相邻抽样点的时间间距;

f_s : 时域抽样频率; F_0 : 频域两相邻抽样点的频率间距($F_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$);

N : 在 T_0 时间段中的抽样点数。

可以看出,这些参量间的关系为

$$T_0 = NT = \frac{N}{f_s} = \frac{1}{F_0}$$

或写成

$$F_0 = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_0}$$

由此可得以下结论:

(1) 时域两个抽样点的时间间距 T 等于抽样频率 f_s 的倒数($T = 1/f_s$)。

(2) 频域两个抽样点的频率间距 F_0 等于时域的时间长度 T_0 的倒数($F_0 = 1/T_0$)。

(3) F_0 也等于抽样频率 f_s 与抽样点数 N 比值($F_0 = f_s/N$)。

后面将讨论到,在时域长度 T_0 不变的情况下, F_0 (称为频率分辨率)是不会改变的。

【例 3.5】 设 $x(n) = R_5(n)$, 求(1) $X(e^{j\omega})$; (2) $N=5$ 的 $X(k)$; (3) $N=10$ 的 $X(k)$ 。

解

$$\begin{aligned} (1) \quad X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^4 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j5\omega/2} (e^{j5\omega/2} - e^{-j5\omega/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\ &= e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

(2) $N=5$, $X(k)$ 可直接用 DFT 的定义求解, 由于已知 $X(e^{j\omega})$, 故可用 $X(e^{j\omega})$ 的抽样值求解更为快捷。

$$\begin{aligned} X(k) &= X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{5}k} \\ &= e^{-j4\pi k/5} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/5)} = \begin{cases} 5, & k=0 \\ 0, & k=1,2,3,4 \end{cases} \end{aligned}$$

此式与例 3.1 的 $\tilde{X}(k)$ 完全一样。只不过 $X(k)$ 是那里 $\tilde{X}(k)$ 的一个周期。

(3) $N=10$, 则需要将 $x(n)$ 后面补上 5 个零值点, 即

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

这时, 由于 $x(n)$ 的数值没有变化, 故 $X(e^{j\omega})$ 的表达式与上面的完全一样, 可得 $N=10$ 的 $X(k)$ 为

$$\begin{aligned} X(k) &= X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{10}k} \\ &= \begin{cases} 5, & k=0 \\ e^{-j2\pi k/5} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}, & k=1,2,\dots,9 \end{cases} \end{aligned}$$

由以上推导看出,它与例 3.1、例 3.2 的求解过程完全一样,实际上只需将那里的 $\tilde{X}(k)$ 用 $X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k)$ 代替(分别有 $N=5$ 及 $N=10$),即可求得所需的 DFT。

【例 3.6】 设有一个 IIR 系统(自回归滑动平均系统即 ARMA 系统)其差分方程为

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

若此系统代表因果稳定系统,输入为 $x(n)$,输出为 $y(n)$ 。试确定系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi)$ 区间的 L 点等间隔抽样 $H(k)$ 。需要采用 L 点 DFT 进行计算。

解 由差分方程可得到系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

由此可得系统频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i e^{-j\omega i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i e^{-j\omega i}}$$

将频率响应在 ω 的一个周期内 ($0 \leq \omega \leq 2\pi$),按 L 点抽样,但需满足 $L \geq \max[M+1, N+1]$,则有

$$H(k) = H(e^{j\frac{2\pi}{L}k}) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i e^{-j\frac{2\pi}{L}ki}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i e^{j\frac{2\pi}{L}ki}}, \quad 0 \leq k \leq L-1$$

为了采用 DFT,需将差分方程的系数 b_i 及 a_i 看成两个 L 点序列 $a(i)$ 及 $b(i)$,求出它们的 L 点 DFT 后,即可求出 $H(k)$ 值。而 L 点的 $a(i)$ 及 $b(i)$ 序列可表示成

$$a(i) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ a_i, & 1 \leq i \leq N \\ 0, & N+1 \leq i \leq L-1 \end{cases}$$

$$b(i) = \begin{cases} b_i, & 0 \leq i \leq M \\ 0, & M+1 \leq i \leq L-1 \end{cases}$$

由两序列的 L 点 DFT 可表示为

$$A(k) = \text{DFT}[a(i)] = \sum_{i=0}^{L-1} a(i) e^{-j\frac{2\pi}{L}ki} = 1 - \sum_{i=1}^N a_i e^{-j\frac{2\pi}{L}ki}$$

$$B(k) = \text{DFT}[b(i)] = \sum_{i=0}^{L-1} b(i) e^{-j\frac{2\pi}{L}ki} = \sum_{i=0}^M b_i e^{-j\frac{2\pi}{L}ki}$$

将此两式与 $H(k)$ 相比较,可得

$$H(k) = H(e^{j\frac{2\pi}{L}k}) = \frac{B(k)}{A(k)}, \quad 0 \leq k \leq L-1$$

3.3.2 模拟信号时域、频域都抽样后 f_k 与 N 及 f_s 的关系

由于频域第 k 个抽样点的数字频率 ω_k 为

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k = \Omega_k T = 2\pi f_k T = 2\pi \frac{f_k}{f_s} \quad (3.3.17)$$

因而

$$f_k = \frac{k}{NT} = \frac{k f_s}{N} \quad (3.3.18)$$

① 可以这样理解该公式,时域抽样频率 f_s 就是频域的一个周期,若频域抽样点数(当然是指一个周期的抽样点数)为 N ,则频域相邻两个抽样点间的间隔频率为 f_s/N ,因此频域第 k 个抽样点所对应的频率就是 $f_k = k f_s/N$,这与(3.3.18)式是一样的。

② 这说明, N 点 DFT 所对应的模拟频域抽样间隔为 $\frac{1}{NT} = \frac{f_s}{N}$ 由于 NT 表示时域抽样的区间长度,即是记录(观察)时间,(但是要求是有效的记录时间),因此称 $\frac{1}{NT} = F_0$ 为频率分辨率(这将在 3.5.3 节讨论)。从而看出,增加记录时间,就能减小 F_0 ,即提高频率分辨率。

3.3.3 DFT 隐含的周期性

由于 $\tilde{X}(k)$ 是对 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 的抽样, $X(e^{j\omega})$ 是周期性的频谱,周期为 2π 。 $X(k)$ 是 $\tilde{X}(k)$ 的主值区间上的值,即是 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi)$ 这一主值区间上的 N 点等间隔抽样值,因而当 k 超出主值区间($k=0, 1, \dots, N-1$)时,就相当于对 ω 在 $[0, 2\pi)$ 以外区间对 $X(e^{j\omega})$ 的抽样,它是以 N 为周期而重复的,即有 $\tilde{X}(k) = X((k))_N$,因而 DFT 是隐含周期性的。

其次,从 W_N^{kn} 的周期性 $W_N^{(k+mN)n} = W_N^{kn}$ 也可证明 $X(k)$ 隐含周期性,其周期为 N 。即

$$X(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = X(k) \quad (3.3.19)$$

由于 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 是一对变换关系, $\tilde{X}(k)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的频谱,取 $\tilde{x}(n)$ 及 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列 $x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$, $X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k)$ 作为一对变换时,显然是合理的,因为它们符合一对一的唯一变换关系。

因而,对离散傅里叶变换而言,有限长序列都是作为周期序列的一个周期表示的,都隐含有周期性的意义。

3.4 DFT 的主要性质

由于 DFT 是有限长序列定义的一种变换,其序列及其 DFT 的变换区间是 $0 \leq n \leq N-1$ 及 $0 \leq k \leq N-1$ (即主值区间),而 $n < 0$ (或 $k < 0$) 及 $n \geq N$ (或 $k \geq N$) 都在 DFT 变换区间之外,所以它的移位以及它的对称性就和任意长序列的傅里叶变换中的并不相同,这一点是非

常重要的。实际上,它在本质上是和周期性序列的 DFS 有关的,是由有限长序列及其 DFT 表示式隐含的周期性得出的。

3.4.1 线性

设两个有限长序列为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, 则

$$\text{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k) \quad (3.4.1)$$

其中 a, b 为任意常数, 包括复常数。该式可由 DFT 定义直接证明, 留给读者自己去做。

但是要说明如下:

(1) 如果 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 皆为 N 点, 即在 $0 \leq n \leq N-1$ 范围有值, 则 $aX_1(k) + bX_2(k)$ 也是 N 点序列。

(2) 若 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的点数不等, 设 $x_1(n)$ 为 N_1 点 ($0 \leq n \leq N_1-1$), 而 $x_2(n)$ 为 N_2 点 ($0 \leq n \leq N_2-1$), 则 $ax_1(n) + bx_2(n)$ 应为 $N \geq \max[N_1, N_2]$ 点, 这是由隐含周期性决定的, 即讨论的是相同周期的序列的线性才有意义。故 DFT 必须按 N 计算。此时两个序列都需补零值, 补到皆为 N 点序列。则有

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) W_N^{kn} R_N(k) = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} R_N(k) \\ X_2(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) W_N^{kn} R_N(k) = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} R_N(k) \end{aligned}$$

3.4.2 序列的圆周移位性质

学习要点

1. 圆周移位序列。

一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位是指用它的点数 N 为周期, 将其延拓成周期序列 $\tilde{x}(n)$, 将周期序列 $\tilde{x}(n)$ 加以移位, 然后取主值区间 (n 为 $0 \sim (N-1)$) 上的序列值。因而一个有限长序列 $x(n)$ 的 m 点圆周移位定义为

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n) \quad (3.4.2a)$$

式中 $x((n+m))_N$ 表示 $x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 的 m 点线性移位

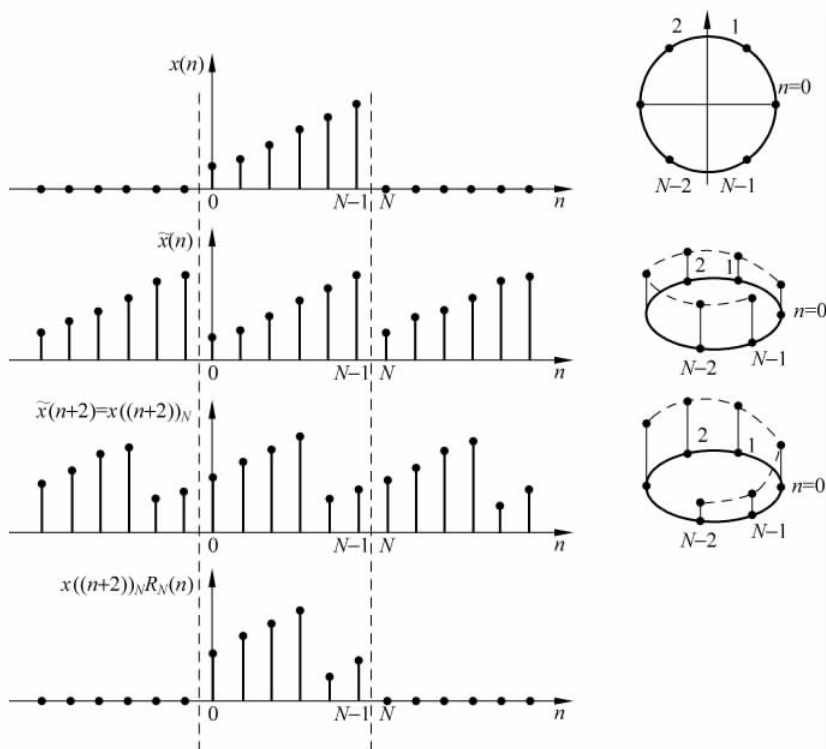
$$x((n+m))_N = \tilde{x}(n+m) \quad (3.4.2b)$$

(3.4.2a) 式中, 乘 $R_N(n)$ 表示对此延拓移位后的周期序列取主值序列, 即 $x((n+m))_N R_N(n)$, 因而 $x_m(n)$ 还是一个 N 点的有限长序列, 但是, 它和线性移位 $x(n+m)$ 是完全不同的, 圆周移位过程如图 3.5 所示。

从图中可以看出, 由于是周期序列的移位, 当只观察 n 为 $0 \sim (N-1)$ 这一区间时, 当某抽样从此区间的一端移出时, 与它相同值的抽样又从此区间的另一端进来了。因此, 可以看成 $x(n)$ 是排列在一个 N 等分的圆周上, 序列 $x(n)$ 的圆周移位, 就相当于 $x(n)$ 在此圆上旋转, 如图 3.5 右图所示, 因而称为圆周移位。实际上围绕圆周观察几圈时, 看到的就是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 。

2. 圆周移位性质。

有限长序列为 $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, 若 $x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$, 则

图 3.5 序列的圆周移位过程($N=6$)

$$X_m(k) = \text{DFT}[x_m(n)] = \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k) \quad (3.4.3)$$

证 利用周期序列的移位性质

$$\text{DFS}[x((n+m))_N] = \text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$

再利用 DFS 和 DFT 关系的性质,即利用(3.3.1b)式及(3.3.2b)式,序列取主值区间,变换也取主值区间,即得

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x_m(n)] &= \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = \text{DFT}[\tilde{x}(n+m) R_N(n)] \\ &= W_N^{-mk} \tilde{X}(k) R_N(k) \\ &= W_N^{-mk} X(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk} X(k) \end{aligned}$$

这表明,有限长序列的圆周移位,在离散频域中只引入一个与频率 $(\omega_k = \frac{2\pi}{N}k)$ 呈正比的线性相移 $W_N^{-km} = e^{(j\frac{2\pi}{N}k)m}$,对频谱的幅度是没有影响的。

同样,对于频域的有限长 N 点序列 $X(k)$,也可看成是分布在一个 N 等分的圆周上,所以对于 $X(k)$ 的圆周移位,利用频域与时域的对偶关系,可以证明以下性质(请读者自己证明):

$$\text{若} \quad X(k) = \text{DFT}[x(n)]$$

则有

$$\text{IDFT}[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}ln} x(n) \quad (3.4.4)$$

这就是调制特性,它说明离散时域的调制(相乘)等效于离散频域的圆周移位。

由(3.4.4)式,利用 $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ 关系,可得

$$\text{DFT}\left[x(n)\cos\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)\right] = \frac{1}{2}[X((k-l))_N + X((k+l))_N]R_N(k) \quad (3.4.5)$$

$$\text{DFT}\left[x(n)\sin\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)\right] = \frac{1}{2j}[X((k-l))_N - X((k+l))_N]R_N(k) \quad (3.4.6)$$

3.4.3 圆周共轭对称性质

学习要点

1. 圆周对称中心。

第2章中,讨论序列的傅里叶变换时,即 DTFT 讨论中,不管序列是有限长或是无限长,讨论其对称性质时以 $n=0$ (或 $\omega=0$) 做对称轴,如果以此为标准,由于 $x(n)$ 和 $X(k)$ 都是定义于主值区间($0 \leq n \leq N-1$, $0 \leq k \leq N-1$)的 N 点长序列,就不会有对称性了。而由于它们隐含有周期性,因而可以将序列排列在 $0 \leq n \leq N-1$ (或 $0 \leq k \leq N-1$)的圆周上,其圆周对称中心(或圆周反对称中心)为 $n=0$ (或 $k=0$),如图 3.6 所示,从图中同样可看出, $n=N/2$ (或 $k=N/2$)也是圆周对称中心(或圆周反对称中心),而且这一对称中心更为直观,如图 3.7 所示,只要在 $n=N$ ($k=N$)处,补上 $n=0$ (或 $k=0$)处的序列值,再以 $n=N/2$ (或 $k=N/2$)为对称中心,观察序列的对称性,就非常直观了。

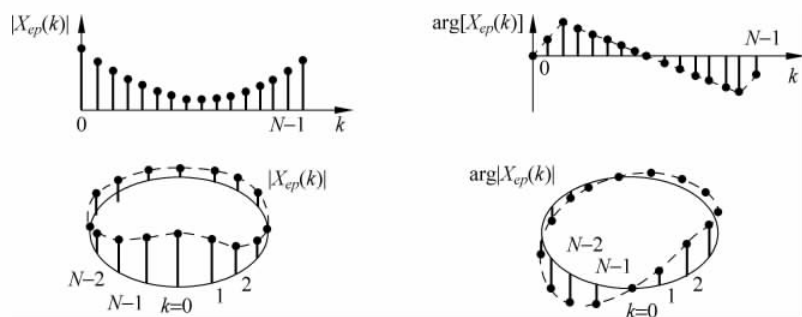


图 3.6 圆周共轭对称的序列 $X_{ep}(k)$

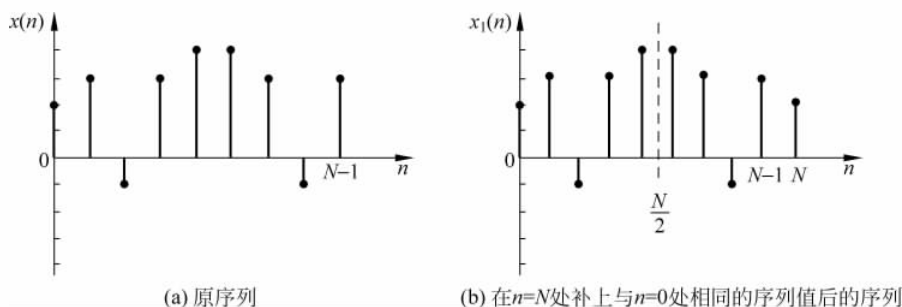


图 3.7 考查序列是否圆周偶(奇)对称序列的方法

2. 在 DFT 应用下,有限长的圆周共轭对称序列 $x_{ep}(n)$ 及圆周共轭反对称序列 $x_{op}(n)$ (离散频域 $X_{ep}(k), X_{op}(k)$ 可同样定义)。定义这两种序列,是为了减少 DFT 的运算量。

(1) 在第 2 章中讨论 DTFT 时所定义的 $x_e(n)$ 及 $x_o(n)$ 不能应用到 DFT 运算中来,因为当 $x(n)$ 为 N 点长序列时,按照第 2 章中(2.3.39)式及(2.3.40)式所得到的共轭对称序列 $x_e(n)$ 与共轭反对称序列 $x_o(n)$ 都是长度为 $2N-1$ 点的序列。而在讨论 DFT 时,序列长度必须是 N 点长序列。

(2) 同样,由于在 DFT 运算中,隐含有周期性,因而从周期性的共轭对称序列 $\tilde{x}_e(n)$ 及共轭反对称序列 $\tilde{x}_o(n)$ 出发,研究有限长序列的 $x_{ep}(n)$ 及 $x_{op}(n)$ 更为直观。

* 周期性共轭对称序列 $\tilde{x}_e(n)$ 应满足

$$\tilde{x}_e(n) = \tilde{x}_e^*(-n) \quad (3.4.7)$$

周期性共轭反对称序列 $\tilde{x}_o(n)$ 应满足

$$\tilde{x}_o(n) = -\tilde{x}_o^*(-n) \quad (3.4.8)$$

* 任一周期性序列 $\tilde{x}(n)$ 都可表示成周期性共轭对称分量 $\tilde{x}_e(n)$ 及周期性共轭反对称分量 $\tilde{x}_o(n)$ 之和,即

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n) \quad (3.4.9)$$

* 由 $\tilde{x}(n)$ 导出 $\tilde{x}_e(n)$ 及 $\tilde{x}_o(n)$ 的公式是与(2.3.39)式及(2.3.40)式的表达式相似的,即

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)] \quad (3.4.10)$$

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)] \quad (3.4.11)$$

(3) 由于有限长序列被看成是周期性序列的主值序列,故有限长序列的圆周共轭对称序列 $x_{ep}(n)$, 圆周共轭反对称序列 $x_{op}(n)$ 分别被看成为 $\tilde{x}_e(n)$ 及 $\tilde{x}_o(n)$ 的主值序列

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n) \quad (3.4.12)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n) \quad (3.4.13)$$

* 圆周共轭对称序列 $x_{ep}(n)$ 满足以下圆周共轭对称关系

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^*((-n))_N R_N(n) = x_{ep}^*(N-n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4.14)$$

圆周共轭反对称序列 $x_{op}(n)$ 满足以下圆周共轭反对称关系

$$x_{op}(n) = -x_{op}^*((-n))_N R_N(n) = -x_{op}^*(N-n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4.15)$$

* 任一有限长序列 $x(n)$ 一定可以表示成圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 之和,即

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n) \quad (3.4.16)$$

* 由 $x(n)$ 导出 $x_{ep}(n)$ 及 $x_{op}(n)$ 的办法,可利用(3.4.12)式、(3.4.13)式并将(3.4.10)式及(3.4.11)式代入可得

$$\begin{aligned} x_{ep}(n) &= \tilde{x}_e(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)]R_N(n) \\ &= \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((-n))_N]R_N(n) \\ &= \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

$$\begin{aligned}
 x_{op}(n) &= \tilde{x}_o(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)]R_N(n) \\
 &= \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((-n))_N]R_N(n) \\
 &= \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)], \quad n = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

注意,以上各式中,包括以后的表示中,表达式 $x^*(N-n)$ 当 $n=0$ 时为 $x^*(N)=x^*(0)$, 同样有 $x(N)=x(0)$ 。显然这里的 $x_{ep}(n)$ 与 $x_{op}(n)$ 都是长度与 $x(n)$ 相同的 N 点有限长序列,与第2章中的 $x_e(n)$ 与 $x_o(n)$ 完全不同,后两个序列都是 $2N-1$ 点序列。

3.4.4 圆周翻褶序列及其 DFT

1. 圆周翻褶序列。由圆周对称中心 $n=0$ 或 $n=\frac{N}{2}$ 出发, N 点有限长序列 $x(n)$ 的翻褶序列不能写成 $x(-n)$, 因为当 $n=0, 1, \dots, N-1$ 时 $x(-n)$ 表示成 $x(-1), x(-2), \dots, x[-(N-1)]$, 这完全不在主值范围, 因而也应从周期性序列的翻褶序列的主值序列来定义, $x(n)$ 的圆周翻褶序列为 $x((-n))_N R_N(n) = x((N-n))_N R_N(n) = x(N-n)$, 仍有 $x(N) = x(0)$ 。在实际运算中, 只要按图 3.6 把 $n=N$ 处补上 $x(0)$ 的值, 然后将序列以 $n=N/2$ 为对称轴将序列加以翻褶即可, 可用以下表格表示。

n	0	1	2	...	$N-2$	$N-1$
$x(n)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	...	$x(N-2)$	$x(N-1)$
$x((-n))_N R_N(n)$ [或 $x(N-n)$]	$x(0)$	$x(N-1)$	$x(N-2)$	...	$x(2)$	$x(1)$

所以, $x(n)$ 的圆周翻褶序列 $x(N-n)$ 相当于将 $x(n)$ 第一个序列值 $x(0)$ 不变, 将后面的序列翻褶 180° 后, 放到 $x(0)$ 的后边, 这样就形成了 $x((-n))_N R_N(n) = x(N-n)$ 序列。

2. 圆周翻褶序列的 DFT。

若 $\text{DFT}[x(n)] = X(k)$
 则 $\text{DFT}[x((-n))_N R_N(n)] = X((-k))_N R_N(k)$, 即

$$\text{DFT}[x(N-n)] = X(N-k) \quad (3.4.19)$$

3.4.5 对偶性

序列为 $x(n)$, 其离散傅里叶变换为 $X(k)$, 即

$$\text{DFT}[x(n)] = X(k) \quad (3.4.20)$$

若将 $X(k)$ 中的 k 换成 n , 即我们来看 $X(n)$ 的离散傅里叶变换, 则有

$$\text{DFT}[X(n)] = N x((-k))_N R_N(k) = N x((N-k))_N R_N(k) = N x(N-k) \quad (3.4.21)$$

证 可以用周期性序列的对偶性关系证明, 把 $x(n)$ 看成 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列, 而把 $\tilde{x}(n)$ 看成 $x(n)$ 的以其长度 N 为周期的周期延拓序列, 利用(3.2.29)式证明(3.4.21)式, 可有

$$\text{DFT}[\tilde{X}(n)R_N(n)] = N \tilde{x}(-k)R_N(k) = N x((-k))_N R_N(k)$$

即 $\text{DFT}[X(n)] = N x((-k))_N R_N(k) = N x((N-k))_N R_N(k) = N x(N-k)$

当然,也可直接利用序列的离散傅里叶级数的反变换的(3.2.7)式而得出,请读者自己证明。

可以看出,(3.4.20)式与(3.4.21)式的关系与连续时间傅里叶变换中的对偶关系 $[\mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega), \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-j\Omega)]$ 是相似的。

但是要注意,非周期序列 $x(n)$ 和它的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ 是两类不同的函数, $x(n)$ 的变量离散的,序列是非周期的, $X(e^{j\omega})$ 的变量是连续的,函数是周期性的,因而时域 $x(n)$ 与频域函数 $X(e^{j\omega})$ 之间不存在对偶性。

3.4.6 DFT 运算中的圆周共轭对称性

这一小节的各个性质,对理解 DFT 的实质,简化其有关的运算都很有助益。

学习要点

设 $\text{DFT}[x(n)] = \text{DFT}\{\text{Re}[x(n)] + j\text{Im}[x(n)]\}$ 。

1. 共轭序列的 DFT。

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*((-k))_N R_N(k) = X^*((N-k))_N R_N(k) = X^*(N-k) \quad (3.4.22)$$

式中 $x^*(n)$ 表示 $x(n)$ 的共轭复序列。

证

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x^*(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \right]^* R_N(k) \\ &= X^*((-k))_N R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} \right]^* R_N(k) \\ &= X^*((N-k))_N R_N(k) = X^*(N-k) \end{aligned}$$

这里利用了

$$W_N^{nN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nN} = e^{-j2\pi n} = 1$$

2. 圆周共轭翻褶序列的 DFT。

$$\text{DFT}[x^*((-n))_N R_N(n)] = \text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k) \quad (3.4.23)$$

证

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x^*((-n))_N R_N(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*((-n))_N R_N(n) W_N^{nk} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x((-n))_N W_N^{-nk} \right]^* \\ &= \left[\sum_{n=-(N-1)}^0 x((n))_N W_N^{nk} \right]^* \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x((n))_N W_N^{nk} \right]^* \quad (\text{利用周期性}) \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \right]^* = X^*(k) \end{aligned}$$

3. 如果序列 $x(n)$ 分成实部和虚部, 将相应的 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ 分成圆周共轭对称分量与圆周共轭反对称分量, 则有以下关系

$$x(n) = \text{Re}[x(n)] + j\text{Im}[x(n)] \quad (3.4.24)$$

$$\begin{array}{ccc} \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ X(k) = X_{ep}(k) & + & X_{op}(k) \end{array} \quad (3.4.25)$$

其中“ $\updownarrow$ ”表示互为 DFT(IDFT), 即有

$$X_{ep}(k) = \text{DFT}[\text{Re}[x(n)]] \quad (3.4.26)$$

$$X_{op}(k) = \text{DFT}[j\text{Im}[x(n)]] \quad (3.4.27)$$

序列 $x(n)$ 的实部的 DFT 等于频域 $X(k)$ 的圆周共轭对称分量, $x(n)$ 的虚部乘 j 的 DFT 等于频域 $X(k)$ 的圆周共轭反对称分量。

证

由于

$$\text{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

则有

$$\text{DFT}[\text{Re}[x(n)]] = \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n) + x^*(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + x^*(N-k)] = X_{ep}(k)$$

同样, 由于

$$j\text{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

则有

$$\text{DFT}[j\text{Im}[x(n)]] = \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n) - x^*(n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = X_{op}(k)$$

4. 如果将序列 $x(n)$ 分成圆周共轭对称分量与圆周共轭反对称分量, 将相应的 DFT 分成实部和虚部, 则有以下关系

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n) \quad (3.4.28)$$

$$\begin{array}{ccc} \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ X(k) = \text{Re}[X(k)] + j\text{Im}[X(k)] \end{array} \quad (3.4.29)$$

其中“ $\updownarrow$ ”表示互为 DFT(IDFT), 即有

$$\text{Re}[X(k)] = \text{DFT}[x_{ep}(n)] \quad (3.4.30)$$

$$j\text{Im}[X(k)] = \text{DFT}[x_{op}(n)] \quad (3.4.31)$$

即序列 $x(n)$ 的圆周共轭对称分量的 DFT 等于频域 $X(k)$ 的实部, $x(n)$ 的圆周共轭反对称分量的 DFT 等于频域 $X(k)$ 的虚部乘 j 。

证

由于

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$$

则有

$$\text{DFT}[x_{ep}(n)] = \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n) + x^*(N-n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(k)] = \text{Re}[X(k)]$$

同样, 由于

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$$

则有

$$\text{DFT}[x_{op}(n)] = \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n) - x^*(N-n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(k)] = \text{jIm}[X(k)]$$

从 DFT 的时域、频域关系上看, 由 (3.4.26) 式及 (3.4.27) 式可知, 序列 $x(n)$ 的实部的 DFT 等于频域 $X(k)$ 的圆周共轭对称分量, $x(n)$ 的虚部乘 j 的 DFT 等于频域 $X(k)$ 的圆周共轭反对称分量; 而由 (3.4.30) 式及 (3.4.31) 式可知, 序列 $x(n)$ 的圆周共轭对称分量的 DFT 等于频域 $X(k)$ 的实部, 序列 $x(n)$ 的圆周共轭反对称分量的 DFT 等于频域 $X(k)$ 的虚部乘 j 。

5. 若序列 $x(n)$ 是 N 点实序列, 则可分解为圆周偶对称分量 $x_{ep}(n)$ 及圆周奇对称分量 $x_{op}(n)$

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(N-n)] \quad (3.4.32)$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(N-n)] \quad (3.4.33)$$

其中 $x_{ep}(n)$ 满足圆周偶对称关系, $x_{op}(n)$ 满足圆周奇对称关系

$$x_{ep}(n) = x_{ep}(N-n) \quad (3.4.34)$$

$$x_{op}(n) = -x_{op}(N-n) \quad (3.4.35)$$

6. 若 $x(n)$ 是 N 点实序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, N 点。由于 $x(n) = x^*(n)$, 则有

$$X(k) = X^*(N-k) \quad (3.4.36)$$

即若 $x(n)$ 是 N 点实序列, 则 $X(k)$ 满足 (3.4.36) 式的圆周共轭对称关系。

(1) (3.4.36) 式的圆周共轭对称关系, 从 $X(k)$ 的模 $|X(k)|$ 及相角 $\arg[X(k)]$ 上看, 当

$$X(k) = |X(k)| e^{\text{j}\arg[X(k)]}$$

(3.4.36) 式的含义是以下两个关系式成立

$$|X(k)| = |X(N-k)| \quad (3.4.37)$$

$$\arg[X(k)] = -\arg[X(N-k)] \quad (3.4.38)$$

所以, 当 $x(n)$ 为 N 点实序列时, $|X(k)|$ 满足圆周偶对称关系, 即对于 $k = N/2$ 成镜像对称 (偶对称), 而 $\arg[X(k)]$ 满足圆周奇对称关系。 $k = N/2$ 相当于频率 $f = f_s/2$, 即为折叠频率。

(2) (3.4.36) 式的圆周共轭对称关系, 若从 $X(k)$ 的实部 $\text{Re}[X(k)]$ 及虚部 $\text{Im}[X(k)]$ 看, 若

$$X(k) = \text{Re}[X(k)] + \text{jIm}[X(k)]$$

(3.4.36) 式的含义也包含以下两个关系式成立

$$\text{Re}[X(k)] = \text{Re}[X(N-k)] \quad (3.4.39)$$

$$\text{Im}[X(k)] = -\text{Im}[X(N-k)] \quad (3.4.40)$$

即当 $x(n)$ 为 N 点实序列时, $X(k)$ 的实部 $\text{Re}[X(k)]$ 满足圆周偶对称关系, $X(k)$ 的虚部 $\text{Im}[X(k)]$ 满足圆周奇对称关系。

所谓圆周偶对称及圆周奇对称, 同样是把序列排在一个圆周上, 以 $k=0$ 这一对称中心看序列的偶对称、奇对称关系; 或直接将 $k=N$ 处补上 $k=0$ 处的序列值, 直接观察序列对 $k=\frac{N}{2}$ (对称中心) 处的对称情况, 这和上面的讨论是一样的。

7. 若 $x(n)$ 是 N 点纯虚序列, 即 $x(n) = -x^*(n)$, 则 $X(k)$ 只有圆周共轭反对称分量, 即 $X(k)$ 满足圆周共轭反对称关系, 即

$$X(k) = -X^*(N-k)$$

这一表达式的含义是: $X(k)$ 的实部圆周奇对称, 虚部圆周偶对称, 即

$$\text{Re}[X(k)] = -\text{Re}[X(N-k)] \quad (3.4.41)$$

$$\text{Im}[X(k)] = \text{Im}[X(N-k)] \quad (3.4.42)$$

8. 利用 DFT 的共轭对称性, 可以减少实序列的 DFT 的计算量, 一般只要知道一半数目的 $X(k)$ 就可以了, 另一半可用圆周共轭对称性求得; 此外, 利用一个复序列的 N 点 DFT, 可以求得两个实序列的 N 点 DFT, 或利用一个复序列的 N 点 DFT, 求得一个 $2N$ 点实序列的 DFT, 分别见以下的例题。

【例 3.7】 利用圆周共轭对称性, 可以用一次 N 点 DFT 运算计算两个 N 点实数序列的 DFT, 因而可以减少计算量。

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是 N 点实数序列, 试用一次 DFT 计算它们各自的 DFT:

$$\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k), \quad \text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$$

解 先利用这两个实序列构成一个复序列, 即

$$w(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

则

$$\begin{aligned} \text{DFT}[w(n)] &= W(k) = \text{DFT}[x_1(n) + jx_2(n)] \\ &= \text{DFT}[x_1(n)] + j\text{DFT}[x_2(n)] = X_1(k) + jX_2(k) \end{aligned}$$

又由于 $x_1(n) = \text{Re}[w(n)]$, 故由 (3.4.26) 式可得

$$X_1(k) = \text{DFT}\{\text{Re}[w(n)]\} = W_{ep}(k) = \frac{1}{2}[W(k) + W^*(N-k)]$$

同样, 由于 $x_2(n) = \text{Im}[w(n)]$, 故由 (3.4.27) 式可得

$$X_2(k) = \text{DFT}\{j\text{Im}[w(n)]\} = \frac{1}{j}W_{op}(k) = \frac{1}{2j}[W(k) - W^*(N-k)]$$

所以, 用 DFT 求出 $W(k)$ 后, 再按以上公式即可求得 $X_1(k)$ 与 $X_2(k)$ 。

【例 3.8】 用一个 N 点序列的 DFT 计算一个 $2N$ 点实序列的 DFT。

设 $x(n)$ 为 $2N$ 点长实序列, $0 \leq n \leq 2N-1$, 求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $2N$ 点。

解 利用实序列的共轭对称性, 可减少一半工作量, 因而可用一个 N 点 DFT 来求此 $2N$ 点 $X(k)$ 。

先将 $x(n) (n=0, 1, \dots, 2N-1)$ 按 n 的奇偶分成以下两组

$$\left. \begin{aligned} x(2r) &= x_1(r) \\ x(2r+1) &= x_2(r) \end{aligned} \right\}, \quad r = 0, 1, \dots, N-1$$

令 $y(n) = x_1(n) + jx_2(n)$, N 点

有 $Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \text{DFT}[x_1(n)] + \text{DFT}[jx_2(n)] = X_1(k) + jX_2(k)$, N 点

由于 $x_1(n)$ 是 $y(n)$ 的实部, $jx_2(n)$ 是 $y(n)$ 的虚部乘 j 。故有

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)] = Y_{ep}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) + Y^*(N-k)]$$

$$jX_2(k) = \text{DFT}[jx_2(n)] = Y_{op}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) - Y^*(N-k)]$$

这样由 N 点 $Y(k)$ 可求得 N 点 $X_1(k)$ 及 N 点 $X_2(k)$ 。下面由 $X_1(k)$ 及 $X_2(k)$ 求得 $2N$ 点 $X(k)$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{2N-1} x(n)W_{2N}^{nk} = \sum_{\substack{n=0 \\ n=\text{偶数}}}^{2N-1} x(n)W_{2N}^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ n=\text{奇数}}}^{2N-1} x(n)W_{2N}^{nk} \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} x(2r)W_{2N}^{2rk} + \sum_{r=0}^{N-1} x(2r+1)W_{2N}^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} x_1(r)W_N^{rk} + W_{2N}^k \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r)W_N^{rk} = X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k) \end{aligned}$$

此式只求出 $X(k)$ 的上一半值 ($k=0, 1, \dots, N-1$), 将 k 用 $k+N$ 代替即可求出其下一半值, 因有

$$\left. \begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k) \\ X(k+N) &= X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k) \end{aligned} \right\}, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

所以只需计算一个 N 点 DFT, 求得 $Y(k)$, 然后由加减运算计算出 $X_1(k)$ 及 $X_2(k)$, 进而经过乘 W_{2N}^k 因子及加减运算可求得 $x(n)$ 的 $2N$ 点 DFT, 即 $X(k)$ 。

【例 3.9】 已知 $g(n) = p(n) + jv(n)$

$p(n)$ 、 $v(n)$ 皆为 N 点长实序列, $0 \leq n \leq N-1$

设 $G(k) = \text{DFT}[g(n)]$, $0 \leq k \leq N-1$

若 (1) $G(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k}$, $0 \leq k \leq N-1$, a, b 为实数。

(2) $G(k) = 1 + jN$

试求 $P(k) = \text{DFT}[p(n)]$, $V(k) = \text{DFT}[v(n)]$ 以及 $p(n)$, $v(n)$ 。

解

(1) 由于 $p(n)$ 、 $v(n)$ 都是实序列, 故可用 DFT 运算中的圆周共轭对称性来求解

$$\begin{aligned} p(n) = \text{Re}[g(n)] &\xrightarrow{\text{FFT}} P(k) = G_{ep}(k) \\ jv(n) = j\text{Im}[g(n)] &\xrightarrow{\text{FFT}} jV(k) = G_{op}(k) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} G(k) &= G_{ep}(k) + G_{op}(k) \\ P(k) = G_{ep}(k) &= \frac{1}{2}[G(k) + G^*(N-k)] = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} \\ V(k) = \frac{1}{j}G_{op}(k) &= \frac{1}{2j}[G(k) - G^*(N-k)] = \frac{1-b^N}{1-bW_N^k} \end{aligned}$$

所以

$$p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P(k) W_N^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} W_N^{-nk}$$

可以看出 $\frac{1-a^N}{1-aW_N^k}$ 是 N 项等比级数之和, 即

$$\frac{1-a^N}{1-aW_N^k} = \sum_{m=0}^{N-1} (aW_N^k)^m$$

于是

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} a^m W_N^{km} \right) W_N^{-kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} a^m \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & \text{其他 } m \end{cases}$$

则有

$$p(n) = a^n, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

即

$$p(n) = a^n R_N(n)$$

同样, 可求得

$$v(n) = b^n R_N(n)$$

也可以用另一种思路来求解, 令 $G(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k} = A(k) + B(k)$

即令

$$A(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k}, \quad B(k) = j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k}$$

看 $A(k)$ 是否满足圆周共轭对称性, $B(k)$ 是否满足圆周共轭反对称性。实际上, 很明显满足 $A(k) = A^*(N-k)$, $B(k) = -B^*(N-k)$, 即 $A(k) = G_{ep}(k)$, $B(k) = G_{op}(k)$, 故 $g(n)$ 的实部 $p(n)$ 的 DFT 一定等于 $A(k)$, 而 $g(n)$ 的虚部 $v(n)$ 乘 j 的 DFT 一定等于 $B(k)$, 由此可求得 $P(k)$ 及 $V(k)$, 从而求得 $p(n)$ 及 $v(n)$, 结果是相同的。

(2) 可以用上面同样办法来求解

$$P(k) = \frac{1}{2} [G(k) + G^*(N-k)] = \frac{1}{2} [1 + jN + 1 - jN] = 1$$

$$V(k) = \frac{1}{2j} [G(k) - G^*(N-k)] = N$$

$$p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \delta(n)$$

$$v(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} N W_N^{-kn} = N \delta(n)$$

* 表 3.2 中给出了各种特定序列及其 DFT 的实、虚、偶对称、奇对称的关系。当然, 这里提到的偶对称、奇对称都是圆周偶对称、圆周奇对称关系。在做题或实际应用中, 熟练掌握表中的对应关系, 常可作为简化运算, 检验运算结果之用, 可起到事半功倍的作用。

表 3.2 序列及其 DFT 的实、虚、偶、奇关系

$x(n)$ [或 $X(k)$]	$X(k)$ [或 $x(n)$]	$x(n)$ [或 $X(k)$]	$X(k)$ [或 $x(n)$]
偶对称	偶对称	实数, 偶对称	实数, 偶对称
奇对称	奇对称	实数, 奇对称	虚数, 奇对称
实数	实部为偶对称, 虚部为奇对称	虚数, 偶对称	虚数, 偶对称
虚数	实部为奇对称, 虚部为偶对称	虚数, 奇对称	实数, 奇对称

3.4.7 DFT 形式下的帕塞瓦定理

若长度为 N 点的序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为 $X(k)$, 则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k) \quad (3.4.43)$$

当 $x(n)=y(n)$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (3.4.44)$$

若 $x(n)=y(n)$ 都是实序列, 则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (3.4.45)$$

(3.4.44) 式、(3.4.45) 式表明, 一个序列在时域计算的能量与在频域计算的能量是相等的。

3.4.8 圆周卷积和与圆周卷积和定理

在第 2 章讨论的时域卷积和定理中的卷积和指的是离散时域的线性卷积和, 其频域是连续的。本章讨论的是与 DFT 相关联的有限长序列的圆周卷积和定理, 其频域是离散的, 但是其所涉及的圆周卷积和运算与线性卷积和是有区别的。

学习要点

1. 两个有限长序列的圆周卷积和。

(1) 设两个有限长序列 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 长度分别为 N_1 点和 N_2 点, 则将以下表达式称为 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 的 L 点圆周卷积和

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_2(m) x_1((n-m))_L \right] R_L(n), \quad L \geq \max[N_1, N_2] \\ &= x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = x_2(n) \textcircled{L} x_1(n) \end{aligned} \quad (3.4.46)$$

这里, L 点圆周卷积和用符号 $\textcircled{L}$ 表示。

(2) 可以用矩阵来表示圆周卷积和关系, 由于 (3.4.46) 式中, 是以 m 为哑变量, 故 $x_2((n-m))_L$ 表示对圆周翻褶序列 $x_2((-m))_L$ 的圆周移位序列, 移位数为 n 。即当 $n=0$ 时, 以 m 为变量 ($m=0, 1, \dots, L-1$) 的 $x_2((-m))_L R_L(n)$ 序列为 $\{x_2(0), x_2(L-1), x_2(L-2), \dots, x_2(2), x_2(1)\}$, 这就是前面讨论过的圆周翻褶序列。当 $n=1, 2, \dots, L-1$ 时,

就是分别将这一翻褶序列圆周右移 $1, 2, \dots, L-1$ 位。

由此可得出 $x_2((n-m))_L R_L(n)$ 的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} x_2(0) & x_2(L-1) & x_2(L-2) & \cdots & x_2(1) \\ x_2(1) & x_2(0) & x_2(L-1) & \cdots & x_2(2) \\ x_2(2) & x_2(1) & x_2(0) & \cdots & x_2(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2(L-1) & x_2(L-2) & x_2(L-3) & \cdots & x_2(0) \end{bmatrix} \quad (3.4.47)$$

此矩阵称为 $x_2(n)$ 的 L 点圆周卷积矩阵。其第一行是 $x_2(n)$ 的 L 点圆周翻褶序列, 其他各行是第一行的圆周右移序列, 每向下一行, 圆周右移 1 位。这里若 $x_2(n)$ 长度 $N_2 < L$, 则需在 $x_2(n)$ 的尾部补零值, 补到 L 点长然后再圆周翻褶、圆周移位。有了这一矩阵, 则可将 (3.4.46) 式表示成圆周卷积的矩阵形式, 即

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) & x_2(L-1) & x_2(L-2) & \cdots & x_2(1) \\ x_2(1) & x_2(0) & x_2(L-1) & \cdots & x_2(2) \\ x_2(2) & x_2(1) & x_2(0) & \cdots & x_2(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2(L-1) & x_2(L-2) & x_2(L-3) & \cdots & x_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ \vdots \\ x_1(L-1) \end{bmatrix} \quad (3.4.48)$$

同样, 若 $x_1(n)$ 长度 $N_1 < L$, 也要在尾部先补充零值点, 补到 L 点后, 再写出圆周卷积矩阵。

例如, 若 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4\}$, $x_2(n) = \{2, 6, 3\}$

即 $x_1(n)$ 为 $N_1=4$, $x_2(n)$ 为 $N_2=3$, 若需作 $L=6$ 点圆周卷积, 则两序列应分别表示成 $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 0, 0\}$, $x_2(n) = \{2, 6, 3, 0, 0, 0\}$, 则圆周卷积可表示成

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 21 \\ 32 \\ 33 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (3.4.49)$$

(3) 可以看出, (3.4.46) 式中 $x_2((n-m))_L$ [或 $x_1((n-m))_L$] 只在 $m=0$ 到 $m=L-1$ 范围内取值, 因而它就是圆周移位, 所以这一卷积和称为圆周卷积和。

① L 点圆周卷积和是以 L 为周期的周期卷积和的主值序列。

② L 的取值 $L \geq \max[N_1, N_2]$, N_1, N_2 分别为参与圆周卷积和运算的两个序列的长度点数; 取值 L 不同, 则周期延拓就不同, 因而所得结果也不同。

2. 圆周卷积和与线性卷积和的不同。 ①参与圆周卷积运算的两个序列的长度必须同为 L , 若长度不同, 则可采用补零值点的方法, 使其长度相同, 线性卷积和则无此要求; ②圆周卷积和得到的序列长度为 L 点, 和参与卷积的两序列长度相同, 线性卷积和若参与卷积运算的两序列长度分别为 N_1 及 N_2 , 则卷积得到的序列长度为 $N_1 + N_2 - 1$, 与参与卷积运算两序列的长度都不相同; ③线性卷积和的运算中是做线性移位, 圆周卷积和的运算中是做

圆周移位。

图 3.8 就表示了 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的 $N=7$ 点的圆周卷积和, 其中

$$x_1(n) = R_3(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 2 \\ 0, & 3 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 2 \\ 0, & 3 \leq n \leq 5 \\ 1, & n = 6 \end{cases}$$

这里, $x_1(n)$ 为 $N_1=3$ 点长序列, 将它补零值补到为 $L=7$ 点长序列, $x_2(n)$ 为 $N_2=7$ 点长序列。

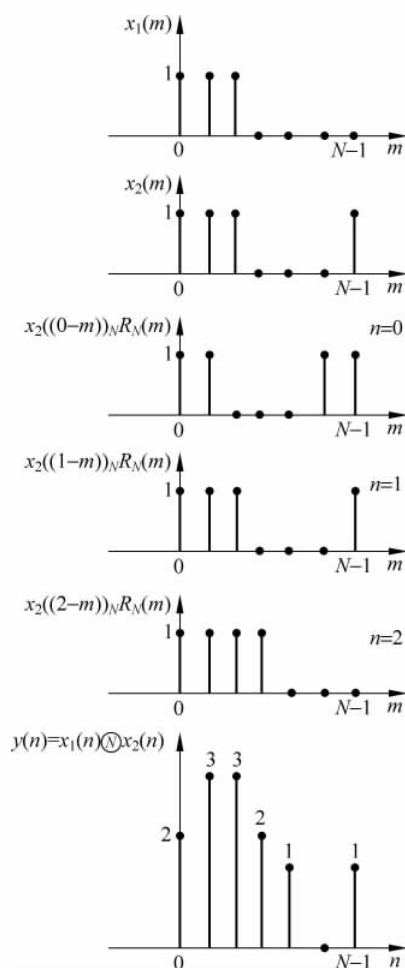


图 3.8 两个有限长序列 ($N=7$) 的圆周卷积和

【例 3.10】 设 $x(n)=[1, 3, 2, 4]$, $h(n)=[2, 1, 3]$

求圆周卷积和 $y(n)=x(n) \oplus h(n)$, $L=4$ 。

解 用公式表示

$$y(n) = x(n) \textcircled{4} h(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x(m)h((n-m))_L R_L(n), \quad L=4$$

① 首先要将 $h(m)$ 补零值点, 补到 $L=4$ 点序列, 成为 $h(m)=[2, 1, 3, 0]$ 。

② 其次将 $h(m)$ 作圆周翻褶 $h((L-m))R_L(m)=h(L-m)$, 即排列成 $h((L-m))R_L(m)=h(L-m)=[\underline{h}(0), h(L-1), h(L-2), \dots, h(1)]=[\underline{2}, 0, 3, 1]$ 。

③ 然后利用逐位圆周移位 (n) 来求 $n=0, 1, \dots, L-1$ 各点的 $y(n)$ 。移位时, $h((n-m))_L R_L(m)$ 右边 $m=L-1$ 处序列值移出 m 的主值区间, 则同一序列值一定出现在左边 $m=0$ 处, 这就相当于排在圆周上的圆周移位。

④ 相乘。只需将哑变量 m 在主值区间 $0 \leq m \leq L-1$ 中的 $x(m)$ 与 $h((n-m))_L R_L(m)$ 相乘。

⑤ 将 m 的主值区间中各相乘结果相加, 即得到某一个 n 处的 $y(n)$ 值。

⑥ 取变量为 $n+1$ 重复③到⑤的计算, 直到算出 $0 \leq n \leq L-1$ 中的所有 $y(n)$ 值, 直接用画图法更为直观, 如图 3.9 所示。

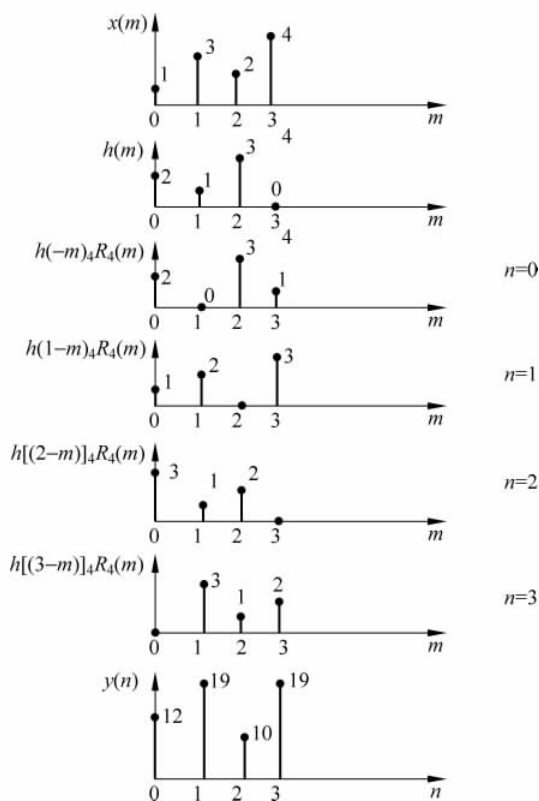


图 3.9 有限长序列的圆周卷积和

注意, 运算中圆周移位 (n) 及相乘相加都是在 m 的主值区间内进行。由此得出

$$y(n) = [\underline{12}, 19, 10, 19]$$

3. 圆周卷积和定理。

设有限长序列 $x_1(n)$ 为 N_1 点序列 ($0 \leq n \leq N_1 - 1$), 有限长序列 $x_2(n)$ 为 N_2 点序列 ($0 \leq n \leq N_2 - 1$), 取 $L \geq \max[N_1, N_2]$ 。将 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 都补零值点补到为 L 点长序列, 它们的 L 点 DFT 分别为 $X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$, $X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$, 若

$$y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) \quad (3.4.50)$$

则

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = X_1(k)X_2(k), \quad L \text{ 点} \quad (3.4.51)$$

证

$$\begin{aligned} Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \sum_{n=0}^{L-1} \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2((n-m))_L R_L(n) \right] W_L^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{n=0}^{L-1} x_2((n-m))_L W_L^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) W_L^{km} X_2(k) \quad (\text{利用圆周移位性}) \\ &= X_1(k)X_2(k) \end{aligned}$$

此定理说明, 时域序列作圆周卷积和, 则在离散频域中是作相乘运算。

4. 时域相乘。

设 $x_1(n)$ 为 N_1 点序列 ($0 \leq n \leq N_1 - 1$), $x_2(n)$ 为 N_2 点序列 ($0 \leq n \leq N_2 - 1$), 取 $L \geq \max[N_1, N_2]$, 将 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 补零值点, 补到都是 L 点长序列

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)], \quad L \text{ 点}$$

$$X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)], \quad L \text{ 点}$$

若

$$y(n) = x_1(n)x_2(n), \quad L \text{ 点} \quad (3.4.52)$$

则

$$\begin{aligned} Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \frac{1}{L} X_1(k) \circledast X_2(k) \\ &= \frac{1}{L} \left[\sum_{l=0}^{L-1} X_1(l) X_2((k-l))_L \right] R_L(k) \\ &= \frac{1}{L} \left[\sum_{l=0}^{L-1} X_2(l) X_1((k-l))_L \right] R_L(k) \end{aligned} \quad (3.4.53)$$

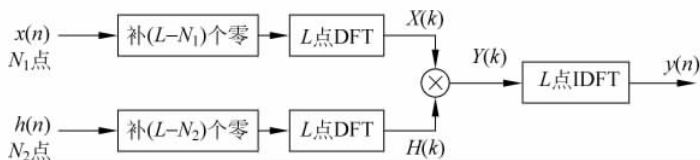
此定理说明, 时域序列作 L 点长的相乘运算, 则在离散频域中是作 L 点圆周卷积和运算, 但要将圆周卷积结果除以 L 。

5. 利用 DFT 计算两个序列的圆周卷积和及线性卷积和。

采用上面的圆周卷积和定理。可以得到计算圆周卷积的框图, 如图 3.10 所示。

当 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 时, 此框图就代表用 DFT 计算出的 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 的线性卷积(将在下面 3.4.9 节讨论)。

实际实现时, 是采用快速傅里叶变换算法计算 DFT(见第 4 章)。

图 3.10 利用 DFT 计算两个有限长 L 点序列的圆周卷积和框图

3.4.9 线性卷积和与圆周卷积和的关系

学习要点

1. 线性卷积和。若 $x_1(n)$ 为 N_1 点长序列 ($0 \leq n \leq N_1 - 1$), $x_2(n)$ 为 N_2 点长序列 ($0 \leq n \leq N_2 - 1$), 则两序列的线性卷积和为

$$\begin{aligned} y_l(n) &= x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m) \end{aligned} \quad (3.4.54)$$

线性卷积和 $y_l(n)$ 是 $N = N_1 + N_2 - 1$ 点长度的序列 ($0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$)。

2. 圆周卷积和。设 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 与线性卷积中的序列相同, 作此两序列的 L 点圆周卷积和, 其中 $L \geq \max[N_1, N_2]$, 则 $x_1(n)$ 要补上 $L - N_1$ 个零点, $x_2(n)$ 要补上 $L - N_2$ 个零点, 补到两个序列皆为 L 点长序列。即

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \begin{cases} x_1(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases} \\ x_2(n) &= \begin{cases} x_2(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

则 L 点圆周卷积和 $y(n)$ 为

$$y(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2((n-m))_L \right] R_L(n) \quad (3.4.55)$$

3. 圆周卷积和与线性卷积和的关系。

在 (3.4.55) 式中, 必须将 $x_2(n)$ 变成以 L 为周期的周期延拓序列, 即

$$\tilde{x}_2(n) = x_2((n))_L = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rL)$$

把此式代入 (3.4.55) 式中, 可得

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rL - m) \right] R_L(n) \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2(n + rL - m) \right] R_L(n) \end{aligned}$$

将此式与 (3.4.54) 式比较, 可得 (注意 $x_1(m)$ 有值区间为 $0 \leq m \leq N_1 - 1$)

$$y(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n + rL) \right] R_L(n) \quad (3.4.56)$$

由此看出,由线性卷积和求圆周卷积和:两序列的线性卷积和 $y_l(n)$ 以 L 为周期的周期延拓后混叠相加序列的主值序列,即为此两序列的 L 点圆周卷积和 $y(n)$ 。

下面讨论由 $y(n)$ 求 $y_l(n)$ 。

$y_l(n)$ 的长度为 $N_1 + N_2 - 1$ 点,即有 $N_1 + N_2 - 1$ 个非零值点,要想用圆周卷积和 $y(n)$ 代替线性卷积和,必须延拓周期 L 满足

$$L \geq N_1 + N_2 - 1 \quad (3.4.57)$$

这时各延拓周期才不会交叠,则(3.4.56)式代表的在主值区间的 $y(n)$ 才能等于 $y_l(n)$,也就是说 $y(n)$ 的前 $(N_1 + N_2 - 1)$ 个值就代表 $y_l(n)$,而主值区间内剩下的 $y(n)$ 值,即 $L - (N_1 + N_2 - 1)$ 个剩下的 $y(n)$ 值,则是补充的零值。

因而(3.4.57)式正是 L 点圆周卷积和等于线性卷积和的先决条件,满足此条件后就有

$$y(n) = y_l(n)$$

即

$$x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = x_1(n) * x_2(n) \quad \begin{cases} L \geq N_1 + N_2 - 1 \\ 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2 \end{cases} \quad (3.4.58)$$

由圆周卷积和求线性卷积和:若两序列的 L 点圆周卷积和为 $y(n)$,当 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 时, $y(n)$ 就能代表此两序列的线性卷积和 $y_l(n)$ 。

一般取 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 且 $L = 2^r$ (r 为整数),以便利用 FFT 算法计算(FFT 见下一章)。

以上说明了:①由 L 点圆周卷积和求线性卷积和的条件($L \geq N_1 + N_2 - 1$)及结果;②由线性卷积结果作 L 点周期延拓后混叠相加序列的主值序列即为 L 点圆周卷积和。

4. 当 $L < N_1 + N_2 - 1 = M$ 时,也就是圆周卷积和 $y(n)$ 的长度(L 点)小于线性卷积和 $y_l(n)$ 所需的长度(M 点)时,则圆周卷积和 $y(n)$ 只在部分区间中代表线性卷积和。下面用线性卷积和 $y_l(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列混叠叠加后的主值序列,即 L 点圆周卷积和序列 $y(n)$ 为依据进行讨论,见图 3.11, $y_l(n)$ 为线性卷积结果,是 M 点序列, $y_l(n+L)$ 及 $y_l(n-L)$ 分别为 $y_l(n)$ 的左、右延拓一个 L 点周期(L 为圆周卷积和的长度点数)的序列,可以看出,当 $L < M$ 时,以上三个序列,有混叠部分,在主值区间($0 \leq n \leq L-1$)的这部分混叠后的序列显然不能代表线性卷积。

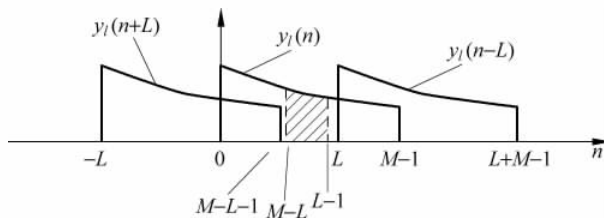


图 3.11 当 $L < M = N_1 + N_2 - 1$ 时,线性卷积与 L 点圆周卷积的示意图
(阴影区间内,圆周卷积和代表线性卷积和)

由此看出,在圆周卷积和的主值区间内,只有 $M-L \leq n \leq L-1$ 范围内(阴影区)没有周期延拓序列的混叠,因而这一范围内的圆周卷积和才能代表线性卷积和。

【例 3.11】 仍采用例 3.10 中的两序列 $x(n)=[1,3,2,4]$, $h(n)=[2,1,3]$

求 $y_l(n)=x(n)*h(n)$, 并利用此线性卷积和导出 $L=4$ 点的圆周卷积和 $y(n)$ 。

解 $x(n)$ 是 4 点序列 $N_1=4$, $h(n)$ 是 3 点序列 $N_2=3$, 则线性卷积 $y_l(n)=x(n)*h(n)$ 是 $M=N_1+N_2-1=6$ 点长序列, 最方便的是利用对位相乘相加法求线性卷积。

$$\begin{array}{r}
 x(n) \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \\
 h(n) \quad \quad 2 \quad 1 \quad 3 \\
 \hline
 \quad \quad 3 \quad 9 \quad 6 \quad 12 \\
 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \\
 2 \quad 6 \quad 4 \quad 8 \\
 \hline
 y_l(n) \quad 2 \quad 7 \quad 10 \quad 19 \quad 10 \quad 12
 \end{array}$$

则有

$$y_l(n)=x(n)*h(n)=[2,7,10,19,10,12]$$

按上面的讨论, 由线性卷积和与圆周卷积和相互的关系知, 只需将 $y_l(n)$ 作 $L=4$ 点周期延拓。然后取 $0 \leq n \leq 3$ (主值区间) 的主值序列即为 4 点圆周卷积和 $y(n)$, 这里, 实际上只需将 $y_l(n)$ 向左延拓 $N=4$ 位即可, 即只需将 $y_l(n)$ 和 $y_l(n+L)$ 混叠相加后, 取主值序列即可 (因为 $y_l(n)$ 向右延拓 L 位得到的序列 $y_l(n-L)$ 已超出主值范围), 因而, 按此思路, 可有更为简便的方法求 $y(n)$, 就是将线性卷积结果 $y_l(n)$ 的前 L 位之后加以截断, 将截断处以后部分移至下一行与 $y_l(n)$ 的最前部对齐然后对位相加 (不进位), 其相加结果得到的序列即为两序列的 L 点圆周卷积和 $y(n)$

$$\begin{array}{r}
 y_l(n) \quad 2 \quad 7 \quad 10 \quad 19 \quad : \quad 10 \quad 12 \\
 \quad \quad 10 \quad 12 \\
 \hline
 y(n) \quad 12 \quad 19 \quad 10 \quad 19
 \end{array}$$

因而 4 点圆周卷积和 $y(n)=[12,19,10,19]$ 与例 3.10 的结果完全相同。

5. 图 3.10 所表示的框图, 当 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 时, 若将 $x(n)$ 看成输入信号序列, 将 $h(n)$ 看成系统的单位抽样响应, 则输出 $y(n)$ (圆周卷积和) 就能代表 $x(n)$ 通过线性时不变系统 (线性卷积) 的响应 $y_l(n)$ 。

图 3.12 代表了有限长序列的圆周卷积和与线性卷积和的关系。

表 3.3 中列出了 DFT 的主要性质, 可供参考。

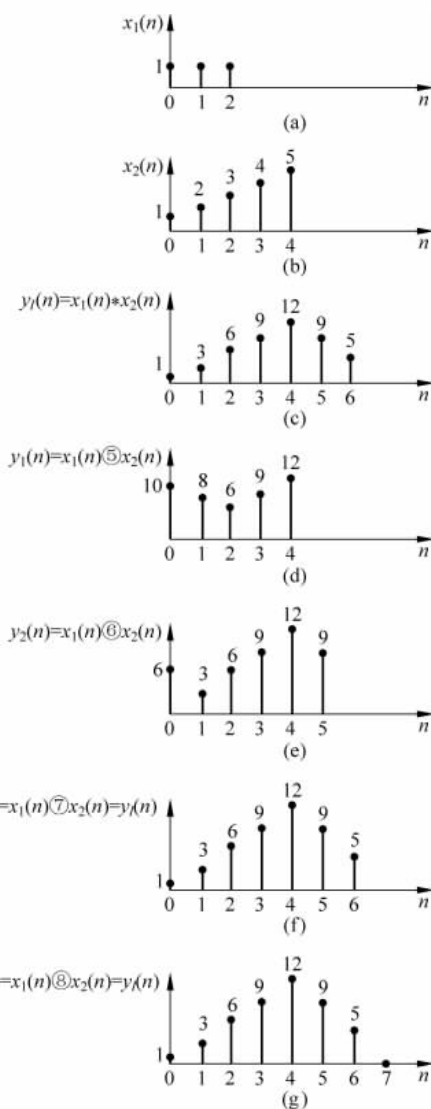


图 3.12 有限长序列的线性卷积与圆周卷积

表 3.3 DFT 的性质(序列长皆为 N 点)

序号	序 列	离散傅里叶变换
	$x(n)$	$X(k)$
1	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(k) + bX_2(k)$
2	$x((n+m))_N R_N(n)$	$W_N^{mk} X(k)$
3	$X(n)$	$Nx(N-k)$
4	$W_N^l x(n)$	$X((k+l))_N R_N(k)$
5	$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
6	$r_{x_1 x_2}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2((n-m))_N R_N(m)$ (实序列)	$X_1(k)X_2^*(k)$
7	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l)X_2((k-l))_N R_N(k)$
8	$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
9	$x(N-n)$	$X(N-k)$
10	$x^*(N-n)$	$X^*(k)$
11	$\text{Re}[x(n)]$	$X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$
12	$\text{jIm}[x(n)]$	$X_{op}(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)]$
13	$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$	$\text{Re}[X(k)]$
14	$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$	$\text{jIm}[X(k)]$
15	$x(n)$ 为任意实序列	$\begin{cases} X(k) = X^*(N-k) \\ \text{Re}[X(k)] = \text{Re}[X(N-k)] \\ \text{Im}[X(k)] = -\text{Im}[X(N-k)] \\ X(k) = X(N-k) \\ \arg[X(k)] = -\arg[X(N-k)] \end{cases}$
16	$x(n)$ 为任意实序列 $x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(N-n)]$, ($x(n)$ 实序列)	$\text{Re}[X(k)]$
	$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(N-n)]$, ($x(n)$ 实序列)	$\text{jIm}[X(k)]$
17	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$	
18	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) ^2$	

【例 3.12】 已知有限长序列为

$$x(n) = \delta(n-2) + 4\delta(n-4)$$

(1) 求其 8 点 DFT, 即求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $N=8$ 。

(2) 若 $h(n)$ 的 8 点 DFT 为 $H(k) = W_8^{-3k} X(k)$, 求 $h(n)$ 。

(3) 若序列 $y(n)$ 的 8 点 DFT 为 $Y(k) = X(k)H(k)$, 求 $y(n)$ 。

解

$$\begin{aligned} (1) X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^7 [\delta(n-2) + 4\delta(n-4)] W_8^{nk} \\ &= W_8^{2k} + 4W_8^{4k} = e^{-j\frac{2\pi}{8}2k} + 4e^{-j\frac{2\pi}{8}4k} \\ &= (-j)^k + (-1)^k \times 4, \quad 0 \leq k \leq 7 \end{aligned}$$

故 $X(k) = \{5, -4-j, 3, -4+j, 5, -4-j, 3, -4+j\}$

(2) 由于 $H(k) = W_8^{-3k} X(k)$

按圆周移位性知, $h(n)$ 是 $x(n)$ 补零补到成为 8 点序列后, 向左圆周移 3 位的序列, 即

$$h(n) = x((n+3))_8 R_8(n) = 4\delta(n-1) + \delta(n-7)$$

(3) 由于 $Y(k) = X(k)H(k)$, 故有 $y(n) = x(n) \otimes h(n)$, 即 $y(n)$ 是 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的 8 点圆周卷积。

一种办法是直接时在域计算, 先用对位相乘相加法(不进位)求 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的线性卷积 $y_l(n)$, 然后利用例 3.7 的办法将 $y_l(n)$ 的前 8 位之后加以截断, 将截断处以后的部分移至下一行与 $y_l(n)$ 的最前部分对齐, 然后对位相加(不进位), 其结果即为 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的 8 点圆周卷积 $y(n)$ 。将 $x(n)$ 、 $h(n)$ 表示如下(作线性卷积时两序列长度可以不一样):

$$x(n) = \{0, 0, 1, 0, 4\}$$

$$h(n) = \{0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 1\}$$

则可计算 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的线性卷积 $y_l(n)$ 以及它们的 8 点圆周卷积 $y(n)$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccccccc} h(n) & & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x(n) & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline & & & & & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline y_l(n) = x(n) * h(n) & & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ & & & 0 & 1 & 0 & 4 & & & & & & & & \\ \hline y(n) = x(n) \otimes h(n) & & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 & 0 & & & & & \end{array} \end{array}$$

所以 $y(n) = \{0, 1, 0, 8, 0, 16, 0, 0\} = \delta(n-1) + 8\delta(n-3) + 16\delta(n-5)$

另一种办法是利用圆周卷积和定理, 从离散频域来着手计算, 先看 $H(k)$

$$H(k) = W_8^{-3k} X(k) = W_8^{-k} + 4W_8^k$$

则有

$$\begin{aligned} Y(k) &= H(k)X(k) = (W_8^{2k} + 4W_8^{4k})(W_8^{-k} + 4W_8^k) \\ &= W_8^k + 8W_8^{3k} + 16W_8^{5k} \end{aligned}$$

同样可求得

$$y(n) = \delta(n-1) + 8\delta(n-3) + 16\delta(n-5)$$

可以看出,后一种办法更为简便,对于复杂问题利用 FFT 算法则简便得多。

3.5 频域抽样理论

已经讨论过,模拟信号在时域抽样(抽样频率为 $f_s=1/T$, T 为抽样间隔),则所得离散序列的连续频谱是原模拟信号频谱的周期延拓函数,其延拓周期为 $\Omega_s=2\pi f_s$ 的整数倍,在数字频域,延拓周期为 $\omega=2\pi i$, $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

同样,频域抽样、时域会产生周期延拓,和上面情况是对偶的。

3.5.1 频域抽样与频域抽样定理,由 $X(k)$ 重构时间序列 $x(n)$

学习要点

1. 频域抽样。

任意一个绝对可和的非周期序列 $x(n)$,其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

由于序列绝对可和,则其傅里叶变换存在且连续,故 z 变换收敛域包括单位圆($z=e^{j\omega}$),可对 $X(z)$ 在单位圆上,从 $\omega=0$ 到 $\omega=2\pi$ 之间的 N 个均分频率点上(以 $2\pi/N$ 为间隔,但不包括 $\omega=2\pi$)作抽样,即可得到周期序列 $\tilde{X}(k)$

$$\tilde{X}(k) = X(z) \big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)W_N^{kn} \quad (3.5.1)$$

问题在于,这样抽样以后是否仍能恢复原序列 $x(n)$,为此求 $\tilde{X}(k)$ 的 IDFS,令其为 $\tilde{x}_N(n)$

$$\tilde{x}_N(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-kn} \quad (3.5.2)$$

将(3.5.1)式代入(3.5.2)式,可得

$$\tilde{x}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)W_N^{km} \right] W_N^{-kn} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} \right]$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} = \begin{cases} 1, & m = n + rN, \quad r \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他 } m \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} \tilde{x}_N(n) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \\ &= \dots + x(n+N) + x(n) + x(n-N) + \dots \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

根据 DFT 和 DFS 的关系,取 $\tilde{x}_N(n)$ 的主值序列及 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列,即得

$$X(k) = \text{DFT}[\tilde{x}_N(n)R_N(n)] = \text{DFT}[x_N(n)] = \tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$x_N(n) = \text{IDFT}[\tilde{X}(k)R_N(k)] = \text{IDFT}[X(k)] = \tilde{x}_N(n)R_N(n)$$

由(3.5.3)式看出,频域抽样后,由 $\tilde{X}(k)$ 得到的周期序列 $\tilde{x}_N(n)$ 是原非周期序列 $x(n)$ 的

解 (1) 利用频域抽样定理, 频域一个周期作 N 点抽样。则时域是原序列 $x(n)$ 的以 N 为周期的各周期延拓序列混叠相加后的主值序列 $x_N(n)$, 由于讨论的是主值区间 $(0 \leq n \leq N-1)$ 内的序列值, 故 $x(n)$ 只有所有向左周期延拓的各分量才会影响 $x_N(n)$ 值, 向右延拓的各分量, 已超出主值范围, 对 $x_N(n)$ 没有影响, 见图 3.13。因而

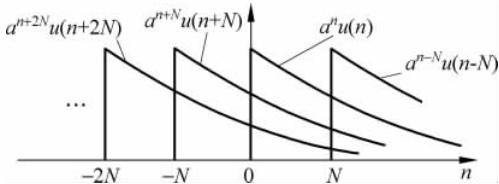


图 3.13 例 3.14 的图

$$\begin{aligned} x_N(n) &= \sum_{r=0}^{\infty} x(n+rN)R_N(n) = \sum_{r=0}^{\infty} a^{n+rN} u(n+rN)R_N(n) \\ &= a^n \sum_{r=0}^{\infty} (a^N)^r R_N(n) \\ &= \frac{a^n}{1-a^N} R_N(n) \end{aligned}$$

从 $x_N(n)$ 看出, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $a^N \rightarrow 0$ (因为 $0 < a < 1$), $R_N(n) \rightarrow u(n)$ 。这时, $x_N(n)$ 将等于原序列 $x(n)$, 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N(n) = a^n u(n) = x(n)$$

若 N 为有限值, $a^N \neq 0$, 在 $0 \leq n \leq N-1$ 范围内 $x_N(n)$ 只与 $x(n)$ 近似。 N 越大, 则周期延拓后混叠程度越小, 近似程度越好。

(2) 此题另一种解法是先求 $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$, 再求 $X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$, 最后求 $x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)]$, 但这样的求解过程要复杂得多。

有的情况下, 用频域抽样定理的结果, 可使计算大为方便, 如下例所示。

【例 3.15】 已知 $x(n) = a^n R_{10}(n)$, $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$, 将 $X(e^{j\omega})$ 在 ω 的一个周期 $(0 \leq \omega \leq 2\pi)$ 中作 7 点抽样, 得到

$$X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/7}, \quad k = 0, 1, \dots, 6$$

求 $x_7(n) = \text{IDFT}[X(k)]$, $n = 0, 1, \dots, 6$ 。

解 若直接求 $X(e^{j\omega})$, 再抽样得 $X(k)$, 最后求 $x_7(n) = \text{IDFT}[X(k)]$, 则很难计算, 因为

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \text{IDFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^9 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j10\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j5\omega} (e^{j5\omega} - e^{-j5\omega})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\ &= e^{-j9\omega/2} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

$$X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/7} = e^{-j9\pi k/7} \frac{\sin(10\pi k/7)}{\sin(\pi k/7)}, \quad k = 0, 1, \dots, 7$$

故求解 $x_7(n) = \text{IDFT}[X(k)]$ 是很困难的。

实际上, 只要利用频域抽样定理的结果。频域在一个周期 $(0 \leq \omega \leq 2\pi)$ 中抽样 N 个点, 则在时域上是以 N 点为周期的各周期延拓分量混叠相加后, 在主值区间 $(0 \leq n \leq N-1)$ 中

的序列。

在 $0 \leq n \leq N-1=6$ 的主值区间内,只需考虑原序列 $x(n)$ 及 $x(n)$ 左移一个周期(N 点)的序列的叠加结果即可。

$$\begin{aligned} x_7(n) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+7r)R_7(n) = [x(n+7) + x(n)]R_7(n) \\ &= [a^{n+7}R_{10}(n+7) + a^nR_{10}(n)]R_7(n) = a^{n+7}R_3(n) + a^nR_7(n) \\ &= \{1+a^7, a+a^8, a^2+a^9, a^3, a^4, a^5, a^6\} \end{aligned}$$

这里,左移一个周期(7 位)的序列 $x(n+7)$,在主值区间内只有 3 个序列值,即为 $a^{n+7}R_3(n)$,主值区间内的原序列 $x(n)$ 为 $a^nR_7(n)$,有 7 个序列值。

3.5.2 由 $X(k)$ 插值重构 $X(z)$ 、 $X(e^{j\omega})$

所谓频域的插值重构,就是由频域抽样 $X(k)$ 经过插值来表示 $X(z)$ 或 $X(e^{j\omega})$ 。频域插值公式是 FIR 数字滤波器频率抽样结构和频率抽样设计方法的理论依据。

学习要点

设 $x(n), n=0, 1, \dots, N-1$, 则 $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$, $X(k) = X(z) \big|_{z=e^{-j2\pi k/N}}$

1. 由 $X(k)$ 插值重构 $X(z)$ 。

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nk} z^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-Nk} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

即用 N 个频率抽样重构 $X(z)$ 的插值公式,它可以表示为

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(z) \quad (3.5.6)$$

其中

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{z^N - 1}{Nz^{N-1}(z - W_N^{-k})} \quad (3.5.7)$$

称为插值函数,可以看出:

(1) $\Phi_k(z)$ 在 $z_r = W_N^{-r} = e^{j\frac{2\pi}{N}r}$ ($r=0, 1, \dots, k, \dots, N-1$) 处为零点,有 N 个零点(在 z 平面单位圆上),但 $\Phi_k(z)$ 在 $z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ (即 $r=k$) 处有一个极点,它和 $r=k$ 处的一个零点相抵消,使得 $\Phi_k(z)$ 只在本抽样点处不为零值。而在其他($N-1$)个抽样点($r=0, 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N-1$)上都是零点,可表示为

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) \big|_{z=W_N^{-r}} &= \Phi_k(W_N^{-r}) = \delta(r-k) \\ &= \begin{cases} 1, & r=k, \\ 0, & r \neq k, \end{cases} \quad r=0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

(2) $\Phi_k(z)$ 在 $z=0$ 处有 $(N-1)$ 阶极点。

图 3.14 表示了 $\Phi_k(z)$ 的零点、极点图形。

2. 由 $X(k)$ 插值重构 $X(e^{j\omega})$ 。

在(3.5.6)式及(3.5.7)式中,代入 $z=e^{j\omega}$,即可得到由 $X(k)$ 插值求得 $X(e^{j\omega})$ 的公式及内插函数 $\Phi_k(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(e^{j\omega}) \quad (3.5.9)$$

$$\begin{aligned} \Phi_k(e^{j\omega}) &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N(1 - W_N^{-k} e^{-j\omega})} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N(1 - e^{-j(\omega - 2\pi k/N)})} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin[(\omega - 2\pi k/N)/2]} e^{-j[\omega(N-1)/2 + k\pi/N]} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin[N(\omega/2 - k\pi/N)]}{\sin(\omega/2 - k\pi/N)} e^{jk\pi(N-1)/N} e^{-j(N-1)\omega/2} \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

可以将 $\Phi_k(e^{j\omega})$ 写成更方便的形式

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \Phi(\omega - 2\pi k/N) \quad (3.5.11)$$

其中

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2} \quad (3.5.12)$$

这里的 $\Phi(\omega)$ 就是矩形序列 $R_N(n)$ 的傅里叶变换除以 N , 可参见第 2 章例 2.24 中的(2.3.7)式,那里是用 $R_N(e^{j\omega})$ 表示矩形序列的傅里叶变换。故有

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} R_N(e^{j\omega}) \quad (3.5.13)$$

从而有

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \Phi(\omega - 2\pi k/N) = \frac{1}{N} R_N(e^{j(\omega - 2\pi k/N)}) \quad (3.5.14)$$

因而(3.5.9)式可写成

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi(\omega - 2\pi k/N) \quad (3.5.15)$$

这就是由 $X(k)$ 插值重构 $X(e^{j\omega})$ 的公式。

由(3.5.14)式来求 $\Phi_k(e^{j\omega})$ 的时域序列,即 $\text{IDTFT}[\Phi_k(e^{j\omega})]$,按照表 2.3 中第 4 条傅里叶变换的频移特性(调制特性)可知

$$\text{IDTFT}[\Phi_k(e^{j\omega})] = \frac{1}{N} R_N(n) e^{j(\frac{2\pi k}{N})n} = \frac{1}{N} R_N(n) W_N^{-nk} \quad (3.5.16)$$

即插值函数 $\Phi_k(e^{j\omega})$ 所对应的序列是矩形序列 $R_N(n)$ 与复指数序列 $W_N^{-nk} = e^{j2\pi kn/N}$ 相乘(调制)后的序列再乘以 $1/N$ 。插值函数 $\Phi(\omega)$ 的模 $|\Phi(\omega)|$ 及相角 $\arg[\Phi(\omega)]$ 可见图 3.15。

从(3.5.15)式看出, $X(e^{j\omega})$ 是由 N 个加权系数为 $X(k)$ 的 $\Phi(\omega - 2\pi k/N)$ 函数 ($k=0, 1, \dots, N-1$) 组成,在每个抽样点上,有 $X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = X(k)$,而在抽样点之间的 $X(e^{j\omega})$ 则由这 N 个加权的插值函数延伸至所求 ω 点上的值的叠加而得到。

由插值函数 $\Phi(\omega)$ 求 $X(e^{j\omega})$ 的示意图见图 3.16。

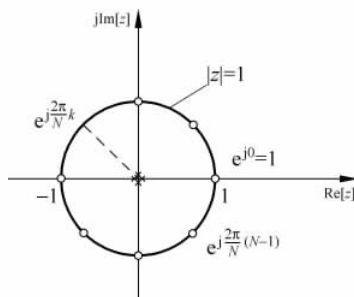
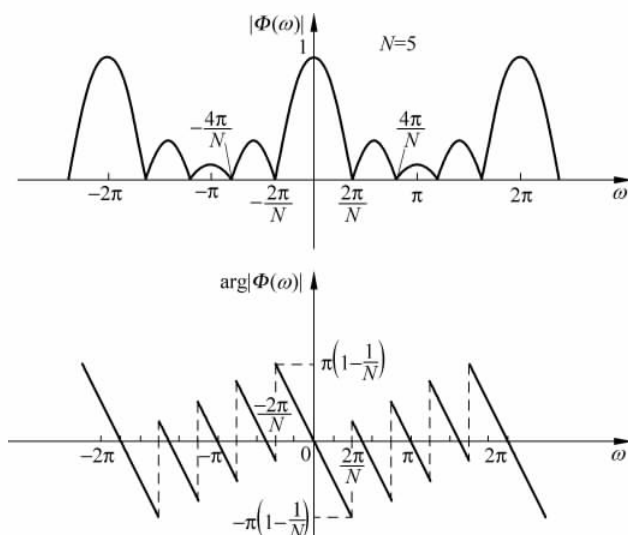
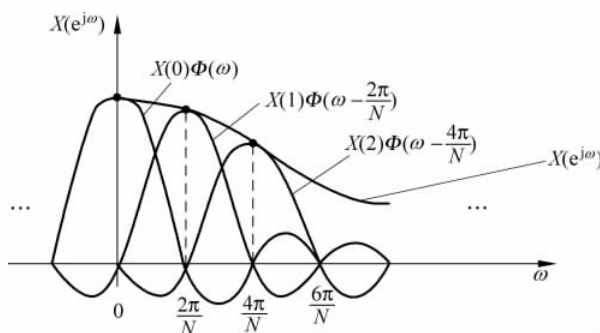


图 3.14 插值函数 $\Phi_k(z)$ 的零点、极点 ($z=0$ 处为 $N-1$ 阶极点)

图 3.15 插值函数 $\Phi(\omega)$ 的幅度特性与相位特性 ($N=5$)图 3.16 由插值函数求得 $X(e^{j\omega})$ 的示意图

3. 将 $X(z)$ 及 $X(e^{j\omega})$ 用 $x(n)$ 和 $X(k)$ 表达时, 展开式重写如下:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z) \quad (3.5.17)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (3.5.18)$$

* 先看 $X(z)$, 由 (3.5.17) 式看出, 对时域序列 $x(n)$, $X(z)$ 按 z 的负幂级数展开, $x(n)$ 是级数的系数; 对频域序列 $X(k)$, $X(z)$ 按函数 $\Phi_k(z)$ 展开, $X(k)$ 是其展开的系数。

* 再看频率响应 $X(e^{j\omega})$, 由 (3.5.18) 式看出, 对时域序列 $x(n)$, $X(e^{j\omega})$ 被展开成傅里叶级数, $x(n)$ 是其傅里叶级数的谐波系数; 对频域序列 $X(k)$, $X(e^{j\omega})$ 被展开成插值函数 $\Phi(\omega - 2\pi k/N)$ 的级数, 而 $X(k)$ 是其系数。

以上这些说明, 一个函数可以用不同的正交完备群展开, 从而得到不同的含义。

3.6 DFT 的应用

3.6.1 利用 DFT 计算线性卷积

3.4.9 节中的(3.4.58)式就是利用圆周卷积来计算线性卷积的条件,而线性卷积是信号通过线性移不变系统的基本运算过程。但是,实际上我们不是直接计算圆周卷积(当然可以用矩阵方法来计算圆周卷积),而是利用圆周卷积和定理,用 DFT 方法(采用 FFT 算法)来计算圆周卷积和,从而求得线性卷积和,如图 3.10 所示。求解过程如下:

设输入序列为 $x(n)$, $0 \leq n \leq N_1 - 1$, 系统单位抽样响应为 $h(n)$, $0 \leq n \leq N_2 - 1$, 用计算圆周卷积和的办法求系统的输出 $y_l(n) = x(n) * h(n)$ 的过程为:

- ① 令 $L = 2^m \geq N_1 + N_2 - 1$
- ② 取
$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$
- ③ $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, L 点
 $H(k) = \text{DFT}[h(n)]$, L 点
- ④ $Y(k) = X(k) \cdot H(k)$
- ⑤ $y(n) = \text{IDFT}[Y(k)]$, L 点
- ⑥ $y_l(n) = y(n)$, $0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 1$

3.6.2 利用 DFT 计算线性相关

与卷积讨论类似,在讨论有限长序列的离散傅里叶变换时,有圆周相关,它不同于线性相关,就好像圆周卷积不同于线性卷积一样。

线性相关的定义见(1.1.25)式,(1.1.32)式已表明可用卷积运算来表示相关运算,重写如下:

$$\begin{aligned} r_{xy}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y[-(m-n)] \\ &= x(m) * y(-m) \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

既然线性相关函数可以用(3.6.1)式的线性卷积表示,那么前面讨论的线性卷积和圆周卷积的关系,就完全可以用于相关运算,即线性相关与圆周相关有相似的关系,讨论圆周相关的目的是可以用 DFT 来计算线性相关,DFT 运算所对应的圆周相关就是一种快速相关运算。

由于要作 DFT 运算,序列必须是有限长的,设 $x(n)$, $y(n)$ ($0 \leq n \leq N-1$) 为有限长实序列。

学习要点

1. 圆周相关。与圆周卷积类似,圆周相关定义为(以下变换中,注意周期为 N)

$$\begin{aligned}\bar{r}_{xy}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y((n-m))_N R_N(m) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y((-m-n))_N R_N(m) = x(m) \circledast y(N-m)\end{aligned}\quad (3.6.2)$$

2. 相关函数的 z 变换及离散时间傅里叶变换 DTFT 及 DFT。

在讨论用 DFT 计算线性相关的圆周相关定理之前,先讨论相关函数的 z 变换及离散时间傅里叶变换。

将(3.6.1)式取 z 变换可得

$$R_{xy}(z) = \mathcal{Z}[r_{xy}(m)] = X(z) \cdot Y(z^{-1}) \quad (3.6.3)$$

代入 $z=e^{j\omega}$,得到 $r_{xy}(m)$ 的离散时间傅里叶变换为

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Y(e^{-j\omega}) \quad (3.6.4)$$

由于实序列的频谱对 $\omega=0$ 呈共轭对称性,故对任意 ω ,只有当 $X(e^{j\omega}) \neq 0$,且 $Y(e^{-j\omega}) = Y^*(e^{j\omega}) \neq 0$ 时,才有 $R_{xy}(e^{j\omega}) \neq 0$,也就是说两信号的频谱相重叠时,才有相关性。

将频域抽样 $\omega_k = 2\pi k/N$,在满足频域抽样定理要求下,可得相关函数的 DFT 为

$$R_{xy}(k) = X(k)Y(N-k) = X(k)Y^*(k) \quad (3.6.5)$$

3. 圆周相关定理。

若

$$R_{xy}(k) = X(k)Y(N-k) = X(k)Y^*(k) \quad (3.6.6)$$

则圆周相关序列 $\bar{r}_{xy}(m)$ 为

$$\bar{r}_{xy}(m) = \text{IDFT}[R_{xy}(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y((n-m))_N R_N(m) \quad (3.6.7)$$

证

先将 $R_{xy}(k)$ 、 $Y(N-k)$ 及 $X(k)$ 以 N 为周期延拓成周期序列 $\tilde{R}_{xy}(k)$ 、 $Y((N-k))_N$ 及 $X((k))_N$,即

$$\tilde{R}_{xy}(k) = X((k))_N Y((N-k))_N$$

则

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{xy}(m) &= \text{IDFS}[\tilde{R}_{xy}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X((k))_N Y((N-k))_N W_N^{-mk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y((N-k))_N \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} W_N^{-mk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} Y((N-k))_N W_N^{-(m-n)k} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y((-m-n))_N = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y((n-m))_N\end{aligned}$$

等式两端取主值序列,即得

$$\bar{r}_{xy}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y((n-m))_N R_N(m)$$

将线性相关运算转变成圆周相关运算,再利用圆周相关定理从 DFT 求解中求得线性相关,就称为快速相关计算,当然 DFT 的计算要用到第 4 章的快速傅里叶变换(FFT)算法。

计算线性相关有三种方法:

(1) 直接用线性相关的公式求解,即移位(左右移位)相乘、相加,很麻烦。

(2) 采用线性卷积办法来计算线性相关,即 $r_{xy}(m) = x(m) * y(-m)$ 。

可以用对位相乘相加法来作 $x(m)$ 与 $y(-m)$ 的卷积,用卷积和定位的方法来确定 $r_{xy}(0)$ 的位置,或直接由线性相关的定位法来确定 $r_{xy}(0)$ 的位置。

(3) 用圆周相关代替线性相关,再利用圆周相关定理(见(3.6.6)式),利用 DFT(采用 FFT 算法)来求线性相关,其步骤为

① 给定 $x(n)$, N_1 点; $y(n)$, N_2 点;

② 将 $x(n)$, $y(n)$ 补零补到 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 点:

$$\text{即} \quad \begin{aligned} x(n) &= \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases} \\ y(n) &= \begin{cases} y(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

③ 求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, L 点

$Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, L 点

④ $R_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$

⑤ $\bar{r}_{xy}(m) = \text{IDFT}[R_{xy}(k)]$, L 点

⑥ 确定 $r_{xy}(0)$ 的定位,由于圆周相关定理求出的 $\bar{r}_{xy}(m)$ 的 m 全部是正值,而线性相关在 m 为正数及 m 为负数时皆有值,因而有 $m=0$ 的定位问题。用以下例题讨论 $r_{xy}(0)$ 的定位问题。

【例 3.16】 设两个实序列为 $x(n) = \{2, 1, 3, 2, 1, 5, 1\}$, $y(n) = \{2, 1, 3, 4\}$, 试求互相关序列 $r_{xy}(m)$ 。

解 (1) 采用(3.6.1)式 $r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-m) = x(m) * y(-m)$, 即用卷积的办法来求互相关序列 $r_{xy}(m)$, 采用对位相乘相加法, 可得到 $x(m)$ 与 $y(-m)$ 的卷积结果为

$$r_{xy}(m) = x(m) * y(-m) = \{8, 10, 17, 22, 15, 31, 24, 10, 11, 2\}$$

利用有限长序列卷积输出定位的例 1.2 可以得知, $y(-m) = \{4, 3, 1, 2\}$, $-3 \leq m \leq 0$, $x(m)$, $0 \leq m \leq 6$, 故 $r_{xy}(m)$, $-3 \leq m \leq 6$, 由此可确定 $r_{xy}(0) = 22$ 。

(2) 用 DFT 法求解, 即利用圆周卷积代替线性卷积来求解。

$x(n)$ 是 $N_x = 7$ 点序列, $y(n)$ 是 $N_y = 4$ 点序列, 则 DFT(圆周卷积)长度应为 $L = N_x + N_y - 1 = 10$ 点。

步骤: ① 将 $x(n)y(n)$ 补零, 补到皆为 $L = 10$ 点序列; ② $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, $L = 10$ 点; ③ $R_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$; ④ $\bar{r}_{xy}(m) = \text{IDFT}[R_{xy}(k)]$, $L = 10$ 点; ⑤ 确定 $r_{xy}(0)$ 的位置, 并求得 $r_{xy}(m)$ 。

以下设 $x(n)$ 的长度点数为 N_x , $y(n)$ 的长度点数为 N_y , 故有 $N_x=7, N_y=4$ 。

本题较为简单, 直接作圆周相关(序列补零后)后, 可得到用 DFT 法求解相同的圆周相关序列 $\bar{r}_{xy}(m)$

$$\bar{r}_{xy}(m) = \{22, 15, 31, 24, 10, 11, 2, 8, 10, 17\}$$

实际上从(1.1.31)式可知, 当 $x(n), y(n)$ 都是因果序列时, $r_{xy}(m)$ 的有值范围为 $-(\text{length}(y)-1) \leq m \leq \text{length}(x)-1$, 由于 $\text{length}(x)=N_x=7, \text{length}(y)=N_y=4$, 故有 $-3 \leq m \leq 6$ 。因而只要将 $r_{xy}(m)$ 作 $N_y-1=3$ 点圆周右移位就可得到 $r_{xy}(m)$, 与求解 1 中的 $r_{xy}(m)$ 完全一样。

4. 用 DFT 计算自相关 $r_{xx}(m)$ 。

设 $x(n), 0 \leq n \leq N-1$, 将 $y(n)=x(n)$ 代入(3.6.1)式中, 可得

$$r_{xx}(m) = x(m) * x(-m) \quad (3.6.8)$$

则由(3.6.3)式及(3.6.4)式, 考虑到 $x(n)$ 为实序列, 将 $x(n)$ 补零, 补到长度为 $L \geq 2N-1$ 点, 再求 $R_{xx}(z), R_{xx}(e^{j\omega})$, 可得

$$\begin{aligned} R_{xx}(z) &= X(z)X(z^{-1}) \\ R_{xx}(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})X(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

而圆周相关定理的(3.6.6)式及(3.6.7)式变成

若

$$R_{xx}(k) = X(k)X^*(k) = |X(k)|^2, \quad L \text{ 点} \quad (3.6.10)$$

则 L 点圆周自相关为

$$\begin{aligned} \bar{r}_{xx}(m) &= \sum_{n=0}^{L-1} x(n)x((n-m))_L R_L(m) \\ &= x(m) \textcircled{L} x(L-m) \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

因而, 给定实序列 $x(n), 0 \leq n \leq N-1$, 用 DFT 计算自相关序列 $r_{xx}(m)$ 的步骤为

$$\textcircled{1} \text{ 令 } x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq L-1 \end{cases}$$

其中 $L \geq 2N-1$ 。

② 求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)], L$ 点。

③ 求 $X^*(k)$ 。

④ 求 $R_{xx}(k) = |X(k)|^2$ 。

⑤ 求 $\bar{r}_{xx}(m) = \text{IDFT}[|X(k)|^2], L$ 点。

⑥ 将 $\bar{r}_{xx}(m)$ 作圆周移位定位后即得到自相关函数 $r_{xx}(m)$ 。

3.6.3 利用 DFT 对模拟信号的傅里叶变换(级数)对的逼近

学习要点

1. 用 DFT 对连续时间非周期信号的傅里叶变换对的逼近。实际上, 就是利用 DFT 来对模拟信号进行频谱分析。因而必须对时域、频域都要离散化, 以便在计算机上用 DFT 对模拟信号的傅里叶变换对进行逼近。

连续时间非周期的绝对可积信号 $x(t)$ 的傅里叶变换对为

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3.6.12)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3.6.13)$$

用 DFT 方法计算这一对变换的办法如下:

(1) 将 $x(t)$ 在 t 轴上等间隔(宽度为 T)分段, 每一段用一个矩形脉冲代替, 脉冲的幅度为其起始点的抽样值 $x(t)|_{t=nT} = x(nT) = x(n)$, 然后把所有矩形脉冲的面积相加。

由于

$$\begin{aligned} t &\rightarrow nT \\ dt &\rightarrow T \quad (dt = (n+1)T - nT) \\ \int_{-\infty}^{\infty} dt &\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} T \end{aligned}$$

可得频谱密度 $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\Omega t} dt$ 的近似值为

$$X(j\Omega) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT} \cdot T \quad (3.6.14)$$

(2) 将序列 $x(n) = x(nT)$ 截断成从 $t=0$ 开始长度为 T_0 的有限长序列, 包含 N 个抽样(即 $n=0 \sim (N-1)$, 时域取 N 个样点), 则(3.6.14)式成为

$$X(j\Omega) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\Omega nT} \quad (3.6.15)$$

由于时域抽样频率为 $f_s = 1/T$, 则频域产生以 f_s 为周期的周期延拓(角频率为 $\Omega_s = 2\pi f_s$), 成为连续周期频谱序列, 频域周期为 $f_s = 1/T$ (即时域的抽样频率), 则频域采用一个周期(Ω_s)中的积分。这时, 如果频域是限带信号, 则有可能不产生频谱混叠。

(3) 为了数值计算, 在频域上也要离散化(抽样), 即在频域的一个周期(f_s)中取 N 个样点, $f_s = NF_0$ 每个样点间的间隔为 F_0 。频域抽样, 那么频域的积分式(3.6.13)式就变成求和式, 而时域就得到原已截断的离散时间序列的周期延拓序列, 其时域周期为 $T_0 = 1/F_0$, 这时 $\Omega = k\Omega_0$ 。即有

$$\begin{aligned} d\Omega &= (k+1)\Omega_0 - k\Omega_0 = \Omega_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega &\rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \Omega_0 \end{aligned}$$

各参量关系为

$$T_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{N}{f_s} = NT$$

又

$$\Omega_0 = 2\pi F_0$$

则

$$\Omega_0 T = \Omega_0 \cdot \frac{1}{f_s} = \Omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\Omega_s} = 2\pi \cdot \frac{\Omega_0}{\Omega_s} = 2\pi \cdot \frac{F_0}{f_s} = 2\pi \cdot \frac{T}{T_0} = \frac{2\pi}{N} \quad (3.6.16)$$

这样, 经过上面(1)、(2)、(3)三个步骤后, 时域、频域都是离散周期的序列, 推导如下:

第(1)、(2)两步: 时域抽样、截断

$$X(j\Omega) \approx \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\Omega nT} T$$

$$x(nT) \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Omega_s} X(j\Omega) e^{j\Omega nT} d\Omega \quad (\text{在频域的一个周期内积分})$$

第(3)步: 频域抽样, 则得

$$\begin{aligned} X(jk\Omega_0) &\approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\Omega_0 nT} = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = T \cdot \text{DFT}[x(n)] \\ x(nT) &\approx \frac{\Omega_0}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 nT} = F_0 \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= F_0 \cdot N \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= f_s \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= f_s \cdot \text{IDFT}[X(jk\Omega_0)] \\ X(jk\Omega_0) &= X(j\Omega) |_{\Omega=k\Omega_0} \approx T \cdot \text{DFT}[x(n)] \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

$$x(n) = x(t) |_{t=nT} \approx \frac{1}{T} \cdot \text{IDFT}[X(jk\Omega_0)] \quad (3.6.18)$$

这就是用 DFT 来逼近连续时间非周期信号的傅里叶变换对的公式。

2. 用 DFS 对连续时间周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数的逼近。实际上是用 DFS 方法将周期信号时域频域都离散化后, 对模拟周期信号进行频谱分析。首先要特别注意以下两点(在 1.4.7 节中已经提到过):

(1) 周期信号抽样后要变成周期序列是有条件的, 即周期信号的周期 T_0 必须等于抽样间隔 $T(T=1/f_s)$ 的整数倍, 或 T 与 T_0 为互素的整数。即 N 个抽样间隔 T 应等于 M 个连续周期信号的周期 T_0 , 即 $NT=MT_0$, 这样, 得到的才是周期为 N 的周期性序列(N, M 都须为正整数)。此外, 抽样频率必须满足奈奎斯特抽样定理, 即满足 $f_s > 2f_{\max}$ 。

(2) 只能按所形成的离散周期序列的一个周期进行截断, 以此作为 DFS 的一个周期, 以防止频谱的泄漏。这是因为频域抽样后, 时域会周期延拓, 当时域的 N 点序列是周期序列的一个周期(或其整数倍), 则经延拓后, 仍为周期序列, 其包络仍为原周期信号, 则频谱分析才不会产生泄漏误差。

连续时间周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数对为

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3.6.19)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \quad (3.6.20)$$

这里 T_0 为连续时间周期信号的周期。

由于满足: 时域周期 $\leftrightarrow$ 频域离散

时域连续 $\leftrightarrow$ 频域非周期

要将连续周期信号与 DFS 联系起来, 就需要:

(1) 先对时域抽样 $x(n) = x(nT) = x(t) |_{t=nT}$

$$t = nT$$

$$dt = (n+1)T - nT = T$$

$$\int_0^{T_0} dt \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} T$$

设 $T_0 = NT$, 即一个周期(T_0)内的抽样点数为 N , 则(3.6.19)式变成

$$X(jk\Omega_0) \approx \frac{T}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\Omega_0 nT} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3.6.21)$$

(2) 将频域离散序列加以截断,使它成为有限长序列,如果这个截断长度正好等于一个周期(时域抽样造成的频域周期延拓的一个周期),则(3.6.20)式变成(既有时域抽样,又有频域截断)

$$\begin{aligned} x(nT) &\approx \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 nT} = \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= N \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

按照 DFT(DFS)的定义,由(3.6.21)式及(3.6.22)式可得

$$X(jk\Omega_0) \approx \frac{1}{N} \cdot \text{DFS}[x(n)] \quad (3.6.23)$$

$$x(nT) = x(t) \big|_{t=nT} \approx N \cdot \text{IDFS}[X(jk\Omega_0)] \quad (3.6.24)$$

这就是用 DFS(DFT)来逼近连续时间周期信号傅里叶级数对的公式。

3. 用 DFT 对非周期连续时间信号进行频谱分析的整个处理过程可见图 3.17,一共有三个处理:①时域抽样,②时域截断,③频域抽样,分别讨论如下。

(1) **时域抽样**。时域以 f_s 频率抽样,频域就会以抽样频率 f_s 为周期而周期延拓。若频域是限带信号,最高频率为 f_h ,则只要满足 $f_s \geq 2f_h$ 就不会产生周期延拓后频谱的混叠失真。

(2) **时域截断**。即在时域序列上乘一个窗口函数 $d(n)$,得到 $x(n)d(n)$, $d(n)$ 是有限长的,即 $d(n), 0 \leq n \leq N-1$ 。窗函数有各种类型,可见第 8 章内容,若为矩形窗,则在 $0 \leq n \leq N-1$ 范围内 $x(n)d(n)$ 与 $x(n)$ 数值相同;否则,若用其他形状窗,在此范围内数据也产生变化。

(3) **频域抽样**。由于频域仍是连续值,故必须加以离散化,将 $X(e^{j\omega}) * d(e^{j\omega})$ 离散化,则在离散时域产生周期延拓序列 $\tilde{x}_N(n)$ 。要求频域抽样间隔 F_0 满足 $F_0 \leq \frac{f_s}{N}$, 即一个周期内频域抽样点数 M 满足 $M \geq N$ 。

这三种处理过程中,可能产生的失真及其解决办法可见随后的讨论。

3.6.4 用 DFT 对模拟信号作谱分析

(3.6.17)式及(3.6.18)式已求出用 DFT 对非周期模拟信号进行谱分析的逼近式,从分析过程及结果都可看出,谱分析是有近似性的,因而会有误差。还应注意,用 DFT 作谱分析是利用 DFT 离散谱的选频特性来实现的。

对模拟信号作谱分析,主要有两个技术指标:一个是要分析的最高频率 f_h ,另一个是所需分析的信号要求的频率分辨率 F_0 ,即能分辨的两个频率分量的最小间距。前者决定了所要选的抽样频率 f_s ,后者决定了信号应取的时间长度 T_0 以及随之而定的抽样点数 N 。

模拟信号用 DFT 作频谱分析的处理过程在 3.6.3 节已做描述,即有时域抽样、时域截

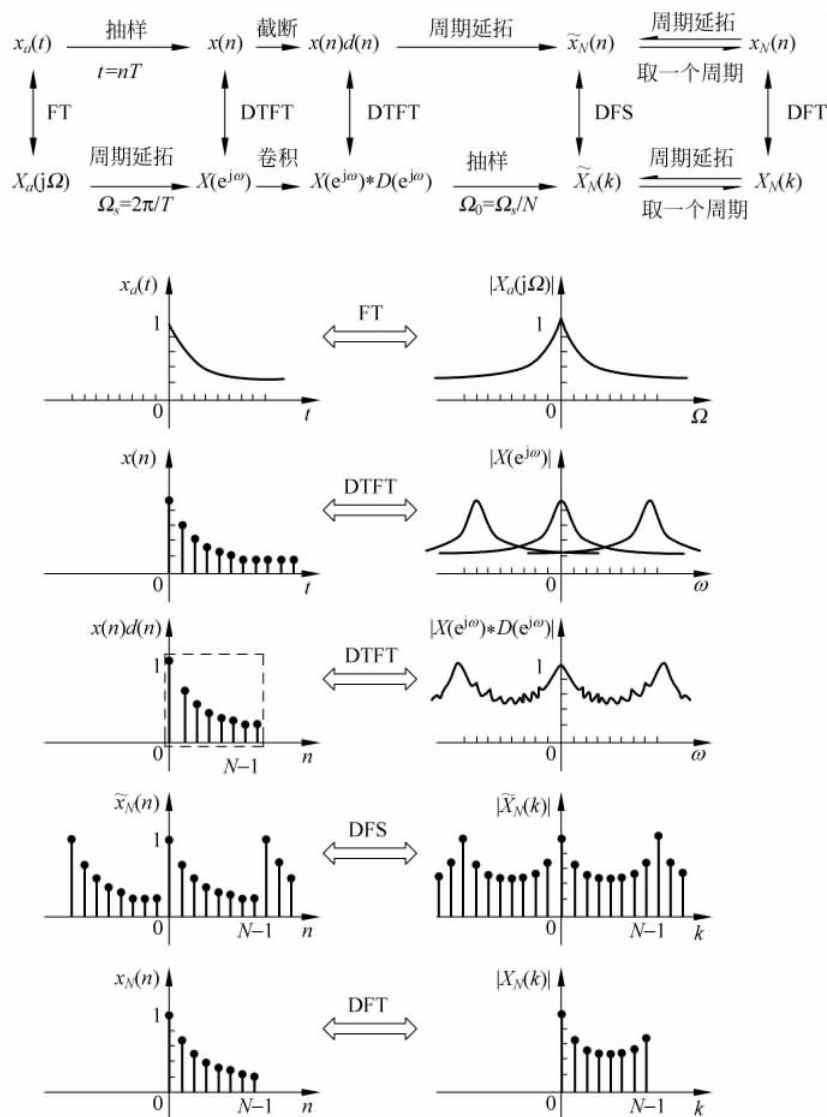


图 3.17 利用 DFT 对 DTFT(连续时间傅里叶变换)逼近的全过程(右侧各图只画了幅度)

断、频域抽样(DFT)等三个过程,在三个过程中,都会产生失真。

下面从两个方面研究,首先是谱分析的参量的选定,包括抽样频率 f_s 、数据时长 T_0 、抽样点数 N (即 DFT 的长度点数),并讨论频率分辨率 F_0 以及它与 f_s 、 T_0 、 N 之间的关系;其次是谱分析过程中可能产生的失真,包括频谱混叠失真、频谱泄漏失真及栅栏效应失真,并研究减小这些失真的方法。

3.6.5 用 DFT 对模拟信号作谱分析时参量的选择

学习要点

1. 抽样频率 f_s 的选择。若信号最高频率分量为 f_h ,则至少满足以下关系,才不会产生频谱的混叠失真:

$$f_s > 2f_h \quad (3.6.25)$$

但考虑到将信号截断成有限长序列会造成频谱泄漏使原来的频谱展宽且产生谱间的串扰,这些都可能造成频谱的混叠失真,因而可以适当增加信号的抽样频率, f_s 可选为

$$f_s = (3 \sim 6)f_h \quad (3.6.26)$$

折叠频率($f_s/2$)是能够分析模拟信号的最高频率,在数字频率上就是 $\omega = \pi$ 。

2. 频率分辨率 F_0 。它是指长度为 N 的信号序列所对应的连续谱 $X(e^{j\omega})$ 中能分辨的两个频率分量峰值的最小频率间距 F_0 , F_0 越小,则频率分辨率越高。

由于 DFT 运算的数据必须是有限长的 N 点,因而必须对时域序列 $x(n)$ 加以截断,即将时域序列乘一个窗口函数序列,截断用的窗口函数可以有多种(见第 8 章)。下面用矩形窗截断来讨论对正弦类序列频谱的影响,从而讨论对频率分辨率的影响。

设模拟信号 $x(t)$, 抽样后得到序列 $x(n) = x(t)|_{t=nT}$ 如将其截断成一个 N 点长序列 $x_N(n)$, 这相当于 $x(n)$ 乘上一个 N 点长的窗函数 $w_N(n)$

$$x_N(n) = x(n)w_N(n)$$

如果是直接截断,则 $w_N(n)$ 相当于矩形窗 $R_N(n)$; 如果采用其他形式的缓变窗,例如海明窗等(见第 8 章),则除了截断以外,窗内数据还有所变化。

先讨论矩形窗截断的情况,即

$$x_N(n) = x(n)R_N(n)$$

利用时域相乘,则频域是复卷积的关系(见表 2.3 中的第 7 条)

$$X_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * W_N(e^{j\omega})$$

式中 $X_N(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_N(n)]$ 表示截断后序列的频谱。

$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ 表示原序列的频谱,而矩形窗谱为

$$\begin{aligned} W_N(e^{j\omega}) &= \text{DTFT}[R_N(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{-j\frac{\omega N}{2}} (e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}})}{e^{-j\frac{\omega}{2}} (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})} = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

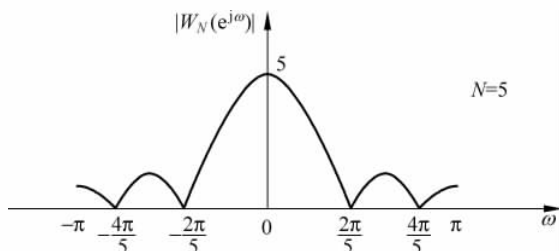
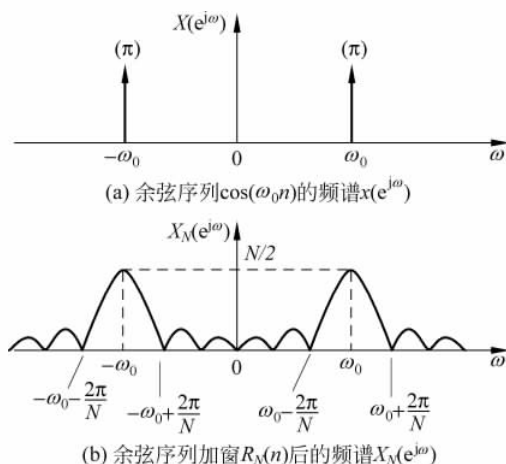
其幅度谱为 $|W_N(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$

相位谱为 $\arg[W_N(e^{j\omega})] = -\frac{N-1}{2}\omega + \arg\left[\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right]$

矩形窗的幅度谱如图 3.18 所示(只画了一个周期),它有一个主瓣宽度为 $4\pi/N$,在其旁边有许多旁瓣。

旁瓣多少视 N 而定。这一窗的幅度谱 $|W_N(e^{j\omega})|$ 与幅度谱 $|X(e^{j\omega})|$ 卷积后,得到的幅度谱 $|X_N(e^{j\omega})|$ 与 $|X(e^{j\omega})|$ 是不相同的。很显然,如果窗谱是 δ 函数,则卷积结果就是 $X(e^{j\omega})$,这样的窗实际上是时域长度为无穷长的窗,就等于不加窗,因而毫无意义。

若信号是余弦信号,其抽样序列是无限时长的, $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 是以 ω_0 为中心,以 2π 的整数倍为间隔的一系列冲激函数[见(2.3.63)式],图 3.19(a)画出了一个周期中的 $X(e^{j\omega})$,它与图 3.18 的矩形窗的频谱幅度卷积后,可得到图 3.19(b)的 $|X_N(e^{j\omega})|$,实际上是将窗谱平移至其主瓣中心处于 $\omega = \omega_0$ 及 $\omega = -\omega_0$ 位置上。

图 3.18 窗宽 $N=5$ 的矩形窗的幅度谱图 3.19 $\cos(\omega_0 n) \cdot R_N(n)$ 的频谱

即有[见(2.3.63)式]

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \text{DTFT}[A \cos(\omega_0 n)] = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 n) e^{-j\omega n} \\ &= A\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi i) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi i)] \end{aligned} \quad (3.6.27)$$

时域相乘 $x_N(n) = x(n)R_N(n)$, 则频域是复卷积 $X_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} [X(e^{j\omega}) * W_N(e^{j\omega})]$ 。

因而有

$$X_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_N(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = \frac{A}{2} [W_N(e^{j(\omega-\omega_0-2\pi i)}) + W_N(e^{j(\omega+\omega_0-2\pi i)})] \quad (3.6.28)$$

所以,加窗截断后 $X_N(e^{j\omega})$ 形状已不是周期性理想冲激函数,而是在 $\omega = \omega_0$ 及每隔 2π 处重复的主瓣以及主瓣两边的一系列小幅度的旁瓣(见图 3.19)。

矩形窗谱的主瓣宽度为 $\Delta\omega_w = 4\pi/N$, 而矩形窗截断后的频率分辨率可定义为窗谱主瓣衰减到 3dB 后的宽度(约为 $0.89 \times 2\pi/N$), 一般就取窗谱主瓣的一半宽度 $2\pi/N$ 作为频率分辨率 $\Delta\omega$ 。

$$\Delta\omega = 2\pi/N(\text{rad}) \quad (3.6.29)$$

如果信号是两个或多个正弦型信号之和,则在时域矩形截断后,在每个正弦型信号的频率 $\omega_i = 2\pi f_i / f_s$ 上都产生一个主瓣和附近的旁瓣。这时窗谱是这些频率上窗谱的叠加,其中各主瓣的宽度就主要决定了相邻两频率间的分辨能力。当相邻两频率很接近时,有一定宽度的主瓣就会重叠,而旁瓣的交叠也会影响主瓣的重叠情况,这样就可能分辨不出信号的某些频率了,所以才将加窗截断后能分辨出相邻两个频率的最小间距 $\Delta\omega$ (或 F_0) 称为频率分辨率。

从另一角度看,若时域抽样前连续时间信号的时长经截断后为 T_0 ,则频率分辨率 F_0 与数据长度 T_0 成反比,即

$$F_0 = 1/T_0 \quad (3.6.30)$$

(1) 若不做数据补零值的特殊处理,则时域抽样点数 N 与 T_0 关系为

$$T_0 = NT = N/f_s \quad (3.6.31)$$

其中 $T = \frac{1}{f_s}$ 为抽样的时间间距。从而可得到 F_0 的另一个重要表达式

$$F_0 = f_s/N \quad (\text{Hz}) \quad (3.6.32)$$

(3.6.29)式与(3.6.32)式都是频率分辨率的表达式,前者是 ω 域中的表达式,后者是 f 域中的表达式,因为 $\Delta\omega = 2\pi/N = 2\pi\Delta f/f_s$,则有 $\Delta f = f_s/N$,因而 $\Delta f = F_0$ 。

显然 F_0 应根据频谱分析的要求来确定,由 F_0 就能确定所需数据长度 T_0 。

(2) 若想提高频率分辨率,即减小 F_0 ,则只能增加有效数据长度 T_0 ,此时若 f_s 不变,则抽样点数 N 一定会增加。

(3) 用时域序列补零值的办法增加 N 值,是不能提高频率分辨率的,因为补零不能增加有效信号的长度,所以补零值点后信号的频谱 $X(e^{j\omega})$ 不会变化,因而不能增加任何信息,不能提高分辨率。其频率分辨率仍由原有效数据长度点数 N 决定。

3. 时域抽样点数 N 。(一般情况下,若时域不做补零的特殊处理,则这个 N 值也是 DFT 运算的 N 值)。

由于抽样点数 N 与信号观测时间 T_0 有关(当 f_s 选定后), T_0 又与所要求的 F_0 有关,故有

$$N = f_s T_0 = f_s / F_0 \quad (3.6.33)$$

为了用 FFT 来计算,常要求 $N=2^r$, r 为正整数,这时

- ① 当 T_0 不变时,可以同时增加 f_s 和 N ,使 N 满足为 2 的整数幂。
- ② 若不改变 f_s ,则只能增加有效数据长度 T_0 以增加 N 值,使其达到 $N=2^r$ 关系。
- ③ 用时域序列补零值的办法来增加 N ,以满足 $N=2^r$ 的要求。

①、③两种办法,只能使频域抽样更密,频域一个周期计算的点数更多,减小了 DFT 计算的频率间距,而且使栅栏效应更小,但是有效数据长度没有变化,故信号的频谱没有变化,因而频率分辨率没有变化,所以并不能提高频率分辨率,只有第②种办法,才能提高频率分辨率,同时也减小了 DFT 计算的频率间距。见下面的讨论。

3.6.6 用 DFT 对模拟信号作谱分析时的几个问题

用 DFT(采用第 4 章的 FFT 算法)对模拟信号作谱分析时,其误差来源有以下几个方面。

学习要点

1. 频谱的混叠失真。

若抽样频率不满足抽样定理要求,即不满足 $f_s \geq 2f_h$,则频域周期延拓分量会在 $f = 0.5f_s$ 附近($\omega = \pi$ 处)产生频谱的混叠失真。由图 1.21(c)看出,这一混叠现象是由信号的高频分量与延拓信号的低频分量的交叠而形成,其影响更为严重。一般来说,由于时域的突变会造成频域的拖尾现象,因而总会有轻微的混叠产生;另外,信号中的高频噪声干扰,也可能造成频域混叠;再次,由于频域泄漏也会造成频谱的混叠失真。

综合考虑各种影响后,选取 f_s 时,应使 $f \leq f_s/2$ 内能包含 98% 以上的信号能量,在 $f_s = (3-6)f_h$ 范围内选取 f_s ; 并且在抽样之前采用截止频率为 $f_s/2$ 的限带低通滤波器,即防混叠滤波器。

2. 频谱泄漏。

这也是由信号加窗截断造成的后果,见图 3.19,将 $X(e^{j\omega})$ 与 $X_N(e^{j\omega})$ 比较,即截断前后频谱加以比较,可以看出:

① 首先是产生了频谱泄漏,使原来的谱线展宽了,同时降低了频率分辨率。截断的时域序列长度越长,即 N 越大,则 $4\pi/N$ 越小,展宽得越窄,泄漏越小。这种展宽就称为频谱泄漏,泄漏会使频率分辨率降低,也就是说,两信号的频率离得很近时,由于频谱的泄漏,会使得无法分辨出这两信号。

② 其次是截断后产生谱间串扰,这是由于矩形窗存在着很多相对于主瓣幅度不是太小的旁瓣,因而在 $X_N(e^{j\omega})$ 中也形成了很多旁瓣,这些旁瓣起到谱间串扰作用,它有可能造成原信号中强信号的旁瓣掩盖弱信号的主瓣,使得人们以为根本不存在弱信号,从而降低了频率分辨率。

泄漏和谱间串扰使频谱展宽和拖尾,也会造成频谱的混叠失真,当这一情况严重时,就需提高抽样频率 f_s 。

为了减轻截断效应,可有两种方法。① 可以采用缓变型的窗函数来截断,例如用海明窗(各种窗见第 8 章),可以使窗的旁瓣幅度更小,海明窗第一旁瓣(即幅度最大的旁瓣)幅度比矩形窗谱的第一旁瓣幅度小 32dB,这样泄漏和谱间串扰就会大大减小。但是其窗谱的主瓣宽度则变成 $8\pi/N$,增加一倍,又会降低频率分辨率。② 为了使窗谱的主瓣宽度减小,提高频率分辨率,减小泄漏,则需采用截断长度(T_0)更长,即加大窗宽 N (截断长度 $T_0 = N/f_s$),使窗谱主瓣更窄,泄漏可以降低。

3. 栅栏效应。

* 一般非周期模拟信号的频谱是频率的连续函数,而用 DFT 来分析信号频谱时,DFT 计算的频率间隔,即看到的频谱间隔为 f_s/N ,也就是得到的是连续频谱的等间隔的 N 点抽样值,而这 N 点抽样值中的任意相邻两点之间的频率点上的频谱值是不知道的,就好像是通过一个栅栏的缝隙观看一个景象一样,只能在相隔一定间距的离散点上看到真实景象,被栅栏挡住部分是看不见的,把这种现象称为栅栏效应。

* 为了减小栅栏效应,可以有三种办法:① 在数据长度 T_0 不变的情况下,增加 f_s ,也就增加了时域抽样点数 N (此时时域数据 $x(n)$ 发生变化),即增加 DFT 的点数;② 如果 T_0 不变,时域有效抽样点数也不变,则可在有效 N 点数据的尾部增加零值点,使整个数据长度

为 M 点($M>N$),这就相当于使频域的抽样点数为 M ,即DFT的点数为 M 。这时,时域的 $x(n)$ 的有效数据没有变化;③增加 T_0 ,在 f_s 不变的情况下, N 必然增加,即DFT点数增加。

* 以上三种办法,都可使频域抽样密度加大,可看到更多的频率上的频谱,也就是减小了栅栏效应。

* 将数据补零值点的办法,除了可减小栅栏效应外,还可在有效数据不变的情况下,使DFT运算的点数变成2的整数幂($N=2^r$, r 正整数),以使用FFT(快速傅里叶变换)算法进行计算。

4. 最后,信号量化效应及FFT运算过程中的系数及运算中的有限字长效应等也会造成频谱的失真。

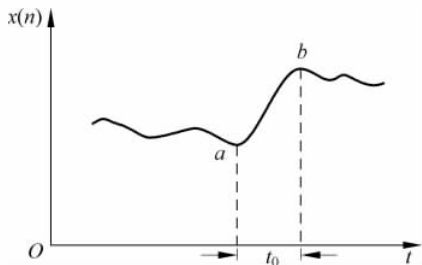


图 3.20 估算信号最高频率 f_h

5. 若预先不知道信号的最高频率 f_h ,则只能从观测记录下来的一段数据或波形中来确定 f_h ,取数据(波形)中变化速度最快的两相邻峰谷点之间间隔 t_0 作为半个周期(见图3.20),则有

$$t_0 = T_h/2, \quad f_h = 1/T_h = 1/2t_0 \quad (3.6.34)$$

知道了这一近似最高频率分量后,就可按前面方法选取 f_s 。

6. 若信号为无限带宽,则可选占信号能量98%左右的频带宽度 f_h 作为最高频率分量,这在前面已讨论过。

7. 对周期信号,必须使抽样后仍为周期序列,且截断的数据长度 T_0 必须等于周期序列周期的整数倍,并且不能补零值点,否则会产生频谱泄漏。

以下的例3.17是讨论,对周期信号,其截断长度必须为抽样后的周期序列的一个周期或为周期的整数倍时,用DFT来分析频谱,才不会产生频谱的泄漏现象。

【例3.17】 设有单频周期信号 $x_a(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, $f_0 = 1\text{kHz}$,试用DFT分析它的频谱。

解 $x_a(t)$ 的信号周期 $T_0 = \frac{1}{f_0} = 10^{-3}\text{s}$,抽样频率 f_s 取为 $f_s = 6\text{kHz}$,抽样间隔 $T = \frac{1}{f_s} = \frac{10^{-3}}{6}\text{s}$,则有

$$x(n) = x_a(nT) = \cos(2\pi f_0 nT) = \cos(\omega_0 n) = \cos(\pi n/3)$$

这里 $2\pi/\omega_0 = 2\pi/(\pi/3) = 6$,故序列一定是正弦周期序列,周期为 $N = 6 = T_0/T$,即一个周期的数据长度 $T_0 = NT = 10^{-3}\text{s}$ 。

(1) 若截取数据 $N = 6$,即截取一个正弦周期的长度 $T_0 = 10^{-3}\text{s}$,利用本书的配套软件的“辅助设计系统”可以得到 $|X(k)|$ 及其图形,代入 $m = 1, N = 6$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^5 \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) W_6^{nk} = \sum_{n=0}^5 \cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right) W_6^{nk} \\ &= \begin{cases} 3, & k = 1, k = 5 \\ 0, & \text{其他 } k \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq 5 \end{aligned}$$

即只在 $k=1, k=5$ 处频谱有值(其他 k 处为 0), 其相应频率为 $f_1=f_s/N=1\text{kHz}$, $f_5=5f_s/N=5\text{kHz}$ 。原信号正好是 $f_1=1\text{kHz}$ 。 $f_5=5\text{kHz}$ 是镜像频率, 即对 $f_s/2$ (即对 $k=N/2=3$) 而言, 信号频率 f_1 的镜像频率是 f_5 , 它是由于用复指数表示时, 在 $-f_1=-1\text{kHz}$ 处有信号频谱分量[即 $\cos\Omega_1 t = (e^{j\Omega_1 t} + e^{-j\Omega_1 t})/2$], 当时域抽样, 频域周期延拓后, $-f_1$ 频率成为 $f_5 = (f_s - f_1) = 5\text{kHz}$, 在离散频域处为 $k=N-1$ 。如图 3.21(a) 所示, 这时没有频谱的泄漏。

(2) 如果截取长度不是正弦序列的整周期的倍数, 即不满足 $N=6r$ (r 为正整数), 则时域周期延拓(由于频域抽样造成的)后, 一定不是周期序列, 频谱会产生泄漏。

取 $T_0=1.5\times 10^{-3}\text{s}$, $f_s=6\text{kHz}$ 不变, 则抽样点数 $N=T_0/T=T_0 f_s=9$, 利用本书配套软件的“辅助设计系统”可计算出 $X(k)$, 并直接可得到 $|X(k)|$ 的图形如图 3.21(b) 所示, 从图中看出在 $k=1, k=2$ 处有两个频谱峰值, 但 $k=2$ 处频谱峰值较大, 为 $|X(2)|=3.179$ 。与图 3.21(a) 图相比, 频谱不再是一条谱线($k=0$ 到 $N/2$ 之内), 即产生了截断效应的频谱泄漏, 而且 $k=1$ 对应于 $f_1=f_s/N=0.667\text{kHz}$, $k=2$ 对应于 $f_2=1.333\text{kHz}$, 与原频率 1kHz 有较大偏离。

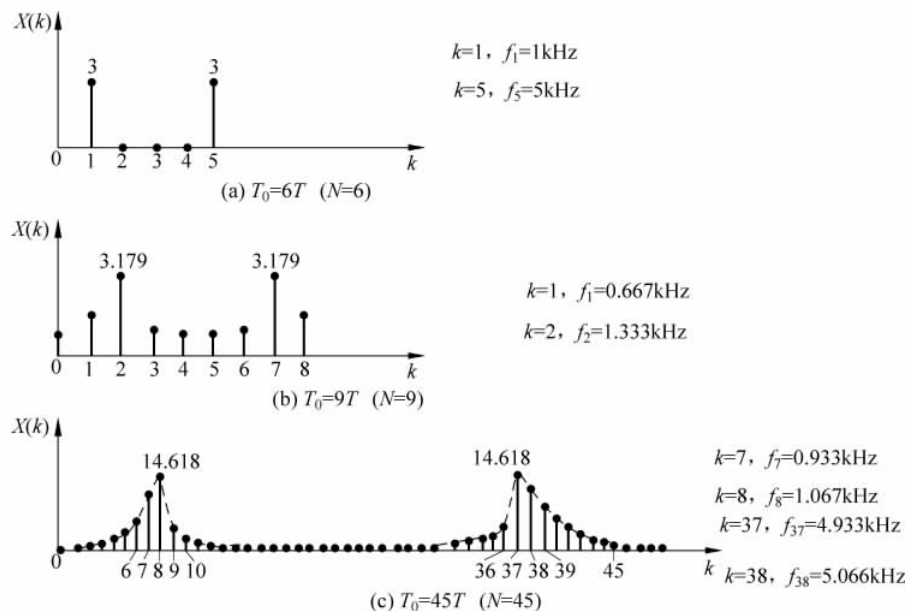


图 3.21 周期信号(余弦信号), 截断长度 $T_0(N)$ 的影响(正弦序列周期 $N=6$)

(3) 若不知周期信号的周期, 则只能是试探法, 先选观察时间长一点, 可以减小截断效应的影响, 如不行再取较大跨度。例如采用长度加倍来截取信号, 使分析出的频谱峰处的频率更接近真实频率, 且泄漏可更小。

在此例中, 取 $N=45$, 即数据长度 $T_0=NT=N/f_s=7.5\times 10^{-3}\text{s}$, 利用本书配套软件的“辅助设计系统”, 同样可得 $|X(k)|$ 的图形如图 3.21(c) 所示。

可以看出, $k=7$, 即 $f_7=7f_s/45=0.933\text{kHz}$, 频谱有一个大的峰值。在 $k=8$, 即 $f_8=8f_s/45=1.067\text{kHz}$ 处有一最大峰值 $|X(k)|=14.6182$ 。此两频率与原频率 $f_0=1\text{kHz}$ 误差都较小, 且泄漏的相对幅度都较小, 因而对频率的估值可更接近所需值。如此增加数据长

度,每次结果与前一次比较,当主谱峰值处的频率差别满足误差要求情况下,就可停止运算。

8. 以下是形象化的两个表格,第一个表格说明用 f_s, Ω_s, N, π 表示的 f, Ω, ω, k 的关系;第二个表格说明在主值区间 ($0 \leq k \leq N-1$) 频域中 $k, f_k, \Omega_k, \omega_k$ 与 f_s, F_0, N, π 的关系。

f	$-f_s$	$-f_s/2$	$-f_h$	0	f_h	$f_s/2$	f_s	
Ω	$-\Omega_s$	$-\Omega_s/2$	$-\Omega_h$	0	Ω_h	$\Omega_s/2$	Ω_s	$\Omega = 2\pi f$
ω	-2π	$-\pi$	$-\omega_h$	0	ω_h	π	2π	$\omega = \Omega T = \Omega/f_s = 2\pi f/f_s$
k	$-N$	$-\frac{N}{2}$		0		$\frac{N}{2}$	N	

而主值区间内,即 $0 \leq k \leq N-1$ 范围内可表示为 ($F_0 = f_s/N, \Omega_0 = 2\pi F_0 = 2\pi f_s/N$):

k	0	1	2	...	k	...	$\frac{N}{2}$	...	$N-2$	$N-1$	
f_k	0	F_0	$2F_0$	...	kF_0	...	$\frac{NF_0}{2} = \frac{f_s}{2}$	...	$(N-2)F_0$	$(N-1)F_0$	$f_k = \frac{kf_s}{N} = kF_0$
Ω_k	0	Ω_0	$2\Omega_0$	...	$k\Omega_0$	...	$\frac{N\Omega_0}{2} = \frac{\Omega_s}{2}$	...	$(N-2)\Omega_0$	$(N-1)\Omega_0$	$\Omega_k = \frac{2\pi kf_s}{N} = k\Omega_0$
ω_k	0	$\frac{2\pi}{N}$	$\frac{2\pi}{N} \times 2$	...	$\frac{2\pi k}{N}$	...	π	...	$\frac{2\pi}{N}(N-2)$	$\frac{2\pi}{N}(N-1)$	$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$

因此, $X(k)$ 中 k 所对应的数字频率为 $\omega_k = 2\pi k/N$, 其所对应的模拟频率为 $f_k = kf_s/N$, 模拟角频率为 $\Omega_k = 2\pi kf_s/N$ 。只有了解了这些关系, 才能知道 $X(k)$ 的第 k 条谱线是对应于模拟频率响应 $X_a(j\Omega)$ 的什么频率(或角频率)点上的抽样值。

3.7 有限长序列的 $X(z)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 之间的关系

在第2章2.3节中, 我们归纳了 $x_a(t)$ 、 $\hat{x}_a(t)$ 、 $x(n)$ 三者之间、 $X_a(s)$ 、 $\hat{X}_a(s)$ 、 $X(z)$ 三者之间以及 $X_a(j\Omega)$ 、 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 三者之间的关系, 以及它们互相之间的关系。

本节将要归纳出有限长序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 、离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 以及离散傅里叶变换 $X(k)$ 之间的关系。

设有限长序列为 $x(n) (n=0, 1, \dots, N-1)$, 且有

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

以下讨论(多数是归纳) $X(z)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 之间的变换关系。

1. $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 之间的关系。

(1) 由 $X(z)$ 求 $X(e^{j\omega})$, 由于 $x(n)$ 是有限长因果序列, 其 z 变换 $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$ 的收敛域为 $0 < |z| \leq \infty$, 它一定包括单位圆在内, 故其傅里叶变换一定存在, 故有

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.7.1)$$

即序列的离散时间傅里叶变换(DTFT) $X(e^{j\omega})$ 是其 z 变换 $X(z)$ 在单位圆($e^{j\omega}$)上的数值。

(2) 由 $X(e^{j\omega})$ 求 $X(z)$, 利用 IDFT 的公式 $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ 可得

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \left[\sum_{n=0}^{N-1} (z^{-1} e^{j\omega})^n \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \frac{1 - z^{-N} e^{j\omega N}}{1 - z^{-1} e^{j\omega}} d\omega \end{aligned}$$

于是有

$$X(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \phi_{\omega}(z) d\omega \quad (3.7.2)$$

其中 $\phi_{\omega}(z)$ 是由离散时间傅里叶变换(DTFT) $X(e^{j\omega})$ 求 z 变换(ZT)的插值函数

$$\phi_{\omega}(z) = \frac{1 - z^{-N} e^{j\omega N}}{1 - z^{-1} e^{j\omega}} \quad (3.7.3)$$

当 $z = e^{j\omega}$ 时, 插值函数 $\phi_{\omega}(z)$ 的值为

$$\begin{aligned} \phi_{\omega}(e^{j\omega}) &= \frac{1 - e^{-jN(\omega - \omega)}}{1 - e^{-j(\omega - \omega)}} = \frac{e^{-jN(\omega - \omega)/2} e^{jN(\omega - \omega)/2} - e^{-jN(\omega - \omega)/2}}{e^{-j(\omega - \omega)/2} e^{j(\omega - \omega)/2} - e^{-j(\omega - \omega)/2}} \\ &= e^{-j(N-1)(\omega - \omega)/2} \frac{\sin[N(\omega - \omega)/2]}{\sin[(\omega - \omega)/2]} \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

显然(3.7.4)式与矩形序列 $R_N(n)$ 的傅里叶变换(见(2.3.7)式)有关, 矩形序列的傅里叶变换表示式为 $R_N(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$, 故有

$$\phi_{\omega}(e^{j\omega}) = R_N(e^{j(\omega - \omega)}) \quad (3.7.5)$$

所以(3.7.2)式就是由 $X(e^{j\omega})$ 求 $X(z)$ 的插值公式, 其中 $\phi_{\omega}(z)$ 是由(3.7.3)式确定的插值函数。

2. $X(z)$ 和 $X(k)$ 之间的关系。

(1) 由 $X(z)$ 求 $X(k)$ 。若将 $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$ 中代入 $z = e^{j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^{-k}$ ($k=0, 1, \dots, N-1$), 即在 z 平面单位圆($z=e^{j\omega}$)上进行 N 点均匀抽样, 则有

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = X(z) \big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (3.7.6)$$

因而, 有限长序列 $x(n)$ 的 DFT, 即 $X(k)$, 是 $x(n)$ 的 z 变换在 z 平面单位圆上的均匀抽样值

(共有 N 点抽样)。

(2) 由 $X(k)$ 求 $X(z)$ 。这在频域抽样理论中的 3.5.2 节中已有讨论,将那里的(3.5.6)式及(3.5.7)式重写如下

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z) \quad (3.7.7)$$

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{z^N - 1}{N z^{N-1} (z - W_N^{-k})} \quad (3.7.8)$$

故利用(3.7.8)式的插值函数 $\Phi_k(z)$,由(3.7.7)式可以从有限长序列的 $X(k)$ 中求得 $X(z)$ 。

3. $X(e^{j\omega})$ 和 $X(k)$ 之间的关系。

(1) 由 $X(e^{j\omega})$ 求 $X(k)$ 。由 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j\omega n}$ 表示式中,代入 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$,即将 $X(e^{j\omega})$ 在频率轴(ω)上作 N 点均匀抽样,则有

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=2\pi k/N}$$

故有限长序列 $x(n)$ 的 DFT[即 $X(k)$]是 $x(n)$ 的 DTFT[即 $X(e^{j\omega})$]的均匀抽样。

(2) 由 $X(k)$ 求 $X(e^{j\omega})$ 。这在 3.5.2 节已有讨论,将那里的(3.5.15)式、(3.5.12)式重写如下

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi(\omega - 2\pi k/N) \quad (3.7.9)$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2} \quad (3.7.10)$$

即有限长序列 $x(n)$ 的 DTFT(即 $X(e^{j\omega})$)可以由 $x(n)$ 的 DFT(即 $X(k)$)用(3.7.9)式的插值公式求得,其插值函数为(3.7.10)式的 $\Phi(\omega)$ 。

$X(z)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 三者的关系可用图 3.22 形象地表示。

【例 3.18】 将一数字信号处理器作谱分析之用,抽样点数必须为 2 的整数幂,假定不采用任何特殊数据处理措施,设抽样频率为 $f_s = 5\text{kHz}$,要求频率分辨率为 $F_0 \leq 5\text{Hz}$ 。试确定:

- (1) 最小记录长度 $T_{o\min}$;
- (2) 允许处理的信号最高频率 f_h ;
- (3) 在一个记录中的最少抽样点数 $N_{\min}$;
- (4) 在抽样频率不变的情况下,如何将频率分辨率提高一倍,使 $F_0 = 2.5\text{Hz}$ 。

解 (1) 最小记录长度 $T_{o\min}$ 由频率分辨率 F_0 决定,有

$$T_{o\min} = 1/F_0 = 1/5\text{s} = 0.2\text{s}$$

(2) 由于抽样频率 f_s 是最高信号频率 f_h 的两倍以上数值

$$f_h < f_s/2 = 2.5\text{kHz}$$

(3) 最少记录点数为

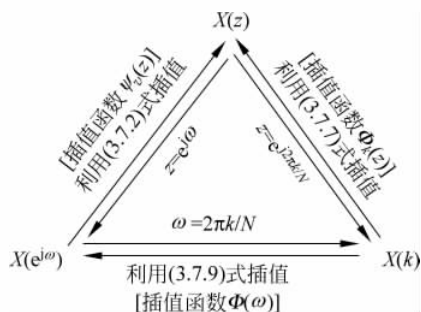


图 3.22 $X(z)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 之间的转换关系

$$N_{\min} \geq \frac{f_s}{F_0} = \frac{5 \times 10^3}{5} = 1000$$

取 $N = 2^{10} = 1024$ 。

(4) 将分辨率提高一倍的办法,就是将最小记录长度增加一倍,即

$$T'_{o \min} = 2T_{o \min} = 0.4 \text{ s}$$

在抽样频率不变的情况下,就必须将最少抽样点数加倍,即

$$N'_{\min} = T'_{o \min} / T = 2N_{\min} \geq 2000$$

取 $N' = 2^{11} = 2048$ 。

【例 3.19】 设有一已调幅信号,其载波频率 $f_c = 5 \text{ kHz}$,调制信号频率 $f_m = 120 \text{ Hz}$,采用 FFT 办法对它进行谱分析试问应如何选取以下 FFT 的参量(抽样点数取为 2 的整数幂)

- (1) 最低抽样频率 $f_{s \min}$;
- (2) 最小记录时间长度 $T_{o \min}$;
- (3) 最小抽样点数 $N_{\min}$ 。

解法一: (1) 已调幅信号(单频 f_m 调制时)共有三个频率 $f_c - f_m = 4.88 \text{ kHz}$, $f_c = 5 \text{ kHz}$, $f_c + f_m = 5.12 \text{ kHz}$ 。

故最高频率分量 $f_h = 5.12 \text{ kHz}$,所以最小抽样频率为

$$f_{s \min} = 2 \times f_h = 10.24 \text{ kHz}$$

(2) 最小记录时间长度 $T_{o \min}$ 与频率分辨率 F_0 有关。这里频率分辨率显然就是调制频率 f_m ,因为已调信号的每两个相邻频率分量之差值为 f_m 。所以

$$T_{o \min} = 1/F_0 = 1/120 = 8.333 \text{ ms}$$

(3) 最少抽样点数

$$N_{\min} = \frac{f_{s \min}}{F_0} = \frac{f_{s \min}}{f_m} = \frac{10.24 \times 10^3}{120} = 85$$

取

$$N = 2^7 = 128$$

解法二: 若此题采用带通信号的抽样定理。即用亚奈奎斯特抽样率时,则有

(1) 亚奈奎斯特抽样频率 f_s ,按 1.4.4 节的讨论

由于最高频率为 $f_h = 5.12 \text{ kHz}$,信号带宽为 $\Delta f_0 = 5.12 \text{ kHz} - 4.88 \text{ kHz} = 240 \text{ Hz}$,

因而 $r' = \frac{f_h}{\Delta f_0} = \frac{5.12 \times 10^3}{240} = 21.333 \text{ Hz}$,则 $r = \lfloor r' \rfloor = 21$

故

$$\Delta f'_0 = f_h / r = 243.81 \text{ Hz}$$

故带通信号的抽样频率(亚奈奎斯特抽样频率)为

$$f_s = 2\Delta f'_0 = 488 \text{ Hz}$$

(2) 最小记录时间长度

$$T_{o \min} = \frac{1}{F_0} = \frac{1}{120} = 8.333 \text{ ms}$$

(3) 最少抽样点数

$$N_{\min} = \frac{f_s}{F_0} = \frac{488}{120} = 4.067$$

取 $N = 2^3 = 8$ 。

由此看出 N 取值比用奈奎斯特抽样率求得的 N 要小得多,节省大量的运算量。

3.8 本章部分内容涉及的 MATLAB 函数及例题

1. 模运算(求余数)。

这在 1.5 节第 1 段(8)中已引出,利用该函数可实现对有限长序列的圆周翻褶、圆周移位,重写如下:

$$n_1 = \text{mode}(n, N)$$

完成 $n_1 = (n \bmod N) = ((n))_N$ 运算,满足 $n_1 = n + kN, 0 \leq n_1 \leq N-1, k$ 整数。

例 $n = \text{mod}(-5, 8)$, 则 $n = 3$

2. 圆周移位。

可以开发出一个时域圆周移位的 MATLAB 函数 **cirshift, m**:

$y = \text{cirshift}(x, m, N)$

其中 x 为输入序列,其长度必须小于等于圆周长度 N , y 为输出序列, m 为移位步长,实现 $y(n) = x((n-m))_N R_N(n)$ 或记为 $y(n) = x((n-m) \bmod N)$ 。

function y=cirshift(x,m,N)

```
% 长度为 N 的 x 序列(时域)作 m 点圆周移位
% -----
% [y] = cirshift(x,m,N)
% y = 包含圆周移位的输出序列
% x = 长度 ≤ N 的输入序列
% m = 移位样点数
% N = 圆周缓冲器长度
% 方法: y(n) = x((n-m) mod N)

% Check for length of x
if length(x) > N
    error('N 必须 ≥ x 的长度')
end
x = [x zeros(1, N - length(x))]; % 将 x 补零补到长度为 N
n = [0:1:N-1];
n = mod(n-m, N);
y = x(n+1); % MATLAB 下标从 1 开始
```

【例 3.20】 设 $x(n) = [1, 2, 3, 4, 5]$, 求 $x((n-3))_5 R_5(n)$ 及 $x((n+3))_6 R_6(n)$ 。

解

```
clc; clear all
x = [1 2 3 4 5];
y1 = cirshift(x, 3, 5); % x 圆周右移 3 位
y2 = cirshift(x, -3, 6); % x 补一个零值后左移 3 位

y1 = 3 4 5 1 2
y2 = 4 5 0 1 2 3
```

3. 圆周翻褶。

$$y(n) = x((-n))_N R_N(n) = \begin{cases} x(0), & n = 0 \\ x(N-n), & 1 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

MATLAB 中可用 $y = x(\text{mod}(-nx, N) + 1)$ 求得圆周翻褶序列。

【例 3.21】 已知 $X(n) = [2, 3, 4, 5, 6]$, $N = 8$, 求 $x(n)$ 的 8 点圆周翻褶序列 $x((-n))_8 R_8(n)$ 。

解

```
clc;clear all
x=[2,3,4,5,6];N=8; % 假定 nx 从 0 开始
x=[x,zeros(1,N-length(x))];nx=0:N-1 % x 补零补到 N 点长
y=x(mod(-nx,N)+1); % 圆周翻褶,MATLAB 函数从 1 开始,必须加 1
subplot(121),stem([0:N-1],x);title('原序列');
xlabel('n');ylabel('x(n)');grid;
subplot(122),stem([0:N-1],y);title('圆周翻褶序列');
xlabel('n');ylabel('x((-n))8 R8(n)');grid;
```

程序运行结果如图 3.23 所示。

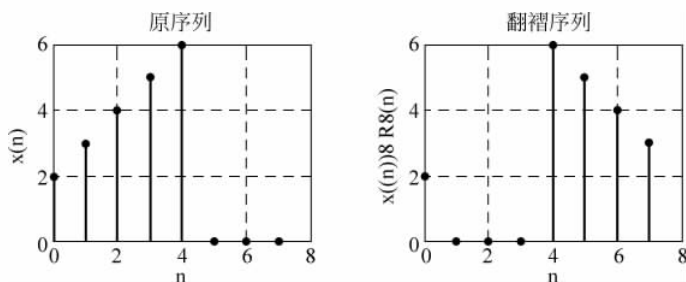


图 3.23 例 3.21 的图

4. 将实序列 $x(n)$ 分解为圆周偶对称序列 $x_{ep}(n)$ 及圆周奇对称序列 $x_{op}(n)$ 。

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

$x_{ep}(n)$ 及 $x_{op}(n)$ 的表达式可见 (3.4.32) 式及 (3.4.33) 式, 利用这两个式子及圆周翻褶序列的表示关系, 可编写以下 MATLAB 函数程序 **circevod.m** ($x(n)$ 为实序列时)。

```
function[xep,xop]=circevod(x)
% 将实序列分解为圆周偶和圆周奇两部分
% -----
% [xep,xop]=circevod(x)
%
if any(imag(x)~=0)
    error('x 非实数序列')
end
N=length(x);n=0:(N-1);
xep=0.5*(x+x(mod(-n,N)+1)); % 形成圆周偶对称序列
xop=0.5*(x-x(mod(-n,N)+1)); % 形成圆周奇对称序列
```

5. DFT 矩阵, IDFT 矩阵。

* (3.3.8) 式即为 DFT 矩阵, 它是用矩阵法求 DFT 的基础, 可将它表示为

```
wN = dftmtx(N)
```

【例 3.22】 求 $N=4$ 的 DFT 矩阵。

解

```
w4 = dftmtx(4)
w4 =
1.0000      1.0000      1.0000      1.0000
1.0000     0 - 1.0000i     -1.0000     0 + 1.0000i
1.0000     -1.0000      1.0000     -1.0000
1.0000     0 + 1.0000i     -1.0000     0 - 1.0000i
```

* N 点 IDFT 可表示成 DFT 矩阵取共轭再乘以 $1/N$, 见(3.3.10)式、(3.3.11)式, 可将它表示为

```
wNI = conj(dftmtx(N))/N
```

其中 conj 表示取共轭运算。

【例 3.23】 已知 $w4$ 由例 3.28 的 $w4$ 给出, 求 IDFT 矩阵 $w4I$ 。

解

```
w4I = conj(dftmtx(4))/4
w4I =
0.2500      0.2500      0.2500      0.2500
0.2500     0 + 0.2500i     -0.2500     0 - 0.2500i
0.2500     -0.2500      0.2500     -0.2500
0.2500     0 - 0.2500i     -0.2500     0 + 0.2500i
```

6. DFT 与 IDFT 的矩阵法计算, 按(3.3.12)式可知 DFT 的列向量 X 等于 DFT 矩阵左乘离散时域 x 列向量, 见以下例题。

例

```
x' = [4, 3, 2, 1]
X = dftmtx(4) * x
X' = 10.0000, 2.0000 - 2.0000i, 2.0000, 2 + 2.0000i
```

这里已将输出转置成行向量。

同样按(3.3.13)式可知, IDFT 的列向量 x 等于 IDFT 矩阵左乘离散频域 X 列向量后再乘 $1/N$ 。

例

```
X' = [10, 2 - 2i, 2, 2 + 2i]
x = conj(dftmtx(4))/4 * X
x' = 4, 3, 2, 1
```

这里也将输出转置成行向量。这种用矩阵计算办法, 运行是较慢的, 最有用、速度最快的是用 FFT(快速傅里叶变换)算法来计算 DFT。

* 也可由 DFT 定义直接编写出向量-矩阵乘法的程序, 此自编程序为 dft.m。

```
function[Xk] = dft(xn, N)
% 计算离散傅里叶变换
```

```

% -----
% [Xk] = dft(xn, N)
% Xk = 在  $0 \leq k \leq N-1$  间的 DFT 系数数组
% xn = N 点有限长序列
% N = DFT 的长度
%
n = [0:1:N-1];           % n 的行向量
k = [0:1:N-1];           % k 的行向量
WN = exp(-j * 2 * pi/N);  % WN 因子
nk = n' * k;              % 产生一个含 nk 值的 N 乘 N 维矩阵
WNNk = WN.^nk;           % DFT 矩阵
Xk = xn * WNNk;           % DFT 系数的行向量

```

* 同样可自编 IDFT 程序 idft.m。

```
function[xn] = idft(Xk, N)
```

在上面求 DFT 的自编程序中,只需将 DFT 矩阵那条语句换成 $WNNk = WN.^(-nk)$, 将最后的语句换成 $xn = (Xk * WNNk)/N$ 。

```

function[xn] = idft(Xk, N)
% 计算离散傅里叶反变换
% -----
% [xn] = idft(Xk, N)
% xn = 在  $0 \leq n \leq N-1$  之间的 N 点有限长序列
% Xk = 在  $0 \leq k \leq N-1$  之间的 DFT 系数数组
% N = DFT 的长度
%
n = [0:1:N-1];           % n 的行向量
k = [0:1:N-1];           % k 的行向量
WN = exp(-j * 2 * pi/N);  % Wn 因子
nk = n' * k;              % 产生一个含 nk 值的 N 乘 N 维矩阵
WNNk = WN.^(-nk);        % IDFT 矩阵
xn = (Xk * WNNk)/N;       % IDFT 的行向量

```

7. 圆周卷积。用圆周卷积计算线性卷积。

(1) 时域方法。

* 圆周卷积的公式见(3.4.46)式,若用圆周卷积矩阵表示,则采用(3.4.48)式。下面采用圆周移位关系的表达式来实现圆周卷积,即利用开发出的 **circonvt.m** 函数来实现圆周卷积。

```

function y = circonvt(x1, x2, N)
% 在 x1 和 x2(时域)之间的 N 点圆周卷积
% -----
% [y] = circonvt(x1, x2, N)
% y = 包含圆周卷积的输出序列
% x1 = 长度  $N1 \leq N$  的输入序列
% x2 = 长度  $N2 \leq N$  的输入序列
% N = 圆周缓冲器的大小
% 方法  $y(n) = \sum(x1(m) * x2((n-m) \bmod N))$ 

```

```

% Check for length of x1
if length(x1)>N
    error('N 必须 >= x1 的长度')
end

% Check for length of x2
if length(x2)>N
    error('N 必须 >= x2 的长度')
end

x1 = [x1 zeros(1,N-length(x1))];
x2 = [x2 zeros(1,N-length(x2))];

m = [0:1:N-1];
x2 = x2(mod(-m,N)+1);
H = zeros(N,N);

for n = 1:1:N
    H(n,:) = cirshift(x2,n-1,N);
end

y = x1 * H';

```

【例 3.24】 已知 $x_1(n)=[2,4,3,1]$, $x_2(n)=[2,1,3]$, 求 4 点圆周卷积 $y(n)=x_1(n) \textcircled{*} x_2(n)$ 。

解:

```

clc;clear all
x1 = [2 4 3 1];x2 = [2 1 3];
y = circonvt(x1,x2,4)

y = 14    13    16    17

```

* 用圆周卷积计算线性卷积。

显然,当 $N \geq N_1 + N_2 - 1$ 时,由 $\text{circonvt}(x_1, x_2, N)$ 所得到的结果就等于线性卷积结果,即

$$x_1(n) \textcircled{*} x_2(n) = x_1(n) * x_2(n) = [4, 10, 16, 17, 10, 3]$$

(2) 在频域中计算来实现圆周卷积及线性卷积。

* 实际上就是利用图 3.10 的框图来求解,它既可以求圆周卷积,也可以求线性卷积。求圆周卷积时,只需将短序列长度补零值点,补到和长序列的长度相等即可。利用 DFT 矩阵 $\text{dftmtx}(L)$ 及 IDFT 矩阵 $\text{conj}(\text{dftmtx}(L)/L)$ 即可求解。

* 当然最方便的办法是采用以下几条简单语句即可(利用 FFT(快速傅里叶变换)算法)

```

X1 = fft(x1,N); X2 = fft(x2,N);
Y = X1 * X2; y = ifft(Y,N);

```

显然,当 N 满足 $N \geq N_1 + N_2 - 1$ 时,这样求出的圆周卷积结果就代表线性卷积结果。

8. 用圆周卷积来实现线性相关。

方法与用圆周卷积计算线性卷积一样。

条件仍然是 $N \geq N_1 + N_2 - 1$, 按线性相关的公式(3.6.1)式, 若 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 皆为实序列, 则有 $r_{x_1 x_2}(m) = x_1(m) * x_2(-m)$, 因而可用求圆周卷积的办法来求线性相关。

此时, 利用上面的第7点中参与卷积的两序列应为 $x_1(n)$ 与 $x_2(-n)$, 即用 $x_1(n)$ 代替 x_1 , 用 $x_2(-n)$ 代替 x_2 , 在这两个序列后补零值, 补到长度为 N , 然后作圆周卷积, 因而随后的程序就与第7点中完全一样, 所得结果就代表线性相关, 但须将求出结果再加圆周移位, 以使 m 为正、 m 为负皆有 $r_{x_1 x_2}(m)$ 值, 即要对 $r_{x_1 x_2}(0)$ 定位。

当然也有频域求解 $r_{x_1 x_2}(m)$ 的办法与上面求线性卷积的讨论是一样的, 用 MATLAB 函数求解线性卷积及线性相关(包括自相关)的频域办法, 将在下一章举例说明。

9. 用 DFT 作频谱分析将在下章举例说明。

习 题

3.1 如图 P3.1 所示, 序列 $x(n]$ 是周期为 6 的周期性序列, 试求其傅里叶级数的系数。

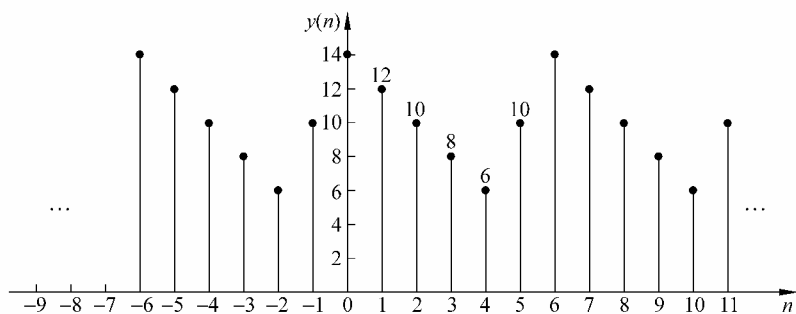


图 P3.1

3.2 设 $x(n] = R_4(n)$, $\tilde{x}(n) = x((n))_6$, 试求 $\tilde{X}(k)$, 并作图表示 $\tilde{x}(n)$, $\tilde{X}(k)$ 。

3.3 设

$$x(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

$$h(n) = R_4(n-2)$$

令 $\tilde{x}(n) = x((n))_6$, $\tilde{h}(n) = h((n))_6$

试求 $\tilde{x}(n)$ 与 $\tilde{h}(n)$ 的周期卷积, 并作图。

3.4 已知 $x(n]$ 为 $\{1, 1, 3, 2\}$, 如图 P3.4 所示, 试画出 $x((-n))_5$, $x((-n))_6 R_6(n)$, $x((n))_3 R_3(n)$, $x((n))_6$, $x((n-3))_5 R_5(n)$, $x((n))_7 R_7(n)$ 等各序列。

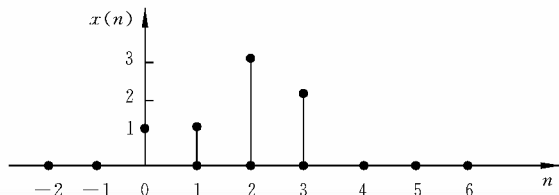


图 P3.4

3.5 试求以下有限长序列的 N 点 DFT(闭合形式表达式):

(1) $x(n) = a(\cos\omega_0 n)R_N(n)$ (2) $x(n) = a^n R_N(n)$

(3) $x(n) = \delta(n - n_0)$, $0 < n_0 < N$ (4) $x(n) = nR_N(n)$

(5) $x(n) = n^2 R_N(n)$

3.6 已知 $x(n) = \{2, 1, 4, 2, 3\}$,

(1) 计算 $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ 及 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 并说明二者的关系。

(2) 将 $x(n)$ 的尾部补零, 得到 $x_0(n) = \{2, 1, 4, 2, 3, 0, 0, 0\}$

计算 $X_0(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_0(n)]$, $X_0(k) = \text{DFT}[x_0(n)]$ 。

(3) 将(1)、(2)的结果加以比较, 得出相应的结论。

3.7 设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的周期序列, 则它一定也是周期为 $2N$ 的周期序列。

$$\text{若 } \tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}, \quad \tilde{X}_1(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} \tilde{x}(n) W_{2N}^{nk}$$

试用 $\tilde{X}(k)$ 来表示 $\tilde{X}_1(k)$ 。

3.8 图 P3.8 画出了几个周期序列 $\tilde{x}(n)$, 这些序列可以表示成傅里叶级数

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(2\pi/N)nk}$$

问:

(1) 哪些序列能够通过选择时间原点使所有的 $\tilde{X}(k)$ 成为实数?

(2) 哪些序列能够通过选择时间原点使所有的 $\tilde{X}(k)$ [除 $\tilde{X}(0)$ 外] 成为虚数?

(3) 哪些序列能做到 $\tilde{X}(k) = 0$, $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$

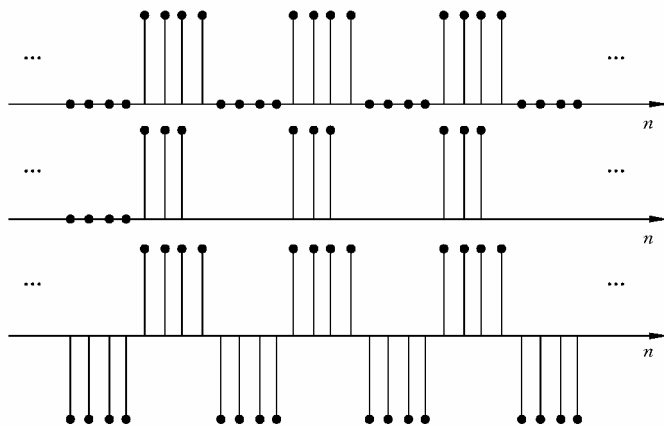


图 P3.8

3.9 图 P3.9 画出了两个有限长序列, 试画出它们的 6 点圆周卷积。

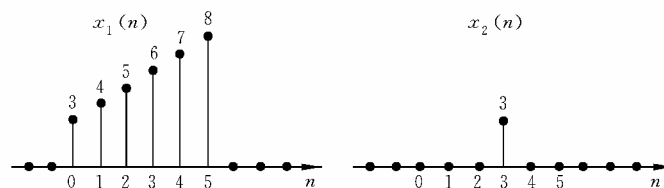


图 P3.9

3.10 图 P3.10 表示一个 5 点序列 $x(n)$, 试画出:

- (1) $x(n) * x(n)$ (2) $x(n) \textcircled{5} x(n)$ (3) $x(n) \textcircled{10} x(n)$

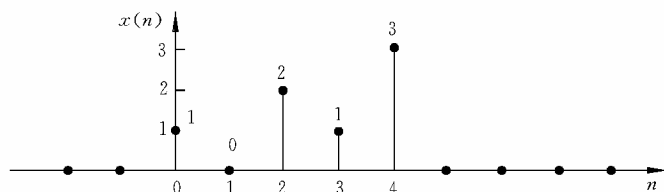


图 P3.10

3.11 设抽样频率为 720Hz 的时域抽样序列为

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 4\sin\left(\frac{\pi}{7}n\right)$$

对 $x(n)$ 作 72 点 DFT 运算。

- (1) 所选 72 点截断是否能保证得到周期序列? 说明理由;
(2) 是否会产生频谱泄漏? 请粗略画出信号谱线, 并做说明。

3.12 设有两个序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} y(n), & 0 \leq n \leq 14 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

各作 15 点的 DFT, 然后将两个 DFT 相乘, 再求乘积的 IDFT, 设所得结果为 $f(n)$, 问 $f(n)$ 的哪些点(用序号 n 表示)对应于 $x(n) * y(n)$ 应该得到的点。

3.13 已知两个有限长序列为

$$x(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} -1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 1, & 5 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

试用图表示 $x(n)$, $y(n)$ 以及 $f(n) = x(n) \textcircled{7} y(n)$ 。

3.14 已知 $N=7$ 点的实序列的 DFT 在偶数点的值为 $X(0)=4.8$, $X(2)=3.1+j2.5$, $X(4)=2.4+j4.2$, $X(6)=5.2+j3.7$ 。求 DFT 在奇数点的数值。

3.15 设 $x(n)$ 为 $N=6$ 点的实有限长序列

$$x(n) = \{1, 2, 4, 3, 0, 5\}$$

试确定以下表达式的数值, 并用 MATLAB 计算 DFT 进行验证。

(1) $X(0)$ (2) $X(3)$ (3) $\sum_{k=0}^5 X(k)$ (4) $\sum_{k=0}^5 |X(k)|^2$

3.16 已知 $X(k)$ 为 8 点实序列的 DFT, 且已知

$$X(0)=6, \quad X(1)=4+j3, \quad X(2)=-3-j2, \quad X(3)=2-j, \quad X(4)=4$$

试利用 DFT 的性质(不必求 IDFT)来确定以下各表达式的值。

(1) $x(0)$ (2) $x(4)$ (3) $\sum_{n=0}^7 x(n)$ (4) $\sum_{n=0}^7 |x(n)|^2$

3.17 已知 $x(n)$ 是 N 点的有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ 。现将 $x(n)$ 的每两点之间补进 $r-1$ 个零值点, 得到一个 rN 点的有限长序列

$$y(n) = \begin{cases} x(n/r), & n = ir, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

试求 rN 点 DFT $[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

3.18 频谱分析的模拟信号以 8kHz 被抽样, 计算了 512 个抽样的 DFT, 试确定频谱抽样之间的频率间隔。

3.19 设有一谱分析用的信号处理器, 抽样点数必须为 2 的整数幂, 假定没有采用任何特殊数据处理措施, 要求频率分辨率 $\leq 10\text{Hz}$, 如果采用的抽样时间间隔为 0.1ms, 试确定:

- (1) 最小记录长度;
- (2) 所允许处理的信号的最高频率;
- (3) 在一个记录中的最少点数。

3.20 有一调幅信号

$$x_a(t) = [1 + \cos(2\pi \times 100t)]\cos(2\pi \times 600t)$$

用 DFT 做频谱分析, 要求能分辨 $x_a(t)$ 的所有频率分量, 试问

- (1) 抽样频率应为多少赫兹(Hz)?
- (2) 抽样时间间隔应为多少秒(s)?
- (3) 抽样点数应为多少点?
- (4) 若用 $f_s = 3\text{kHz}$ 频率抽样, 抽样数据为 512 点, 做频谱分析, 求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 512 点, 并粗略画出 $X(k)$ 的幅频特性 $|X(k)|$, 标出主要点的坐标值。

3.21 已知序列 $x(n) = 3\delta(n) + 5\delta(n-2) + 4\delta(n-4)$, 则可求出 8 点 DFT 为 $X(k)$

- (1) 若 $y(n)$ ($0 \leq n \leq 7$) 的 8 点 DFT 为 $Y(k) = W_8^{3k} X(k)$, $0 \leq k \leq 7$, 求 $y(n)$;
- (2) 若 $w(n)$ ($0 \leq n \leq 7$) 的 8 点 DFT 为 $W(k) = \text{Re}[X(k)]$, $0 \leq k \leq 7$, 求 $w(n)$;
- (3) 若 $u(n)$ ($0 \leq n \leq 3$) 的 4 点 DFT 为 $U(k) = X(2k)$, $0 \leq k \leq 3$, 求 $u(n)$ 。

3.22 已知
$$X_1(k) = \begin{cases} 5, & k=0 \\ 2, & 1 \leq k \leq 7 \end{cases}, \quad X_2(k) = \begin{cases} 4, & k=5 \\ 1, & 1 \leq k \leq 4, 6 \leq k \leq 9 \end{cases}$$

求
$$x_1(n) = \text{IDFT}[X_1(k)], 8 \text{ 点}$$

$$x_2(n) = \text{IDFT}[X_2(k)], 10 \text{ 点}$$

3.23 令 $X(k)$ 表示 N 点序列 $x(n)$ 的 N 点离散傅里叶变换, 证明:

- (1) 如果 $x(n)$ 满足关系式 $x(n) = -x(N-1-n)$, 则 $X(0) = 0$;
- (2) 当 N 为偶数时, 如果 $x(n) = x(N-1-n)$, 则 $X(N/2) = 0$ 。

3.24 设 $x_1(n) = R_5(n)$, 求:

- (1) $X_1(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_1(n)]$, 画出它的幅频特性和相频特性(标出主要坐标值);
- (2) $X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$, 画出它的幅频特性;
- (3) $X_2(k) = \text{DFT}[x_1((n))_{10} R_{10}(n)]$, 画出它的幅频特性;
- (4) $X_3(k) = \text{DFT}[(-1)^n x_1((n))_{10} R_{10}(n)]$, 画出它的幅频特性;
- (5) $x_4(n) = \text{IDFT}[X_{2ep}(k)]$;
- (6) $x_5(n) = \text{IDFT}[\text{Im}[X_2(k)]]$;
- (7) $x_6(n) = \text{IDFT}[X_2((N-1-k))_N R_N(k)]$;
- (8) $x_7(n) = \text{IDFT}[W_{10}^{-2k} X_2(k) X_2(k)]$ 。

3.25 已知 $y(n) = x(N-1-n)$, $u(n) = (-1)^n x(n)$, 且 $x(n)$, $u(n)$, $y(n)$ 都是 N 点实序列。试用 $X(k)$ 表示 $Y(k)$, $U(k)$, 其中 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, $U(k) = \text{DFT}[u(n)]$ 。

3.26 复数有限长序列 $f(n)$ 由两个实有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ ($0 \leq n \leq N-1$) 组成, $f(n) = x(n) + jy(n)$, 且已知 $F(k) = \text{DFT}[f(n)]$ 有以下两种表达式:

$$(1) F(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k} \quad (2) F(k) = 1 + jN$$

其中 a, b 为实数。试用 $F(k)$ 求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, $x(n), y(n)$ 。

3.27 $x(n), y(n)$ 为 N 点实序列, 设 $w(n) = x(n) + jy(n)$

$$W(k) = \text{DFT}[w(n)] = \text{Re}[W(k)] + j\text{Im}[W(k)]$$

(1) 若已知 $\text{Re}[W(k)]$ 及 $\text{Im}[W(k)]$, 请用它们表示序列 $x(n)$ 及 $y(n)$ 的 N 点 DFT。

(2) 若已知 $W(k)$ 的共轭对称分量 $W_{ep}(k)$ 及共轭反对称分量 $W_{op}(k)$, 试用它们表示 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的 N 点 DFT。

3.28 设 $x(n) = \{2, 1, 3, 0, 4\}$, $y(n) = \{3, 0, 4, 2, 1\}$

(1) 求 $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$; $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 5 点; $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, 5 点。

(2) 讨论 $Y(k)$ 与 $X(k)$ 及 $X(e^{j\omega})$ 的关系。

3.29 利用 MATLAB 编程完成此题。用 DFT 对下列信号进行谱分析, 选择合适的变换区间长度 N , 并画出幅度特性和相位特性。

(1) $x_1(n) = 3\cos(0.25\pi n)R_8(n)$ (2) $x_2(n) = 0.8^{|n|}R_{15}(n+7)$

3.30 对表 3.2 中的序列及其 DFT 的实、虚、偶、奇关系加以证明。

3.31 已知 $x_1(n)$ 是 50 点有限长序列, 非零值范围为 $0 \leq n \leq 49$; $x_2(n)$ 是 15 点的有限长序列, 非零值范围为 $5 \leq n \leq 19$; 两序列作 50 点圆周卷积, 即

$$y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) = \sum_{m=0}^{49} x_1(m)x_2((n-m))_{50}R_{50}(n)$$

试问 $y(n)$ 中哪个 n 值范围对应于 $x_1(n) * x_2(n)$ 的结果。

3.32 研究取数据足够长情况下的高分辨率的频谱以及数据不够的情况下靠补零值而形成的高计算密度频谱, 看它们的区别, 研究序列

$$x(n) = \cos(0.48\pi n) + \cos(0.52\pi n)$$

求它的有限样本的频谱。

(1) 取 $0 \leq n \leq 10$, 确定并画出 $\text{DFT}[x(n)]$;

(2) 对(1)中序列补 90 个零值后, 确定并画出 $\text{DFT}[x(n)]$;

(3) 取 $0 \leq n \leq 100$, 确定并画出 $\text{DFT}[x(n)]$ 。

试采用 MATLAB 方法来求解。

3.33 设某 LSI 因果系统的频率响应为 $H(e^{j\omega})$ 。

(1) 若 $\text{Re}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=0}^4 (0.6)^k \cos(k\omega)$

用解析方法求该系统的单位冲激响应, 采用 IDFT (IFFT) 作为计算工具, 验证所得结果, 并选择合适的计算长度点数 N 。

(2) 若 $\text{Im}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=0}^4 2k \sin(k\omega)$, 且有 $\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = 0$

用解析方法求此系统的单位冲激响应 $h(n)$, 采用 IDFT (IFFT) 作为计算工具, 验证所得结果, 并选择合适的计算长度点数 N 。

3.34 在例 3.7 中, 利用圆周共轭对称性, 可以用一次 N 点 DFT 运算来计算两个 N 点实序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的 DFT (见例 3.7 的分析)。试按例 3.6 的讨论开发一个 MATLAB 函数来实现它。

3.35 对以下各序列, 计算: (1) N 点圆周卷积 $y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n)$; (2) 线性卷积 $y_l(n) = x_1(n) * x_2(n)$; (3) 讨论 $y(n)$ 和 $y_l(n)$ 的区别。

(a) $x_1(n) = \{1, 1, 1, 1\}$, $x_2(n) = \cos(\pi n/4)R_6(n)$; $N=8$

(b) $x_1(n) = \cos(2\pi n/N)R_{16}(n)$, $x_2(n) = \sin(2\pi n/N)R_{16}(n)$; $N=32$

$$(c) x_1(n) = (0.8)^n R_{10}(n), x_2(n) = (-0.8)^n R_{10}(n); N=15$$

$$(d) x_1(n) = n R_{10}(n), x_2(n) = (N-n) R_{10}(n); N=10$$

3.36 模拟信号 $x_a(t) = 2\sin(4\pi t) + 5\cos(8\pi t)$ 进行抽样, 抽样点为 $t=nT, T=0.01, n=0, \dots, N-1$, 得到 N 点序列 $x(n)$, 用 $x(n)$ 的 N 点 DFT 来对 $x_a(t)$ 幅度谱作估计。

(1) 从以下 N 值中, 选择一个能提供最精确的 $x_a(t)$ 的幅度谱的 N 值 ($N=40, 50, 60$), 并要求画出幅度谱 $|X(k)|$ 及相位谱 $\arg[X(k)]$ 。

(2) 从以下 N 值中, 选择一个能提供使 $x_a(t)$ 的幅度谱泄漏量最小的 N 值 ($N=90, 95, 99$), 画出幅度谱 $|X(k)|$ 及相位谱 $\arg[X(k)]$ 。

3.37 设 $x(n) = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)$, 抽样频率为 $f_s = 8\text{kHz}$, $f_1 = 1.4\text{kHz}$, $f_{21} = 1.45\text{kHz}$, $f_{22} = 2.0\text{kHz}$ 。

每次都把 f_1 与 f_{21} 两个频率的信号作为一组 $x(n)$, 把 f_1 与 f_{22} 频率的信号作为另一组 $x(n)$ 来研究, 在以下三种情况下, 用 MATLAB 中的程序求出这两组信号的 DFT, 画出其幅度谱。

(1) 计算两组信号的 64 点 DFT;

(2) 将每组信号都取为 64 点抽样, 在其尾部都补 64 个零值点, 并作 128 点的 DFT;

(3) 将每组信号都取为 128 点抽样值, 并作 128 点 DFT。

求以上三种情况下, 频率分辨率及计算的频率间隔是多少? 并请分别加以分析讨论。

$$3.38 \text{ 设 } x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2) + 3\delta(n-3), h(n) = 2\delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$\text{试利用矩阵法求 } y_l(n) = x(n) * h(n), y(n) = x(n) \textcircled{4} h(n)$$

试讨论如何直接由线性卷积 $y_l(n)$ 求得圆周卷积 $y(n)$, 如果利用圆周卷积来求线性卷积, 又应该如何?

3.39 已知一个模拟信号为

$$x(t) = \sin(180\pi t) + \sin(260\pi t) + \sin(400\pi t)$$

用 $f_s = 600\text{Hz}$ 对 $x(t)$ 抽样, 取其长度为 $N=64$ 点, 得到序列 $x(n)$ 。

(1) 作 $x(n)$ 的 64 点 DFT, 并画出频谱幅度 $|X(k)|, k=0, 1, \dots, 63$ (采用 MATLAB 方法)

(2) 讨论 $|X(k)|$ 中与 $x(t)$ 有关的各个频谱值, 并说明这些值代表的意义。

3.40 设 $x(n) = \cos(5\pi n/9)$, 抽样频率为 $f_s = 10\text{kHz}$, 且有 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, N 点, 将 $x(n)$ 的数字频率用 ω_o 表示, 其模拟频率用 f_o 表示, 先求出 f_o 及 ω_o 。

(1) 当要求 $|X(k)|$ 的峰值所对应的 f_k 相对于 f_o 的误差不大于 12Hz 时, 所需 N 的最小值是多少? 要 N 为 2 的幂。

(2) 当 N 等于 (1) 中所确定的值时, 求 $|X(k)|$ 的峰值处的 k 值。

3.41 计算以下序列的 N 点 DFT, 在 $0 \leq n \leq N-1$ 内, 序列为

$$(1) x(n) = 1$$

$$(5) x(n) = \cos(\omega_0 n) \cdot R_N(n)$$

$$(2) x(n) = \delta(n)$$

$$(6) x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) \cdot R_N(n), 0 < m < N$$

$$(3) x(n) = e^{j\omega_0 n} R_N(n)$$

$$(7) x(n) = R_m(n), 0 < m < N$$

$$(4) x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}mn} R_N(n), 0 < m < N$$

3.42 已知 $X(k)$ 如下, 求 $x(n) = \text{IDFT}[X(k)]$, N 点

$$X(k) = \begin{cases} -jNe^{j\theta}/2, & k = m \\ jNe^{-j\theta}/2, & k = N - m \\ 0, & \text{其他 } k \end{cases}$$

式中 m 满足 $0 < m < N/2$ 。

3.43 设 $x(n)$ 为有限长序列, $0 \leq n \leq N-1, X(k) = \text{DFT}[x(n)], 0 \leq k \leq N-1$, 若

$$y(n) = x((n))_N R_{rN}(n), \quad r \text{ 为正整数}$$

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)], \quad 0 \leq k \leq rN - 1$$

试用 $X(k)$ 表示 $Y(k)$ 。

3.44 设有限长 N 点序列 $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, 若

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad N \text{ 点}$$

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)], \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

试用 $X(k)$ 表示 $Y(k)$ 。

3.45 有限长序列 $x(n)$ 的 DFT, 就相当于 $x(n)$ 的 z 变换在单位圆上的等间隔角的抽样。例如 8 点序列的 8 点离散傅里叶变换就相当于 $X(z)$ 在单位圆的 8 个等间隔点上的抽样, 其 z 平面的抽样点如图 P3.45(a) 所示。如果希望在 $|z|=1/2$ 的圆上(如图 P3.45(b)所示)另一种 8 个等间隔点上, 对 $X(z)$ 抽样, 即

$$X(z) \big|_{z=0.5e^{j[2\pi k/8+\pi/8]}}$$

试指出其等效的 $x_1(n)$ 的表达式, 使得 $x_1(n)$ 的 DFT 相当于上述的 $|z|=1/2$ 的圆上对 $X(z)$ 的抽样。

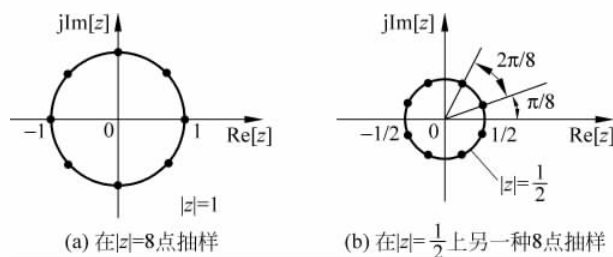


图 P3.45

3.46 已知 $X(k)$ 是 $2N$ 点实序列 $x(n)$ 的 $2N$ 点 DFT, 试用一个 N 点 IDFT 求 $2N$ 点的实序列 $x(n)$ 。