

实验 31 扭摆法测量材料的切变模量

材料在弹性限度内应力与应变的比值是度量物体受力时形变大小的重要参量。正应力与线应变的比值,称为杨氏模量;剪应力与剪应变的比值,称为剪切弹性模量,简称切变模量。与杨氏模量相似,切变模量在机械、建筑、交通、医疗、通信等工业领域的工程设计及机械材料选用中有着广泛的应用。从机械转轴、机械与部件的连接直至建筑物抗震等性能都与切变模量有关。

一、实验目的

用扭摆法测量琴钢丝及黄铜丝的切变模量,了解测量材料切变模量的基本方法。

二、实验仪器

(一) 仪器装置简图

实验仪器装置简图如 31-1 所示。

(二) 仪器使用方法

1. 取下仪器上端夹头,并把它拧松,将钢丝一端插入夹头孔中,然后把夹头拧紧。用同样的方法,把钢丝的下端固定在爪手的夹头上。

2. 转动上端的“扭动旋钮”9 使爪手一端的铷铁硼小磁钢 5 对准固定在立柱上的霍耳开关 4。同时调整霍耳开关的位置,使之高度与小磁钢一致。

3. 调节立柱的两个底脚螺钉,使小磁钢靠近霍耳开关,并使它们之间相距为 8 mm 左右。

4. 转动横梁上的“标志旋钮”8,使它的刻线与“扭动旋钮”9 上的刻线相一致。当旋转“扭动旋钮”9 一个角度后,即刻又恢复到起始位置。此时爪手将绕钢丝摆动。

5. 爪手有多种功能。圆环可水平放在爪手上面振动,也可以垂直装在爪手下面振动。爪手还可以安置方柱形棒或圆柱形棒作振动,以测得不同的周期值,并求出钢丝材料的切变模量或刚体的转动惯量。

(三) 数字式计数计时仪的使用

1. 开启电源开关,使仪器预热 10 min。

2. 按上升键,可预置计数值。

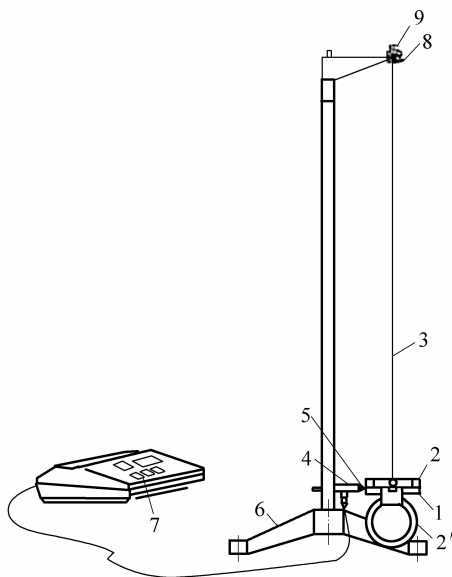


图 31-1 切变模量与转动惯量实验仪简图

- 1—爪手；2—环状刚体；2'—环状刚体垂直和水平两种状态放置；
3—待测材料；4—霍耳开关；5—铷铁硼小磁钢；
6—底座；7—数字式计数计时仪；8—标志旋钮；9—扭动旋钮

3. 使爪手作扭转振动。当铷铁硼小磁钢靠近霍耳开关约 1.0 cm 距离时,霍耳开关将导通,即产生计时触发脉冲信号。

4. 数字式计数计时仪有延时功能。当扭摆作第一周期振动时,将不计时,计数为 0。当计数显示 1 时,才显示计时半个周期。

5. 计数计时结束,可读出由于爪手振动在霍耳开关上产生计时脉冲的计数值和总时间,其中计数两次为一个周期。要查阅每半个周期时间,只要按一次下降键▼即可。

三、实验原理

设有某一弹性固体的长方体体积元,它的底面固定,如图 31-2 所示。在它顶面 A 上作用着一个与平面平行而且均匀分布的切力 F ,在这个力作用下,两个侧面将转过一定角度,通常称这样一种弹性形变为切变。在切变角比较小的情况下,作用在单位面积上的切力 F/A 与切变角 α 成正比:

$$\frac{F}{A} = G\alpha \quad (31-1)$$

式中, A 为受切力的面积; α 为切变角; G 是一个物质常数,称切变模量,单位为 N/m^2 。大多数材料的切变模量约是杨氏模量的 $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}$ 。由式(31-1)可知, G 值大,表示该材料在受外力作用时,其切变角小。在实验中,待测样品对象是一根上下均匀而细长的钢丝或铜丝,从几何上说,就是一个细长圆柱体,如图 31-3 所示。设圆柱体的半径为 R ,高为 L ,其上端固定,下端面受到一个外加扭转力矩的作用,即沿着圆面上各点的切向施加外力,于是圆柱体中各

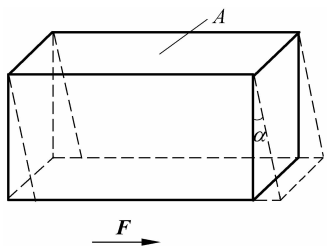


图 31-2 切应力与切变角

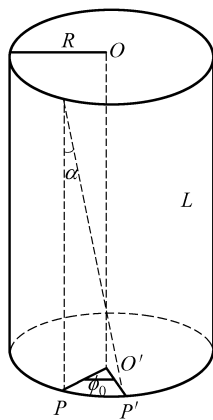


图 31-3 扭转力矩与扭转角

体积元(取半径为 r 、厚为 dr 的圆环状柱体为体积元)均发生切应变。总的效果是圆柱体下端面绕中心轴线 OO' 扭转了一个 ϕ_0 角,也即底周上的 P 点转至 P' 位置。因为圆柱体很长,各体积元均能满足 $\alpha \ll 1^\circ$ 的条件,利用关系式 $\alpha = R\phi_0$ 及式(31-1),通过积分可求得如下关系式:

$$M_{\text{外}} = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \phi_0 \quad (31-2)$$

其中 $M_{\text{外}}$ 为外力矩。设圆柱体内部的反向弹性力矩为 M_0 ,在平衡时则有 $M_0 = -M_{\text{外}}$,可见 $M_0 = -\frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \phi_0$; 令 $D = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L}$, 则有

$$M_0 = -D\phi_0 \quad (31-3)$$

对于一定的物体(如上述钢丝), D 是常数,称为扭转系数。扭摆的结构如图 31-4 所示,爪手及圆环安放位置如图 31-5 所示。若使爪手绕中心轴转过某一角度 ϕ_0 , 然后放开,则爪手将在钢丝(或铜丝)弹性扭转力矩作用下作周期性的自由振动,这就构成了一个扭摆。

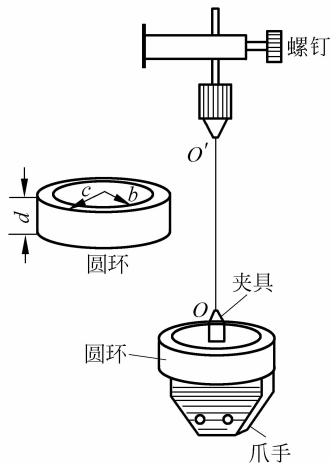


图 31-4 扭摆的结构

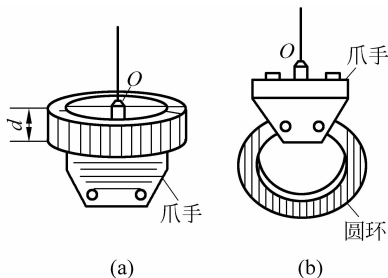


图 31-5 爪手与圆环的安放位置

如钢丝(或铜丝)在扭转振动中的角位移以 ϕ 表示,若爪手整个装置对其中心轴的转动惯量为 J_0 ,根据转动定律则有

$$-D\phi = J_0 \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

即

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{D}{J_0}\phi = 0$$

此方程是一个常见的简谐振动微分方程,它的振动周期应是

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{D}} \quad (31-4)$$

如图 31-5 所示,将一个已知内外径、厚度和质量的环状刚体分别水平放在爪手上及垂直放在爪手上,绕同一轴(钢丝)转动测得的振动周期分别为 T_1 和 T_2 。而环状刚体在绕轴(钢丝)作水平振动时转动惯量为 J_1 ,环状刚体处于垂直状态绕同一轴作振动时转动惯量为 J_2 ,爪手绕轴振动时的转动惯量为 J_0 ,那么由式(31-4)可知

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{D}(J_0 + J_1), \quad T_2^2 = \frac{4\pi^2}{D}(J_0 + J_2)$$

将此两式相减可消去 J_0 得

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2}{D}(J_1 - J_2) \quad (31-5)$$

而 $D = \frac{\pi}{2}G\frac{R^4}{L}$,所以式(31-5)可写成切变模量 G 为

$$G = \frac{8\pi L}{R^4} \cdot \frac{J_1 - J_2}{T_1^2 - T_2^2} \quad (31-6)$$

由理论推导可知,环状刚体绕中心轴作水平振动的转动惯量 J_1 为

$$J_1 = M\frac{b^2 + c^2}{2} \quad (31-7)$$

式中, b 为环的内径; c 为环的外径; M 为环的质量。而环状刚体处于垂直方向绕同一轴振动的转动惯量 J_2 为

$$J_2 = M\left(\frac{b^2 + c^2}{4} + \frac{d^2}{12}\right) \quad (31-8)$$

式中, d 为环状刚体的厚度。

1. 转动惯量的平行轴定理

理论分析证明,若质量为 M 的物体绕质心轴的转动惯量为 J_0 ,若转轴平行移动距离为 x 时,则物体对新轴的转动惯量为

$$J = J_0 + Mx^2 \quad (31-9)$$

2. 转动惯量的垂直轴定理

若已知一块薄板(或薄环)绕位于板(或环)上相互垂直轴(x 轴和 y 轴)的转动惯量为 J_x 和 J_y ,则薄板(或环)绕 z 轴的转动惯量为

$$J_z = J_x + J_y \quad (31-10)$$

此即垂直轴定理。由此定理可知:圆盘(或环)通过中心且垂直盘面的转轴的转动惯量为圆盘绕其直径的转动惯量的两倍。

四、实验内容：测量琴钢丝的切变模量

1. 用物理天平或电子天平称圆环的质量；用游标卡尺测圆环内径 b 、外径 c 和高度 d ；用千分尺测量钢丝直径 $2R$ 。

2. 在爪盘上端将钢丝夹紧，夹紧支点为 O ；钢丝上端通过夹具固定在支架上（支点为 O' ），使爪盘悬起。用米尺测量钢丝 OO' 间距 L 。

3. 由于钢丝很长，容易满足 $\alpha \ll 1^\circ$ 的条件，实验时扭摆自由振动时的角振幅 ϕ_0 可以取很大，例如 2π 等。将环状刚体水平放置在爪手上，用手转上夹具某一角度，再回到原来位置，使爪手与水平环作周期振动。用霍耳开关计数计时仪和秒表两种方法，测量爪手加水平环时刚体振动周期 T_1 。

4. 同样用霍耳开关计数计时仪和秒表计时，测量爪手加垂直环时刚体振动周期 T_2 。

5. 计算钢丝的切变模量 G 。并将秒表测量结果和霍耳开关计数计时仪测量的结果进行比较。

五、实验注意事项

1. 用秒表计时测量周期数应大于 50 次振动时间，然后求出周期值。这样可以减少手控秒表引入的随机误差。

2. 用霍耳开关计数计时仪测量扭摆振动周期，注意扭摆应只作扭转振动，爪手等不可作左右或前后晃动。

3. 霍耳开关计数计时仪可查阅每次振动半个周期数值，以了解扭摆振动受空气阻力而振幅衰减情况，并确定最佳计时振动次数。

4. 实验前应先调节仪器底座螺钉，此时爪手侧面上的铷铁硼磁钢与柱上的霍耳开关的距离约为 8 mm（霍耳开关截止和导通最佳距离），此时仪器指示灯为灭状态。

5. 霍耳开关计数计时仪应预热 10 min 左右后再开始计时。

6. 切勿用手将爪手托起又突然放下，铁制爪手自由下落时的冲力易将钢丝或铜丝拉断。实验结束应将环放在桌上，以减轻钢丝负重。

六、思考题

1. 如果扭摆的角振幅为 2π ，根据钢丝的长度和直径估算一下实验是否满足 $\alpha \ll 1^\circ$ 的条件？（对于圆柱表面层， $PP'/L = \alpha$ 。）

2. 同一个环状刚体绕不同轴转动其转动惯量为何不同？

3. 由式(31-6)各直接测量的不确定度分析用扭摆测量材料的切变模量主要误差是由哪些量测量引起的？

4. 如何用本扭摆测量其他形状刚体的转动惯量？

参考文献

[1] 贾玉润,王公冶,凌佩玲.大学物理实验[M].上海:复旦大学出版社,1987.

[2] 丁慎训,张连芳.物理实验教程[M].2版.北京:清华大学出版社,2002.

[3] [德]威廉·卫斯特伐尔.物理实验[M].王福山,译.上海:上海科学技术出版社,1981.

实验拓展：根据所测琴钢丝的切变模量测定物体的转动惯量

一、实验目的

用扭摆法测量各种形状刚体绕同一轴以及同一刚体绕不同轴的转动惯量,加深对转动惯量的概念及测量方法的理解。

二、实验原理

由测得的琴钢丝的切变模量 G ,以及钢丝的半径 R 和长度 L ,可算得其扭转系数 $D = \frac{\pi}{2} G \cdot \frac{R^4}{L}$,于是通过测量爪手装置对其中心轴的转动惯量 $J_0 = \frac{D}{4\pi^2} T_0^2$ 和放上待测物体后整个装置对扭转中心轴的转动惯量 $J + J_0 = \frac{D}{4\pi^2} T^2$,即可算出待测物体对扭转中心轴的转动惯量 $J = \frac{D}{4\pi^2} (T^2 - T_0^2)$ 。

三、实验内容

1. 用扭摆法测量方柱状刚体或圆柱状刚体绕钢丝轴的转动惯量,并与理论值进行比较。
2. 用两个小钢球分别放在爪手上面两端,验证平行轴定理。
3. 分别测量环形刚体水平放置和竖直放置时绕琴钢丝轴的转动惯量,验证垂直轴定理。

实验 32 玻尔共振实验

在机械制造和建筑工程等科技领域中受迫振动所导致的共振现象引起了工程技术人员的极大注意,它虽有破坏作用,但也有许多实用价值。众多电声器件就是运用共振原理设计制作的。此外,在微观科学研究中“共振”也是一种重要研究手段,例如利用核磁共振和顺磁共振研究物质结构等。

表征受迫振动性质的是受迫振动的振幅-频率特性和相位-频率特性(简称幅频和相频特性)。

本实验中采用玻尔共振仪定量测定机械受迫振动的幅频特性和相频特性,并利用频闪方法来测定动态的物理量——相位差。数据处理与误差分析方面内容也较丰富。

一、实验目的

1. 研究玻尔共振仪中弹性摆轮受迫振动的幅频特性和相频特性。
2. 研究不同阻尼力矩对受迫振动的影响,观察共振现象。
3. 学习用频闪法测定运动物体的某些量,例如相位差。
4. 学习系统误差的修正。

二、实验仪器

ZKY-BG 型玻尔共振仪由振动仪与电器控制箱两部分组成。振动仪部分如图 32-1 所示,铜质圆形摆轮 A 安装在机架上,弹簧 B 的一端与摆轮 A 的轴相连,另一端可固定在机架支柱上,在弹簧弹性力的作用下,摆轮可绕轴自由往复摆动。在摆轮的外围有一圈槽形缺口,其中一个长形凹槽 C 比其他凹槽长出许多。机架上对准长形缺口处有一个光电门 H,它与电器控制箱相连接,用来测量摆轮的振幅角度值和摆轮的振动周期。在机架下方有一对带有铁芯的线圈 K,摆轮 A 恰巧嵌在铁芯的空隙,当线圈中通过直流电流后,摆轮受到一个电磁阻尼力的作用。改变电流的大小即可使阻尼大小相应变化。为使摆轮 A 作受迫振动,在电动机轴上装有偏心轮,通过连杆机构 E 带动摆轮。在电动机轴上装有带刻线的有机玻璃转盘 F,它随电机一起转动。由它可以从角度读数盘 G 读出相位差 φ 。调节控制箱上的十圈电机转速调节旋钮,可以精确改变加于电机上的电压,使电机的转速在实验范围 (30~45 r/min) 内连续可调。由于电路中采用特殊稳速装置,电动机采用惯性很小的带有测速发电机的特种电机,所以转速极为稳定。电机的有机玻璃转盘 F 上装有两个挡光片。在角度读数盘 G 中央上方 90° 处也有光电门 I (强迫力矩信号),并与控制箱相连,以测量强迫力矩的周期。

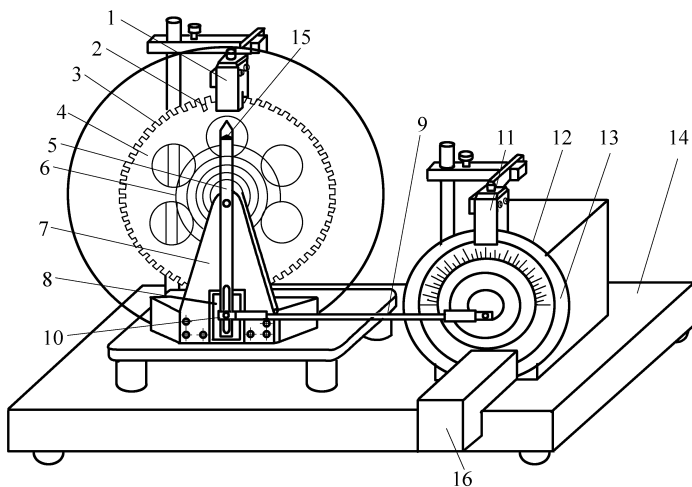


图 32-1 玻尔振动仪

- 1—光电门 H; 2—长形凹槽 C; 3—短形凹槽 D; 4—铜质摆轮 A; 5—摇杆 M; 6—蜗卷弹簧 B;
7—支撑架; 8—阻尼线圈 K; 9—连杆 E; 10—摇杆调节螺钉; 11—光电门 I; 12—角度盘 G;
13—有机玻璃转盘 F; 14—底座; 15—弹簧夹持螺钉 L; 16—闪光灯

受迫振动时摆轮与外力矩的相位差是利用小型闪光灯来测量的。闪光灯受摆轮信号光电门控制,每当摆轮上长形凹槽 C 通过平衡位置时,光电门 H 接收光,引起闪光,这一现象称为频闪现象。在稳定情况时,在闪光灯照射下可以看到有机玻璃指针 F 好像一直“停在”某一刻度处,所以此数值可方便地直接读出,误差不大于 2°。闪光灯放置位置如图 32-2 所示搁置在底座上,切勿拿在手中直接照射刻度盘。

摆轮振幅是利用光电门 H 测出摆轮读数 A 处圈上凹形缺口个数,并在控制箱液晶显

示器上直接显示出此值,精度为 1° 。

玻尔共振仪电器控制箱的前面板和后面板分别如图 32-2 和图 32-3 所示。

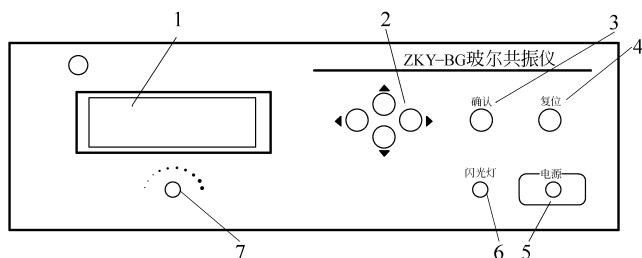


图 32-2 玻尔共振仪电器控制箱的前面板示意图

1—液晶显示屏幕; 2—方向控制键; 3—确认按键; 4—复位按键;
5—电源开关; 6—闪光灯开关; 7—强迫力周期调节电位器

电机转速调节旋钮,系带有刻度的十圈电位器,调节此旋钮时可以精确改变电机转速,即改变强迫力矩的周期。锁定开关处于图 32-4 所示的位置时,电位器刻度锁定,要调节大小须将其置于该位置的另一边。 $\times 0.1$ 挡旋转一圈, $\times 1$ 挡走一个字。一般调节刻度仅供实验时作参考,以便大致确定强迫力矩周期值在多圈电位器上的相应位置。

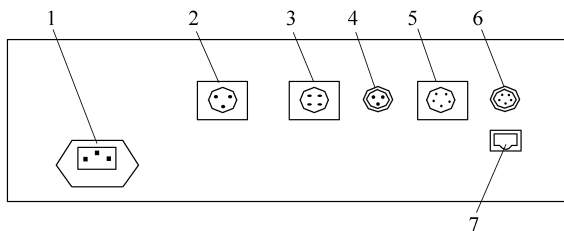


图 32-3 玻尔共振仪电器控制箱的后面板示意图

1—电源插座(带保险); 2—闪光灯接口; 3—阻尼线圈;
4—电机接口; 5—振幅输入; 6—周期输入; 7—通信接口

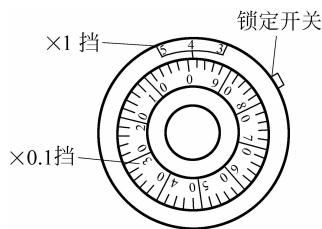


图 32-4 电机转速调节电位器

可以通过软件控制阻尼线圈内直流电流的大小,达到改变摆轮系统的阻尼系数的目的。阻尼挡位的选择通过软件控制,共分 3 挡,分别是“阻尼 1”“阻尼 2”“阻尼 3”。阻尼电流由恒流源提供,实验时根据不同情况进行选择(可先选择在“阻尼 2”处,若共振时振幅太小则可改用“阻尼 1”),振幅在 150° 左右。

闪光灯开关用来控制闪光与否,当按住闪光按钮、摆轮长缺口通过平衡位置时便产生闪光,由于频闪现象,可从相位差读盘上看到刻度线似乎静止不动的读数(实际有机玻璃转盘 F 上的刻度线一直在匀速转动),从而读出相位差数值。为使闪光灯管不易损坏,采用按钮开关,仅在测量相位差时才按下按钮。

电器控制箱与闪光灯和玻尔共振仪之间通过各种专业电缆相连接,不会产生接线错误的弊病。

三、实验原理

物体在周期外力的持续作用下发生的振动称为受迫振动,这种周期性的外力称为强迫力。如果外力是按简谐振动规律变化,那么稳定状态时的受迫振动也是简谐振动,此时,振幅保持恒定,振幅的大小与强迫力的频率和原振动系统无阻尼时的固有振动频率以及阻尼系数有关。在受迫振动状态下,系统除了受到强迫力的作用外,同时还受到回复力和阻尼力的作用。所以在稳定状态时物体的位移、速度变化与强迫力变化不是同相位的,存在一个相位差。当强迫力频率与系统的固有频率相同时产生共振,此时振幅最大,相位差为 90° 。

实验采用摆轮在弹性力矩作用下自由摆动,在电磁阻尼力矩作用下作受迫振动来研究受迫振动特性,可直观地显示机械振动中的一些物理现象。

当摆轮受到周期性强迫外力矩 $M=M_0 \cos \omega t$ 的作用,并在有空气阻尼和电磁阻尼的媒介中运动时(阻尼力矩为 $-b \frac{d\theta}{dt}$),其运动方程为

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -k\theta - b \frac{d\theta}{dt} + M_0 \cos \omega t \quad (32-1)$$

式中, J 为摆轮的转动惯量; $-k\theta$ 为弹性力矩; M_0 为强迫力矩的幅值; ω 为强迫力的圆频率。

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{J}$, $2\beta = \frac{b}{J}$, $m = \frac{M_0}{J}$, 则式(32-1)变为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = m \cos \omega t \quad (32-2)$$

当 $m \cos \omega t = 0$ 时,式(32-2)即为阻尼振动方程。

当 $\beta = 0$, 即在无阻尼情况时式(32-2)变为简谐振动方程,系统的固有频率为 ω_0 。方程(32-2)的通解为

$$\theta = \theta_1 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \alpha) + \theta_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (32-3)$$

由式(32-3)可见,受迫振动可分成以下两部分。

第一部分, $\theta = \theta_1 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \alpha)$ 和初始条件有关,经过一定时间后衰减消失。

第二部分,说明强迫力矩对摆轮做功,向振动体传送能量,最后达到一个稳定的振动状态。振幅为

$$\theta_2 = \frac{m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (32-4)$$

它与强迫力矩之间的相位差为

$$\varphi = \arctan \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \arctan \frac{\beta T_0^2 T}{\pi(T^2 - T_0^2)} \quad (32-5)$$

由式(32-4)和式(32-5)可以看出,振幅 θ_2 与相位差 φ 的数值取决于强迫力矩 m 、频率 ω 、系统的固有频率 ω_0 和阻尼系数 β 四个因素,而与振动初始状态无关。

由 $\frac{\partial}{\partial \omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2] = 0$ 的极值条件可得出,当强迫力的圆频率 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时,产生共振, θ 有极大值。若共振时圆频率和振幅分别用 ω_r 、 θ_r 表示,则

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (32-6)$$

$$\theta_r = \frac{m}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \quad (32-7)$$

式(32-6)和式(32-7)表明,阻尼系数 β 越小,共振时圆频率越接近于系统固有频率,振幅 θ_r 也越大。图32-5和图32-6表示出在不同 β 时受迫振动的幅频特性和相频特性。

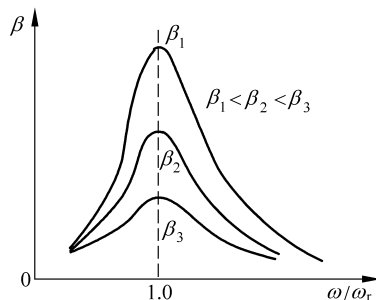


图 32-5 幅频特性

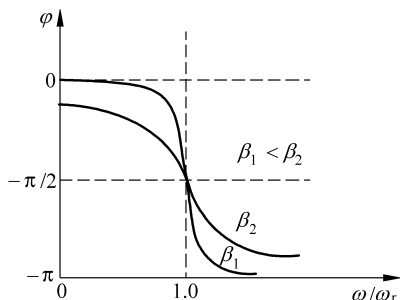


图 32-6 相频特性

四、实验内容与步骤

1. 实验准备

按下电源开关后,屏幕上出现欢迎界面,其中 No. 0000X 为电器控制箱与电脑主机相连的编号。过几秒钟后屏幕上显示如图32-7(a)所示的“按键说明”字样。符号“◀”为向左移动;“▶”为向右移动;“▲”为向上移动;“▼”为向下移动。下文中的此类符号不再介绍。

注意: 为保证使用安全,三芯电源线须可靠接地。

2. 选择实验方式: 根据是否连接电脑选择“联网模式”或“单机模式”。这两种方式下的操作完全相同,故不再重复介绍。

3. 自由振荡——摆轮振幅 θ 与系统固有周期 T_0 的对应值的测量。

自由振荡实验的目的,是为了测量摆轮的振幅 θ 与系统固有振动周期 T_0 的关系。

在图32-7(a)状态中按确认键,显示如图32-7(b)所示的实验类型,默认选中项为“自由振荡”,字体加灰底为选中。再按确认键,显示如图32-7(c)所示。

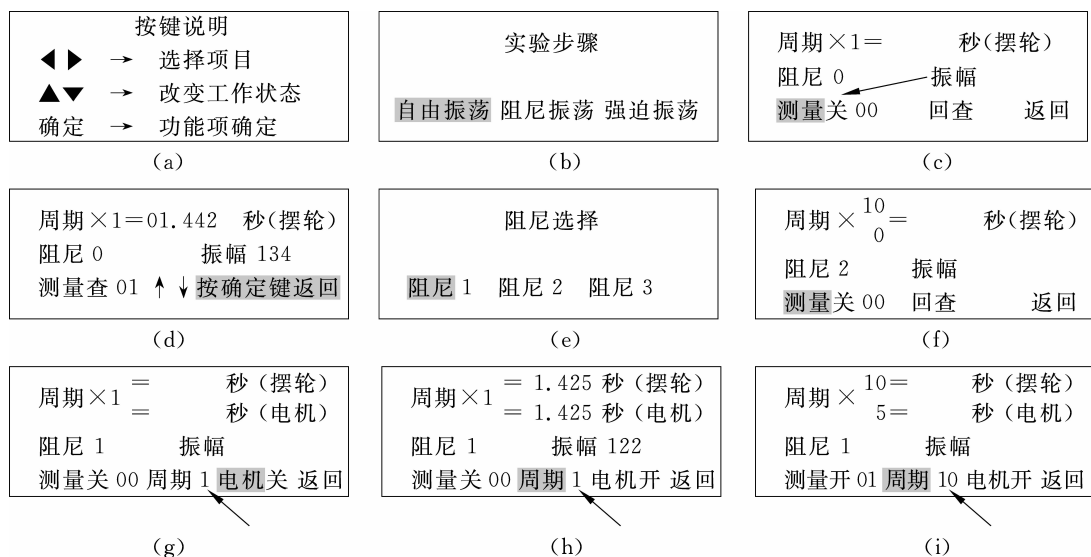


图 32-7 仪器屏幕显示