第3章

几　何

3.1　平面图形

【知识要点】

一、三角形

1. 三角形的各元素

如图 3-1-1，在三角形 ABC 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 称为三角形 ABC 的三个**内角**，角 α，β，γ 称为三角形 ABC 的三个**外角**；AB，BC，AC 称为三角形 ABC 的三条**边**，作 $AD\perp BC$，垂足为 D，AD 称为三角形 ABC 的边 BC 上的**高**；设 AB，BC，AC 的中点分别为 E，F，H，AF，BH，CE 称为三角形 ABC 的三条**中线**，EF，FH，EH 称为三角形 ABC 的三条**中位线**. 三角形 ABC 也可记作$\triangle ABC$.

2. 三角形的基本性质

(1) 三角形的任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边.

(2) 三角形的三个内角之和为 180°(或为 π).

(3) 三角形中大边对大角，大角对大边，即$\angle B>\angle C\Leftrightarrow AC>AB$.

(4) 三角形的每一个外角都等于与它不相邻的两个内角之和.

(5) 如图 3-1-2，三角形的三条中线 AF，BH，CE 交于一点 G，点 G 称为三角形的**重心**，重心将每条中线分割成 2∶1 的比例(例如重心 G 将中线 AF 分成 AG∶GF＝2∶1).

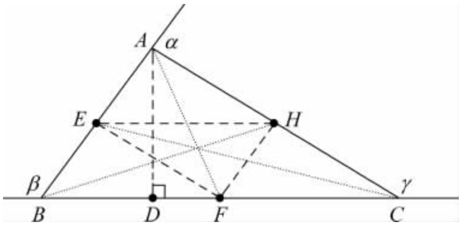

图　3-1-1

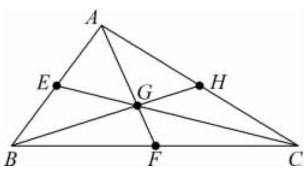

图　3-1-2

(6) 三角形的三条高交于一点，该交点称为三角形的**垂心**.

(7) 三角形的三个内角的角平分线交于一点，该交点称为三角形的**内心**，内心是三角形的内切圆圆心.

(8) 三角形三条边的垂直平分线交于一点，该交点称为三角形的**外心**，外心是三角形的外接圆圆心.

(9) 三角形的每一条中位线都平行于它下方的边并等于该边长的一半.

(10) 在$\triangle ABC$中(如图3-1-1)，设$AB=c,BC=a,AC=b,AD=h$，则$\triangle ABC$的面积为

$$S=\frac{1}{2}ah=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad 其中\quad 2p=a+b+c 是\triangle ABC 的周长.$$

3. 几种特殊三角形

(1) 直角三角形及其性质

有一个内角为$90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$的三角形称为**直角三角形**.

如图3-1-3，设$\angle C=90^\circ=\frac{\pi}{2}$，$\angle A,\angle B,\angle C$所对的边长分别为$a,b,c$，斜边$AB$上的高为$h$，则

$$\angle A+\angle B=\frac{\pi}{2},\quad c^2=a^2+b^2,\quad ab=ch,$$

且斜边AB上的中线CE满足$CE=\frac{1}{2}AB$.

特别地，在直角三角形ABC中($\angle C=90^\circ$)，如果$\angle A=30^\circ$，那么

$$BC=\frac{1}{2}AB,\quad AC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB.$$

(2) 等腰三角形及其性质

有两条边相等的三角形称为**等腰三角形**.

如图3-1-4，设$AB=AC$(称为等腰三角形ABC的**腰**)，则$\angle B=\angle C$(称为等腰三角形ABC的**底角**，$\angle A$称为**顶角**).

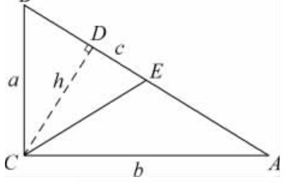

图 3-1-3

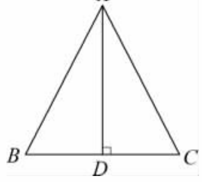

图 3-1-4

两腰AB,AC上的中线相等；两腰AB,AC上的高相等；两底角$\angle B,\angle C$的角平分线相等；底边BC上的高AD垂直平分底边BC；底边BC上的高AD是顶角$\angle A$的角平分线.

特别地，在等腰三角形$ABC(AB=AC)$中，如果$\angle A=90^\circ$，则称三角形ABC为**等腰直角三角形**，此时两底角为45°.

(3) 等边三角形及其性质

三条边都相等的三角形称为**等边三角形**,等边三角形又称为**正三角形**.

等边三角形的三个内角均为 $60°=\frac{\pi}{3}$;等边三角形的四心(重心、垂心、内心、外心)重合;等边三角形的边长与高之比为 $2:\sqrt{3}$.

4. 三角形的全等与相似

(1) 三角形的全等

如果两个三角形的三个内角都相等,而且相等的内角所对应的边也相等,则称这两个三角形**全等**,$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 全等记为 $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$.

如图 3-1-5,在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中,

如果 $AB=A_1B_1$,$BC=B_1C_1$,$AC=A_1C_1$,则 $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$;

如果 $AB=A_1B_1$,$BC=B_1C_1$,$\angle B=\angle B_1$,则 $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$;

如果 $AB=A_1B_1$,$\angle A=\angle A_1$,$\angle B=\angle B_1$,则 $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$.

(2) 三角形的相似

如果两个三角形的三条边对应成比例,则称这两个三角形**相似**,$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似记为 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$. 两个相似三角形的对应边之比称为**相似比**,相似三角形的面积之比等于其相似比的平方.

如图 3-1-6,在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中,

如果 $AB:A_1B_1=AC:A_1C_1$,$\angle A=\angle A_1$,则 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$;

如果 $\angle A=\angle A_1$,$\angle B=\angle B_1$,$\angle C=\angle C_1$,则 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

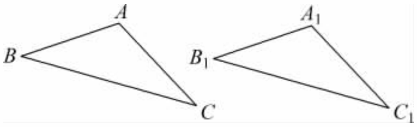

图 3-1-5

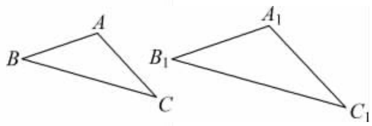

图 3-1-6

二、四边形

1. 平行四边形

两组对边都平行的四边形称为**平行四边形**. 在平行四边形中,两条平行的对边相等,两条对角线互相平分.

如图 3-1-7(a),平行四边形有如下性质:

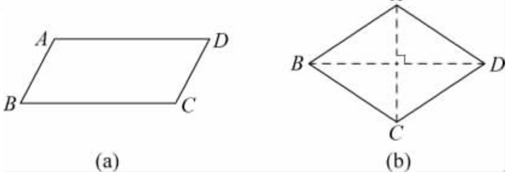

图 3-1-7

(1) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形的充分必要条件是 $AB=CD$,$AD=BC$.

(2) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形的充分必要条件是对角线 AC,BD 互相平分.

(3) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形的充分必要条件是 $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$.

注 平行四边形的面积等于一条边与该边上的高的乘积；平行四边形两条对角线长度的平方和等于四条边长度的平方和，即 $AC^2+BD^2=2(AB^2+BC^2)$.

特别地，四边相等的平行四边形称为**菱形**，如图 3-1-7(b)，菱形有如下性质：

(1) 四边形 $ABCD$ 是菱形的充分必要条件是对角线 AC，BD 互相垂直平分.

(2) 四边形 $ABCD$ 是菱形的充分必要条件是对角线 AC，BD 分别平分 $\angle A$，$\angle B$.

2. 矩形

矩形是特殊的平行四边形，如图 3-1-8(a)，在平行四边形 $ABCD$ 中，如果 $AB\perp BC$，则称平行四边形 $ABCD$ 为**矩形**，矩形的两条对角线是相等而且互相平分的.

正方形是特殊的菱形，如图 3-1-8(b)，在菱形 $ABCD$ 中，如果 $AB\perp BC$，则称菱形 $ABCD$ 为**正方形**，正方形的两条对角线是相等而且互相垂直平分的.

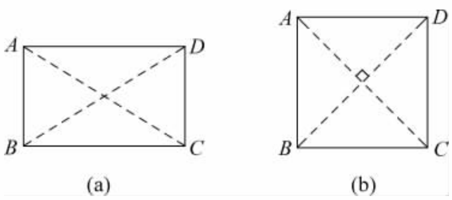

图 3-1-8

3. 梯形

有一组对边平行，而另一组对边不平行的四边形称为**梯形**，平行的对边称为梯形的**上底**、**下底**，不平行的对边称为梯形的**腰**.

如图 3-1-9(a)，在梯形 $ABCD$ 中，设 $AD/\!/BC$，作 $AE\perp BC$，垂足为 E，AE 称为梯形 $ABCD$ 的**高**，记 AB，CD 的中点分别为 F，H，FH 称为梯形 $ABCD$ 的**中位线**. 若 $AD=a$，$BC=b$，$AE=h$，则中位线 $FH=\frac{1}{2}(a+b)$，梯形的面积为 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$.

特别地，两腰相等的梯形称为**等腰梯形**，如图 3-1-9(b)，在等腰梯形 $ABCD$ 中($AD/\!/BC$)，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle C$，对角线 $AC=BD$.

4. 对角线垂直的四边形面积

如图 3-1-10，在四边形 $ABCD$ 中，如果对角线 $AC\perp BD$，则四边形 $ABCD$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$.

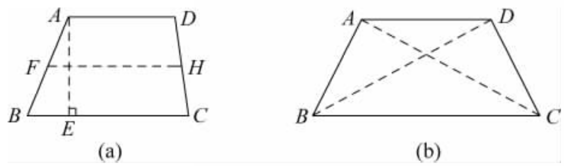

图 3-1-9

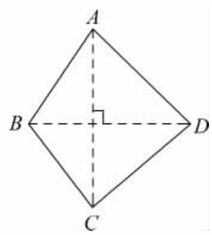

图 3-1-10

三、圆和扇形

1. 圆

半径为 R 的圆周长为 $l=2\pi R$,面积为 $S=\pi R^2$.

如图 3-1-11(a),设圆心为 O,A,B,C 为圆上任意三点,$\angle ABC$,$\angle BCA$,$\angle CAB$ 均称为**圆周角**;$\angle AOB$,$\angle BOC$,$\angle COA$ 均称为**圆心角**;线段 AB,BC,CA 均称为**弦**(过圆心的弦即为**直径**).

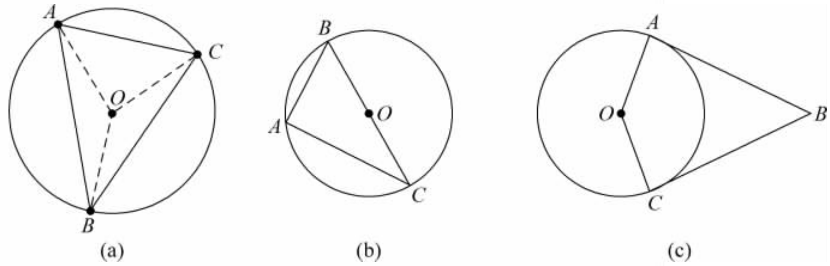

图 3-1-11

圆有如下性质:

(1) 同一段弧所对的圆心角是所对圆周角的两倍,如图 3-1-11(b)所示,$\angle AOC=2\angle ABC$.

(2) 圆的内接四边形的对角之和为 $180°(\pi)$.

(3) 直径所对的圆周角是直角,如图 3-1-11(b),$\angle BAC=90°=\frac{\pi}{2}$.

(4) 垂直于弦的直径平分此弦.

(5) 如果直线与圆相切(即直线与圆只有唯一的交点,称为**切点**),则过切点的半径与直线(称为**切线**)垂直,如图 3-1-11(c),$OA\perp AB$.

(6) 过圆外一点作圆的切线,两个切点到该点的距离相等,如图 3-1-11(c),$BA=BC$.

2. 扇形

如图 3-1-12,半径为 R,圆心角为 θ 的扇形弧长为 $l=R\theta$,面积为 $S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}Rl$.

四、同位角与内错角

如图 3-1-13(a),两条平行线与第三条直线相交,$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 称为**同位角**,$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 称为**内错角**. 同位角是相等的,内错角也是相等的,即 $\angle 1=\angle 2$,$\angle 2=\angle 3$.

如图 3-1-13(b),设 $AB/\!/CD/\!/EF$,则$\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}$.

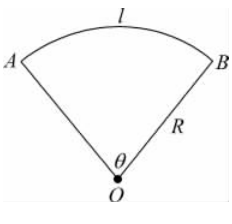

图 3-1-12

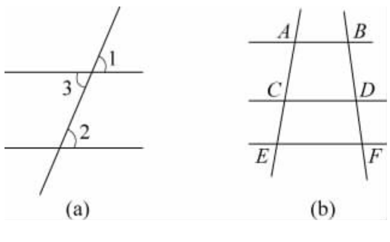

图 3-1-13

【典型例题】

一、问题求解

1. 长度问题

例 3.1.1 已知三角形的三边长为 4,5,7,则该三角形最短边上的高为

(A) $2\sqrt{2}$　　(B) 3

(C) $2\sqrt{3}$　　(D) 4

(E) $2\sqrt{6}$

答案 E.

解析 设该三角形最短边上的高为 h. 由题设可知三角形的周长为 $2p=16$,面积为

$$\sqrt{p(p-4)(p-5)(p-7)}=\sqrt{8\times4\times3\times1}=4\sqrt{6},$$

所以 $\frac{1}{2}\times4h=4\sqrt{6}$,求得 $h=2\sqrt{6}$.

故正确选项为 E.

例 3.1.2 在圆心为 O,半径为 15 的圆内有一点 P,若 $OP=12$,则在过 P 点的弦中,长度为整数的有

(A) 12 条　　(B) 13 条

(C) 24 条　　(D) 25 条

(E) 26 条

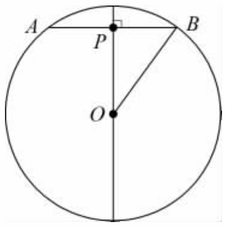

图 3-1-14

答案 C.

解析 如图 3-1-14 所示,过点 P 且与直径垂直的弦的长度是

$$AB=2PB=2\sqrt{OB^2-OP^2}=2\sqrt{15^2-12^2}=18,$$

AB 是过 P 点的弦中长度最短的.

由于直径是过 P 点的弦中最长的一条,直径的长度为 30,且从 18 到 30 共有 13 个整数. 在这 13 个整数中,除了 18 与 30 各对应一条弦外,根据对称性可知,其他 11 个整数每个都对应着过点 P 的 2 条弦,所以过点 P 的弦中长度为整数的共有 $2+2\times11=24$ 条.

故正确选项为 C.

例 3.1.3 如图 3-1-15 所示,AB 是半圆 O 的直径,AC 是弦. 若 $AB=6$,$\angle ACO=\frac{\pi}{6}$,则弧 BC 的长度为

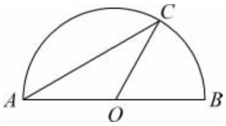

图 3-1-15

(A) 1　　(B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) π

(E) 2π

答案 D.

解析 因为$\triangle AOC$是等腰三角形，且$\angle ACO=\frac{\pi}{6}$，所以$\angle BOC=\angle ACO+\angle CAO=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

又因为圆的半径为3，所以弧BC的长度为$\frac{\pi}{3}\times 3=\pi$.

故正确选项为D.

例 3.1.4 若某人匀速地路过一盏路灯，则其头顶影子的移动速度

(A) 先逐渐变慢，后逐渐变快　　(B) 先逐渐变快，后逐渐变慢

(C) 是一常数且大于此人的速度　　(D) 等于此人行走的速度

(E) 是一常数且小于此人的速度

答案 C.

解析 如图3-1-16所示，l是路灯的高度，h是行人的身高.

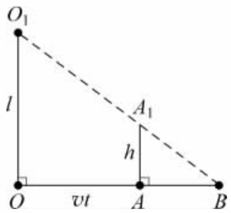

图 3-1-16

设行人的速度为v，根据对称性，假设行人在路灯下方O点的时刻为0时刻，行人从O点走到A点需要的时间是t，则$|OA|=vt$，此时头顶影子的位置在B点.

根据相似三角形的对应边成比例，得

$$\frac{|AB|}{|OB|}=\frac{|OB|-vt}{|OB|}=\frac{h}{l},$$

所以$|OB|=\frac{l}{l-h}vt$，即行人的影子点B的速度$\frac{|OB|}{t}$是大于v的常数$\frac{l}{l-h}v$.

故正确选项为C.

例 3.1.5 在$\triangle ABC$中，$AB=10$，$AC=8$，$BC=6$. 过点C以C到AB的距离为直径作一圆，该圆与AB有公共点D，且交AC于M，交BC于N，则$MN=$

(A) $3\frac{3}{4}$　　(B) $4\frac{4}{5}$

(C) $7\frac{1}{2}$　　(D) $13\frac{1}{3}$

(E) 6

答案 B.

解析 如图3-1-17所示，由题设可知，$\triangle ACB$是直角三角形，且$\angle MCN$是一个90°的圆周角，所以MN是圆的直径.

由于直径CD是直角三角形斜边上的高，所以

$$MN=CP=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{8\times 6}{10}=4\frac{4}{5}.$$

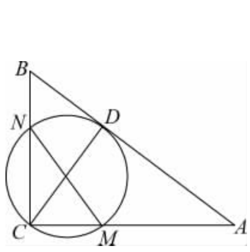

图 3-1-17

故正确选项为B.

例 3.1.6 在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$AC=3$，$\angle A=x$，该三角形BC边上的中线长是x的函数$y=f(x)$，则当x在$(0,\pi)$中变化时，函数$f(x)$取值的范围是

(A) $(1,3)$　　(B) $(1,4)$

(C) $(3,4)$　　(D) $(2,5)$

(E) $(0,5)$

答案　B.

解法 1　如图 3-1-18(a)所示，延长 AD 到 E，使得 $AE=2AD$，连结 BE，CE，则四边形 $ABEC$ 是平行四边形.

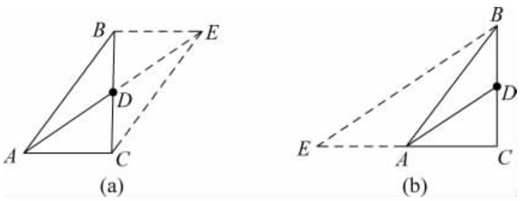

图　3-1-18

根据平行四边形对角线与边长的关系，得

$$(2AD)^2+BC^2=2(AB^2+AC^2),$$

即

$$AD^2=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2)-\frac{1}{4}BC^2=\frac{1}{2}(3^2+5^2)-\frac{1}{4}BC^2=17-\frac{1}{4}BC^2.$$

由三角形三边长的关系可知，$5-3<BC<5+3$，即 $2<BC<8$. 所以 $1<AD^2<16$，即 $1<AD<4$.

故正确选项为 B.

解法 2　如图 3-1-18(b)所示，延长 CA 到 E，使得 $AE=AC=3$，连结 EB，则 $EB=2AD=2f(x)$.

在$\triangle AEB$ 中，由三角形三边长的关系可知，

$$AB-AE<EB<AB+AE,\quad 即\quad 2<2f(x)<8.$$

故函数 $f(x)$取值的范围是$(1,4)$.

例 3.1.7　如图 3-1-19 所示，梯形 $ABCD$ 的上底与下底分别为 5，7，E 为 AC 与 BD 的交点，MN 过点 E 且平行于 AD. 则 $MN=$

(A) $\frac{26}{5}$　　(B) $\frac{11}{2}$

(C) $\frac{35}{6}$　　(D) $\frac{36}{7}$

(E) $\frac{40}{7}$

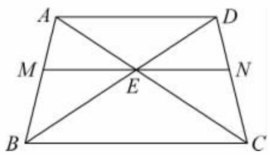

图　3-1-19

答案　C.

解析　如图 3-1-19 所示，易知$\triangle EAD$ 与$\triangle ECB$ 相似，所以$\frac{AE}{EC}=\frac{DE}{EB}=\frac{AD}{BC}=\frac{5}{7}$.

又因为$\triangle AME$ 与$\triangle ABC$ 相似，所以$\frac{ME}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{5}{12}$，于是 $ME=\frac{5}{12}BC=\frac{35}{12}$.

同理可求得 $NE=\frac{5}{12}BC=\frac{35}{12}$.

所以 $MN=ME+NE=\frac{35}{6}$.

故正确选项为 C.

2. 角度问题

例 3.1.8 如图 3-1-20，在直角△ABC 中，$\angle C$ 为直角，点 E 和 D，F 分别在直角边 AC 和斜边 AB 上，且 $AF=FE=ED=DC=CB$，则 $\angle A=$

(A) $\frac{\pi}{7}$　　(B) $\frac{\pi}{8}$

(C) $\frac{\pi}{9}$　　(D) $\frac{\pi}{10}$

(E) $\frac{\pi}{12}$

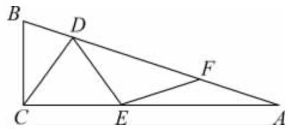

图 3-1-20

答案 D.

解析 如图 3-1-20 所示，由题设可知，△FAE，△EFD，△DEC，△CBD 都是等腰三角形. 根据三角形的外角等于不相邻的两个内角之和及等腰三角形的底角相等，可知

$$\angle EFD=2\angle A,\quad \angle EDF=2\angle A.$$

又 $\angle DEC$ 是△ADE 的一个外角，所以

$$\angle DEC=\angle A+\angle ADE=3\angle A,\quad \angle DCE=3\angle A.$$

因为 $\angle CDB$ 是△ADC 的一个外角，所以

$$\angle CDB=\angle A+\angle ACD=4\angle A,\quad \angle CBD=4\angle A.$$

在直角三角形中，因为 $\angle A+\angle B=\frac{\pi}{2}$ 且 $\angle B=4\angle A$，所以 $\angle A=\frac{\pi}{10}$.

故正确选项为 D.

例 3.1.9 如图 3-1-21，AB 是圆 O 的直径，CD 是圆 O 的切线，切点为 D. 若 $AB=2BC$，且 $BC=2$，则

(A) $CD=2\sqrt{3}$，$\angle DAB=30^\circ$　　(B) $CD=2\sqrt{2}$，$\angle DAB=30^\circ$

(C) $CD=2\sqrt{3}$，$\angle DAB=45^\circ$　　(D) $CD=2\sqrt{2}$，$\angle DAB=45^\circ$

(E) $CD=\sqrt{10}$，$\angle DAB=30^\circ$

答案 A.

解析 如图 3-1-22 所示，连结 OD，则 $OD\perp CD$，所以△ODC 是直角三角形.

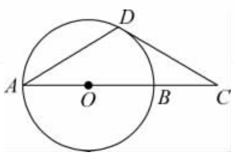

图 3-1-21

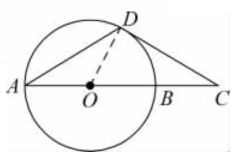

图 3-1-22

因为 $OD=2$，$OC=4$，所以 $CD=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

在直角△ODC 中，因为斜边 OC 是直角边 OD 的 2 倍，所以

$$\angle OCD=30^\circ,\quad \angle DOC=60^\circ.$$

因为圆周角$\angle DAB$与圆心角$\angle DOB$对的是同一段弧，所以

$$\angle DAB=\frac{1}{2}\angle DOB=\frac{1}{2}\angle DOC=30^\circ.$$

故正确选项为 A.

3. 面积问题

例 3.1.10 在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC,BD 垂直相交. 若 $AC=30,BD=36$，则四边形 $ABCD$ 的面积为

(A) 270　　(B) 540

(C) 720　　(D) 840

(E) 1080

答案 B.

解析 如图 3-1-23 所示，四边形 $ABCD$ 的面积等于$\triangle ABC$与$\triangle ADC$的面积之和，其值为

$$\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times30\times36=540.$$

故正确选项为 B.

例 3.1.11 半径为 R 的圆的内接正三角形面积是

(A) $\frac{1}{4}R^2$　　(B) $\frac{3}{4}R^2$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$　　(D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

(E) $\frac{3\sqrt{3}}{8}R^2$

答案 D.

解析 如图 3-1-24 所示，$\triangle ABC$ 是圆 O 的内接正三角形，$AD\perp BC$.

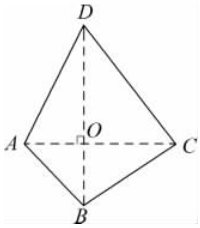

图 3-1-23

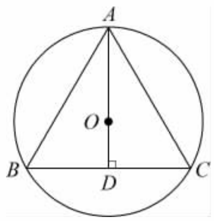

图 3-1-24

因为圆的内接正三角形的重心与圆心重合，由重心的性质得

$$AO=2OD=R,$$

所以 $AD=\frac{3R}{2}$. 于是 $BC=AC=\frac{2}{\sqrt{3}}AD=\sqrt{3}R$.

所以正三角形 ABC 面积为

$$\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}R\times\frac{3R}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

故正确选项为 D.