第3章 微分中值定理与导数应用

本章将以微分中值定理为基础，进一步介绍导数的应用，利用导数求一些函数的极限以及利用导数研究函数的性态，例如判断函数的单调性和凹凸性，求函数的极值、最值以及描绘函数的图形.

3.1 微分中值定理

3.1.1 罗尔定理

为了应用方便，先介绍费马(Fermat)引理.

费马引理 设函数 $f(x)$在 x_0 的某个邻域$U(x_0)$内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意的 $x_0\in U(x_0)$，有 $f(x)\leqslant f(x_0)$（或 $f(x)\geqslant f(x_0)$），那么

$$f'(x_0)=0.$$

证 不妨设 $x_0\in U(x_0)$时 $f(x)\leqslant f(x_0)$，对于 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$，有

$$f(x_0+\Delta x)\leqslant f(x_0).$$

由可导的条件及极限的保号性，得到

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0,$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

所以 $f'(x_0)=0$. ■

定理1（罗尔(Rolle)定理） 如果函数 $y=f(x)$满足：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导；

(3) 在区间两个端点处的函数值相等，即$f(a)=f(b)$，则在(a,b)内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

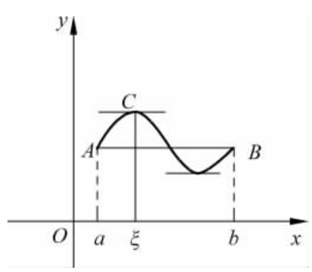

图 3-1

罗尔定理的几何意义 如图3-1所示，定理的条件表示，设函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上的图像是一条连续光滑的曲线，这条曲线在开区间(a,b)内每一点都存在不垂直于 x 轴的切线，且曲线两端点的高度相等，即 $f(a)=$

$f(b)$. 定理的结论表示，在曲线 $y=f(x)$ 上至少有一点 C，使曲线在点 C 处的切线是水平的.

从图 3-1 中可以发现，在曲线弧上的最高点或最低点处，曲线有水平切线，即 $f'(\xi)=0$，这就启发了我们证明这个定理的思路.

证 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，根据闭区间上连续函数的最大值和最小值定理，$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m. 分两种情况来讨论：

(1) 若 $M=m$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数，这时对任意的 $\xi\in(a,b)$，都有 $f'(\xi)=0$.

(2) 若 $M>m$，由 $f(a)=f(b)$ 知，M 和 m 中至少有一个不在区间端点 a 和 b 处取得. 不妨设 $M\neq f(a)$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=M$. 由费马引理知 $f'(\xi)=0$. ■

注：由罗尔定理易知，若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足定理的三个条件，则其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一个零点. 但要注意，在一般情况下，罗尔定理只给出了导函数的零点的存在性，通常这样的零点是不易具体求出的.

例 1 不求导数，判断函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导函数有几个零点及这些零点所在的范围.

解 因为 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$，所以 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$ 上满足罗尔定理的三个条件，所以，在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ_1，使 $f'(\xi_1)=0$，即 ξ_1 是 $f'(x)$ 的一个零点；在 $(2,3)$ 内也至少存在一点 ξ_2，使 $f'(\xi_2)=0$，即 ξ_2 是 $f'(x)$ 的一个零点；又在 $(3,4)$ 内至少存在一点 ξ_3，使 $f'(\xi_3)=0$，即 ξ_3 也是 $f'(x)$ 的一个零点. 因此，$f'(x)$ 至少有三个零点.

又因为 $f'(x)$ 为三次多项式，最多只能有三个零点，故 $f'(x)$ 恰好有三个零点，分别在区间 $(1,2)$、$(2,3)$ 和 $(3,4)$ 内.

例 2 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1 的正实根.

证 先证明存在性. 设 $f(x)=x^5-5x+1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(1)=-3$. 由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $x^5-5x+1=0$ 至少有一个小于 1 的正实根.

再证明唯一性. 用反证法，假设存在两点 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，且 $\xi_1\neq\xi_2$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$. 易见，函数 $f(x)$ 在以 ξ_1,ξ_2 为端点的区间上满足罗尔定理的条件，故至少存在一点 η（介于 ξ_1,ξ_2 之间），使得 $f'(\eta)=0$. 但

$$f'(x)=5(x^4-1)<0,\quad x\in(0,1),$$

产生矛盾，假设不成立. 故方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1 的正实根. ■

例 3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$. 求证：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

证 构造辅助函数 $F(x)=xf(x)$. 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理知，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $F'(\xi)=0$，即

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0,$$

故 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$. ■

3.1.2　拉格朗日中值定理

罗尔定理中 $f(a)=f(b)$这个条件是非常特殊的，它使罗尔定理的应用受到了限制，如果取消 $f(a)=f(b)$这个条件，但仍保留其余两个条件，便可得到在微分学中具有重要地位的拉格朗日中值定理.

定理 2（**拉格朗日(Lagrange)中值定理**）　如果函数 $y=f(x)$满足：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导，则在(a,b)内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a). \tag{3.1}$$

拉格朗日中值定理的几何意义　式(3.1)可改写为

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \tag{3.2}$$

如图 3-2 所示，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$为直线 AB 的斜率，而 $f'(\xi)$为曲线在点 C 处的切线的斜率. 因此，拉格朗日中值定理的几何意义是，在满足定理条件的情况下，曲线 $y=f(x)$上至少有一点 C，使曲线在点 C 处的切线平行于曲线两端点连线 AB.

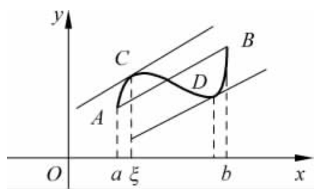

图　3-2

由此可见，罗尔定理是拉格朗日中值定理在 $f(a)=f(b)$时的特殊情形. 自然可以想到利用罗尔定理来证明拉格朗日中值定理. 为此我们设想构造一个与 $f(x)$有密切联系的辅助函数 $F(x)$，使 $F(x)$满足条件 $F(a)=F(b)$，对 $F(x)$应用罗尔定理，最后将对 $F(x)$所得的结论转化到 $f(x)$上，证得所要的结论. 事实上，因为直线 AB 的方程为 $y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，而曲线 $y=f(x)$与直线 AB 在端点 A,B 处相交，故若用曲线方程 $y=f(x)$与直线 AB 的方程的差做成一个新函数，则这个新函数在端点 A,B 处的函数值相等. 由此即可证明拉格朗日中值定理.

证　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right].$$

容易验证 $F(x)$在区间$[a,b]$上满足罗尔定理的条件，从而在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

故 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. ■

注：(1) 式(3.1)和式(3.2)均称为**拉格朗日中值公式**. 显然，当 $b<a$ 时，式(3.1)和式(3.2)也成立.

(2) 设 $x,x+\Delta x\in(a,b)$，在以 $x,x+\Delta x$ 为端点的区间上应用拉格朗日中值定理，则至少存在一点 ξ(介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间)，使得

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\cdot\Delta x.$$

可令 $\xi=x+\theta\Delta x(0<\theta<1)$，则有

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x\quad(0<\theta<1),$$

即

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x\quad(0<\theta<1).$$

因此拉格朗日公式又称为**有限增量公式**.

推论 1 如果函数 $f(x)$在区间 I 上的导数恒为零,那么 $f(x)$在区间 I 上是一个常数.

证 在区间 I 上任取两点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,在区间$[x_1,x_2]$上应用拉格朗日中值定理,得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad(x_1<\xi<x_2).$$

由假设,$f'(\xi)=0$,所以

$$f(x_2)-f(x_1)=0,\quad\text{即}\quad f(x_2)=f(x_1).$$

再由 x_1,x_2 的任意性知,$f(x)$在区间 I 上任意点处的函数值都相等,即 $f(x)$在区间 I 上是一个常数. ■

推论 2 如果函数 $f(x)$与 $g(x)$在区间 I 上恒有 $f'(x)=g'(x)$,则在区间 I 上有

$$f(x)=g(x)+C\quad(C\text{ 为常数}).$$

例 4 证明 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

证 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x,x\in[-1,1]$,因为

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0\quad x\in(-1,1),$$

所以 $f(x)\equiv C,x\in(-1,1)$. 又 $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$,故 $C=\frac{\pi}{2}$,所以 $f(x)=\frac{\pi}{2},x\in(-1,1)$. 又因为

$$f(-1)=\arcsin(-1)+\arccos(-1)=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2},$$

$$f(1)=\arcsin 1+\arccos 1=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2},$$

从而,$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$. ■

例 5 证明当 $x>0$ 时,

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证 设 $f(t)=\ln(1+t)$,显然,$f(t)$在$[0,x]$上满足拉格朗日中值定理的条件,则至少存在一点 $\xi(0<\xi<x)$,使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)\quad(0<\xi<x).$$

由于 $f(0)=0,f'(t)=\frac{1}{1+t}$,故上式即为

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}\quad(0<\xi<x).$$

由于 $0<\xi<x$,所以$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$,即

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x. \qquad \blacksquare$$

3.1.3　柯西中值定理

拉格朗日中值定理表明，如果连续曲线$\overset{\frown}{AB}$上除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线，则曲线上至少有一点 C，使曲线在点 C 处的切线平行于曲线端点连线 AB. 下面，我们用曲线的参数方程描述这个结论.

设曲线$\overset{\frown}{AB}$的参数方程为$\begin{cases} x=g(t), \\ y=f(t) \end{cases}$$(a\leqslant t\leqslant b)$（如图 3-3），其中 t 是参数. 那么曲线上点(x,y)处的斜率为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'(t)}{g'(t)}$，直线 AB 的斜率为$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. 假设点 C 对应于参数 $t=\xi$，那么曲线上点 C 处的切线平行于直线 AB，即

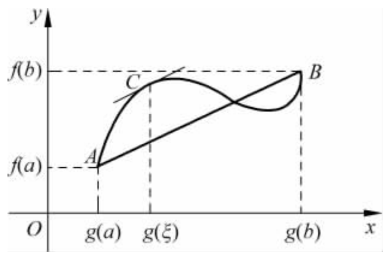

图　3-3

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

于是可以得到如下一般结论.

定理 3（**柯西(Cauchy)中值定理**）　如果函数 $f(x)$，$g(x)$满足：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导；

(3) 在(a,b)内每一点处 $g'(x)\neq 0$. 则在(a,b)内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证　构造辅助函数

$$\varphi(x) = f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

易知 $\varphi(x)$在$[a,b]$上满足罗尔定理的条件，故在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\xi) = 0,$$

从而

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \qquad \blacksquare$$

习题 3-1

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$上正确性.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间$[0,1]$上的正确性.

3. 证明下列等式：

(1) $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi(x\geqslant 1)$.

4. 证明下列不等式：

(1) 当 $a>b>0, n>1$ 时，$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$；

(2) 当 $b>a>0$ 时，$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$；

(3) 当 $x>1$ 时，$\mathrm{e}^x>\mathrm{e}x$.

5. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$，证明方程 $a_0x^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，求证：存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

7. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导函数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)\,(a<x_1<x_2<x_3<b)$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，且有 $f(a)=f(b)=0, f(c)>0\,(a<c<b)$，试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)<0$.

3.2 洛必达法则

如果当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大，此时极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\left(\text{或}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ 可能存在，也可能不存在，通常把这种极限称为**未定式**，并分别记为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$. 例如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^x}$ 是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 对于此类极限不能用“商的极限等于极限的商”这一法则. 本节将利用导数为工具，给出计算未定式极限的一种简便且重要的方法，即**洛必达求导法则**.

3.2.1 洛必达求导法则

1. $\dfrac{0}{0}$ 型未定式

下面，我们以 $x\to a$ 时的未定式 $\dfrac{0}{0}$ 的情形为例进行讨论.

定理 1 设

(1) 当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于零；

(2) 在点 a 的某去心邻域内，$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无穷大）.

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证　因为极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$是否存在与 $f(a)$和 $g(a)$取何值无关,故可补充定义 $f(a)=g(a)=0$. 于是,由(1)、(2)可知,函数 $f(x)$及 $g(x)$在点 a 的某一邻域内是连续的. 设 x 是该邻域内任意一点($x\neq a$),则 $f(x)$及 $g(x)$在以 x 及 a 为端点的区间上满足柯西中值定理的条件,从而存在 ξ(ξ 介于 x 与 a 之间),使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

当 $x\to a$ 时,有 $\xi\to a$,所以

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$ ■

注:若将定理 1 中的 $x\to a$ 换成 $x\to a^{+}$, $x\to a^{-}$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$,只要相应地修改条件(2),结论仍然成立.

上述定理给出的这种在一定条件下通过对分子、分母先分别求导,再求极限来确定未定式的值的方法称为**洛必达法则**.

例 1　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7x}{\sin3x}$.

解　这是$\dfrac{0}{0}$型未定式,由洛必达法则,有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin7x)'}{(\sin3x)'}=\lim_{x\to0}\frac{7\cos7x}{3\cos3x}=\frac{7}{3}.$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$.

解　这是$\dfrac{0}{0}$型未定式,由洛必达法则,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^{2}}}{-\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}}{1+x^{2}}=1.$$

如果$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$仍属$\dfrac{0}{0}$型未定式,且这时 $f'(x)$, $g'(x)$也满足定理 1 的条件,那么可以继续应用洛必达法则,即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

且可以依此类推.

例 3　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解　这是$\dfrac{0}{0}$型未定式,连续应用洛必达法则,有

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

注:上式中的$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}$已经不是未定式,不能再对它应用洛必达法则,否则会导致错

误结果. 以后使用洛必达法则时应注意验证,如果不是未定式,就不能应用洛必达法则. 对 $x\to a$ 或 $x\to\infty$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式,也有相应的洛必达法则.

2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 2 设

(1) 当 $x\to a$ 时,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于无穷大;

(2) 在点 a 的某去心邻域内,$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大).

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明略.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$.

解 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式,由洛必达法则,有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(\cot x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin^2 x}{x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\sin x=0.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}(n>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0.$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}$($n$ 为正整数,$\lambda>0$).

解 连续应用洛必达法则 n 次,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0.$$

洛必达法则虽然是求未定式极限的一种简单有效的方法,但若能与其他求极限的方法结合使用,效果会更简洁.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{(1-\cos x)(e^{3x}-1)}$.

解 当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$e^{3x}-1\sim 3x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{(1-\cos x)(e^{3x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{\frac{3}{2}x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-3\cos 3x}{\frac{9}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{9\sin 3x}{9x}=3.$$

3.2.2 其他几种类型的未定式

除了 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,未定式还有 $0\cdot\infty$,$\infty-\infty$,0^0,1^∞,∞^0 等类型,经过适当的变形,它们一

般都可化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式.

1. $0\cdot\infty$型,可将其化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型.

例 8　求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

解　$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

2. $\infty-\infty$型,可通分化为$\frac{0}{0}$型.

例 9　求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

解　$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

3. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

例 10　求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

解　这是 0^0 型未定式,将它变形为 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x}$,由于

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x\tan x}{x}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}=\mathrm{e}^0=1$.

例 11　求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

解　这是 1^∞ 型不定式. 因为$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}$,而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\frac{2x}{1+x^2}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1+x^2}{\cos x}=-\frac{1}{2},$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

例 12　求 $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}$.

解　这是∞^0 型未定式,将它变形为 $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln x}}$,由于

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1,$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{e}$.

例 13　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x}$.

解　这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式，如果直接使用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1-\cos x),$$

其中 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\cos x)$ 不存在也不是无穷大，但不能说 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x}$ 不存在. 事实上，这个不定式的极限不满足洛必达法则的第三个条件，因而不能用洛必达法则求此极限. 改用如下方法：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\sin x\right)=1-0=1.$$

习题 3-2

1. 用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\cos x}{\sin x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\tan7x}{\ln\tan2x}$;　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$;　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-5}{\sec x+4}$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$;　(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$;

(9) $\lim\limits_{x\to0}x\cot2x$;　(10) $\lim\limits_{x\to0}x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$;

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)$;　(12) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\tan x}$;

(13) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;　(14) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

2. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 存在，但不能用洛必达法则求出.

3. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

3.3　函数的单调性

第 1 章中已经介绍了函数在区间上单调性的概念. 本节将以导数为工具，对函数的单调性进行探讨研究.