

## 第3章

# 土中应力分布及计算

### 3.1 概述

#### 3.1.1 土中应力

土体在自身重力、建筑物载荷、交通载荷或其他因素(如地下水渗流、地震等)的作用下,均可产生土中应力。建筑物(如房屋、桥梁、涵洞等)或土工构筑物(如路堤、土坝等)的建造使得地基土中原有的应力状态发生变化,将引起地基的变形。由于建筑物载荷差异和地基不均匀等原因,基础各部分的沉降或多或少总是不均匀的,使得上部结构之中相应地产生额外的应力和变形。基础不均匀沉降超过了一定的限度,将导致建筑物的开裂、倾斜甚至破坏,往往会影响路堤、房屋和桥梁等的正常使用。土中应力过大时,又会导致土体的强度破坏,使土工构筑物发生土坡失稳或使建筑物地基的承载力不足而发生失稳。因此在研究土的变形、强度及稳定性问题时,必须掌握土中应力状态,土中应力的计算和分布规律是土力学的重要内容之一。

由土体自身重力引起的应力称为自重应力。自重应力一般是自土形成之日起就在土中产生。附加应力是指土体受外载荷(包括建筑物载荷、交通载荷、堤坝载荷)以及地下水渗流、地震等作用产生的应力增量。土中自重应力和附加应力的产生原因不同,因而两者计算方法不同,分布规律及对工程的影响也不同。

#### 3.1.2 基本假定分析

由于土是自然历史产物,具有分散性、多相性等特征,使得准确计算土的应力非常困难,必须根据实际情况和所计算问题的特点对土的特性进行必要的简化。到目前为止,计算土中应力的方法仍采用弹性理论公式,把地基土视作均匀的、连续的、各向同性的半无限体。这种假定同土体的实际情况有差别,可是其计算结果能满足实际工程的要求,其分析如下:

(1) 土的连续性假定。土是由三相所组成的非连续介质,受力后土粒在其接触点处出现应力集中现象,即在研究土体内部微观受力时,必须了解土粒之间的接触应力和土粒的相对位移;但在研究宏观土体受力时(如地基沉降和承载力问题),土体的尺寸远大于土粒的尺寸,就可以把土粒和土中孔隙合在一起从平均应力出发。现将土体简化成连续体,而应用连续体力学(如弹性力学)来研究土中应力的分布时,都只考虑土中某点单位面积上平均的应力。

(2) 土的线弹性假定。理想弹性体的应力与应变关系呈线性正比关系,且应力卸除后

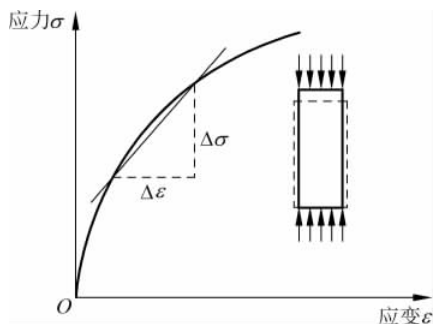


图 3-1 土的应力-应变关系曲线

变形可以完全恢复。土则不是纯弹性材料而是弹塑性材料,它的应力-应变关系是非线性的和弹塑性的。图 3-1 表明当应力很小时,土的应力-应变关系曲线就不是一根直线,亦即土的变形具有明显的非线性特征。然而,考虑到一般建筑物载荷作用下地基中应力的变化范围(应力增量  $\Delta\sigma$ )还不很大,可以用一条割线来近似地代替相应的曲线段,就可以把土看成是一个线性变形体,从而简化计算。

(3) 土的均质性和各向同性假定。天然地基往往是由成层土所组成的非均质或各向异性体,但当土层间的性质差异并不悬殊时,视土体为均质各向同性的假设(弹性理论)对竖向应力分布引起的误差,通常也在允许范围之内。

(4) 地基土可视为半无限体。即该物体在水平向是无限延伸的,而竖直向  $Z$  轴仅只在向下的正方向是无限延伸的。地基土在水平向及深度方向相对于建筑物基础的尺寸而言,可认为是无限延伸的,因此,可以认为地基土是符合半无限体的假定的。

### 3.1.3 土中一点的应力状态

#### 1) 6 个应力分量

土体中任一点  $M$  的应力状态,可根据所选定的直角坐标系  $Oxyz$ (图 3-2),用三个法向应力  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  和三对剪应力  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$ , 一共 6 个应力分量来表示。剪应力的前面一个脚标表示剪应力作用面的法向方向,后一个脚标表示剪应力的作用方向。

#### 2) 法向应力的正负

材料力学中的法向应力,以拉应力为正,压应力为负。土力学与此相反,以压应力为正,拉应力为负。这是因为土力学研究的对象,绝大多数都是压应力之故。

#### 3) 剪应力的正负

材料力学中,剪应力的方向,以顺时针方向为正。在土力学中与此相反,规定以逆时针方向为正。

#### 4) 二向应力状态斜截面上的应力与主应力

对于图 3-3 所示的单元体,其任意斜截面的法线与  $x$  轴成  $\alpha$  角度的正应力和剪应力可用下式表示:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (3-1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (3-2)$$

当某斜截面上的剪应力等于零时,该斜截面就称为主平面,该斜截面上的正应力称为主

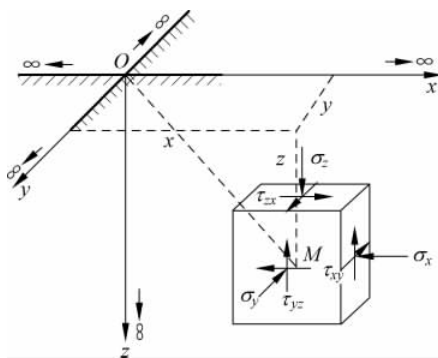


图 3-2 土中一点的应力状态

应力。主应力计算式如下：

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \quad (3-3)$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3-4)$$

式中,  $\alpha_0$ ——最大主平面的法线与  $x$  轴的夹角。

主应力也可以用应力圆求解。对于图 3-2 所示应力状态情况,以坐标  $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$  为圆心,圆的半径为  $\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{\frac{1}{2}}$ ,画应力圆,则大小主应力  $\sigma_1, \sigma_3$  如图 3-4 所示。

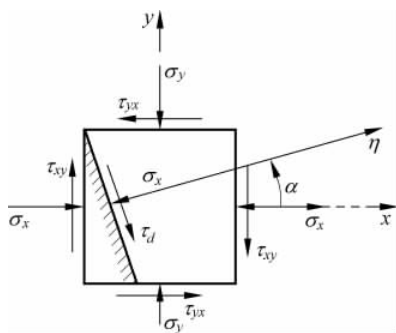


图 3-3 斜截面上的应力

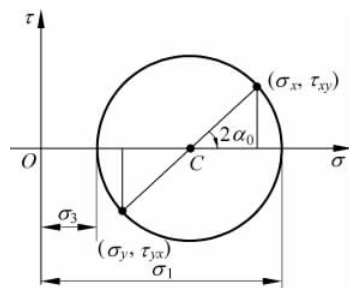


图 3-4 应力圆

## 3.2 土的自重应力计算

若土体是均匀的半无限体,且假设天然地面是一个无限大的水平面,土体在自身重力作用下竖直切面都是对称面,因此在任意竖直面和水平面上均无剪应力存在。因此,在深度  $z$  处平面上,土体因自身重力产生的竖向应力  $\sigma_{cz}$  (以后简称为自重应力)等于单位面积上土柱体的重力  $W$ ,如图 3-5 所示。

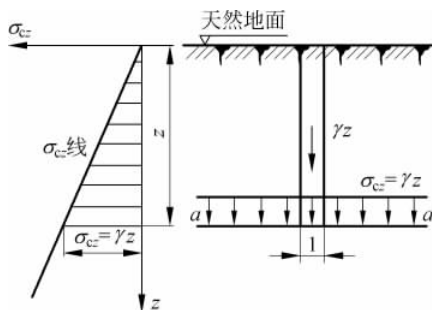


图 3-5 均质土中竖向自重应力

### 3.2.1 均质土的自重应力

当地基是均质土时,则在天然地面以下任意深度  $z$  (单位为 m) 处  $a$ - $a$  水平面上的竖向自重应力  $\sigma_{cz}$  (单位为 kPa),就等于该水平面任一单位面积上土柱体的自重  $\gamma z$ ,即

$$\sigma_{cz} = \frac{\gamma z F}{F} = \gamma z \quad (3-5)$$

式中,  $\gamma$ ——土的天然重度,  $\text{kN}/\text{m}^3$ ;

$F$ ——土柱体的截面积,取  $F=1$ 。 $\sigma_{cz}$ 沿水平面均匀分布,且与深度  $z$  成正比,即随深度按直线规律分布。

地基中除有作用于水平面上的竖向自重应力外,在竖直面还作用有水平向的侧向自重应力,侧向自重应力  $\sigma_{cx}$  和  $\sigma_{cy}$  可按式(3-6)计算:

$$\sigma_{cx} = \sigma_{cy} = K_0 \sigma_{cz} \quad (3-6)$$

式中,  $K_0$ ——土的静止土压力系数。它是侧限条件下土中水平向应力与竖向应力之比,所以侧限状态又称为  $K_0$  状态,可以通过试验确定,它也与土的强度或变形指标间存在着理论或经验关系。

必须指出,只有通过土粒接触点传递的粒间应力,才能使土粒彼此挤紧,从而引起土体的变形,而且粒间应力又是影响土体强度的一个重要因素,所以粒间应力又称为有效应力(有效应力原理见 3.5 节)。因此,土中自重应力可定义为土自身有效重力在土体中引起的应力。土中竖向和侧向的自重应力一般均指有效自重应力。对地下水位以下土层必须以有效重度  $\gamma'$  代替天然重度  $\gamma$ 。

### 3.2.2 成层土体的自重应力

地基土往往是成层的,因而各层土具有不同的重度。如地下水位位于同一土层中,计算自重应力时,地下水位面也应作为分层的界面。如图 3-6 所示,天然地面下深度  $z$  范围内各层土的厚度自上而下分别为  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , 天然重度分别为  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , 在深度  $z$  处土的自重应力也等于单位面积上土柱体中各层土重的总和,其计算公式为

$$\sigma_{cz} = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i \quad (3-7)$$

式中,  $\sigma_{cz}$ ——天然地面下任意深度  $z$  处的竖向有效自重应力(kPa);

$n$ ——深度  $z$  范围内的土层总数;

$h_i$ ——第  $i$  层土的厚度(m);

$\gamma_i$ ——第  $i$  层土的天然重度,对地下水位以下的土层取有效重度  $\gamma'_i$ ( $\text{kN}/\text{m}^3$ )。

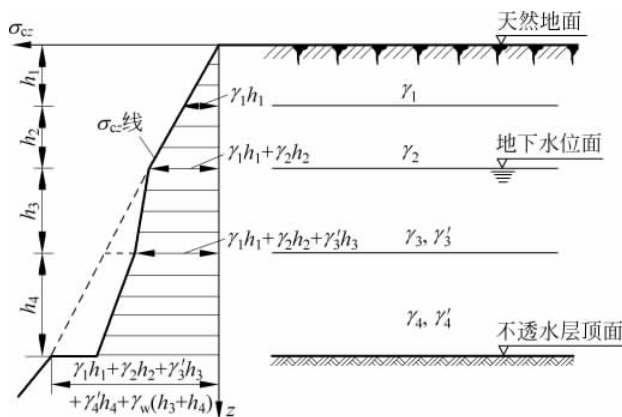


图 3-6 成层土中竖向自重应力沿深度的分布

计算地下水位以下土的自重应力时,应根据土的性质,确定是否需要考虑水对土体的浮力作用。通常认为水下的砂性土是应该考虑浮力作用的,黏性土则要视黏性土的性质而定。一般认为若水下的黏性土的液性指数  $I_L \geq 1$ , 则土处于流动状态,土颗粒之间存在着大量自由水,此时可以认为土体受到水的浮力作用;若  $I_L \leq 0$ , 则土处于固体状态,土中自由水受到

土颗粒间结合水膜的阻碍不能传递静水压力,故认为土体不受水的浮力作用;若  $0 < I_1 < 1$ , 土处于塑性状态时,土颗粒是否受到水的浮力作用比较难确定,一般在实践中均按不利状态来考虑。所以,在地下水位以下,如埋藏有不透水层(例如岩层或只含结合水的坚硬黏土层),由于不透水层中不存在水的浮力,所以层面及层面以下的自重应力应按上覆土层的水土总重计算。

此外,地下水位升降,使地基土中自重应力也相应发生变化。图 3-7(a)为地下水位下降的情况,如因大量抽取地下水,以致地下水位长期大幅度下降,使地基中有效自重应力增加,从而引起地面大面积沉降的严重后果。图 3-7(b)为地下水位长期上升的情况,如在人工抬高蓄水水位地区(如筑坝蓄水)、工业废水大量渗入地下的地区以及农业灌溉引起的地下水位上升。水位上升会引起地基承载力的减小、湿陷性土的湿陷现象等,必须引起注意。

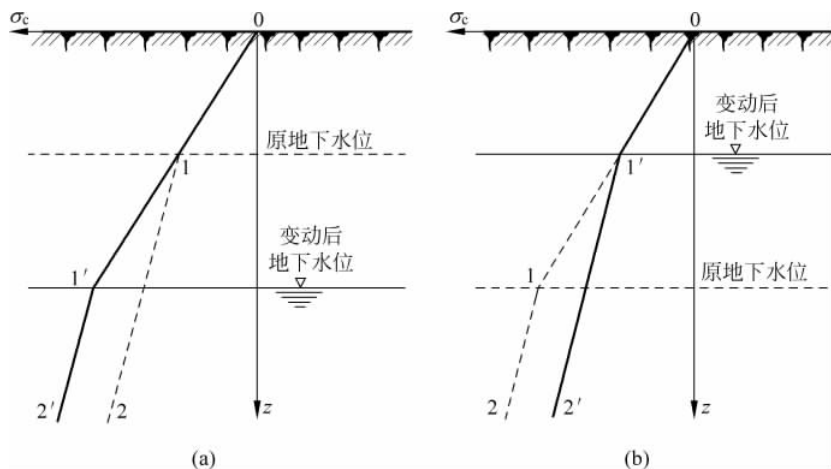


图 3-7 地下水位上升下降情形下的自重应力

因此,自重应力的分布规律为:自重应力分布线的斜率是容重;自重应力在等容重地基中随深度呈直线分布;自重应力在成层地基中呈折线分布;在土层分界面处和地下水位处发生转折。

**【例 3-1】** 某建筑场地的地质柱状图和土的有关指标列于图 3-8 中。试分别计算地面下深度为 2.5、5 和 9m 处的自重应力,并绘出分布图。

**【解】** 本例天然地面下第一层粉土厚 6m,其中地下水位以上和以下的厚度分别为 3.6m 和 2.4m;第二层为粉质黏土层。依次计算 2.5、3.6、5、6、9m 各深度处的土中竖向自重应力,计算过程及自重应力分布图一并列于图 3-8 中。

**【例 3-2】** 计算图 3-9 所示水下地基土中的自重应力分布。

**【解】** 水下的粗砂受到水的浮力作用,其有效重度为

$$\gamma' = \gamma_{\text{sat}} - \gamma_w = (19.5 - 9.81) \text{ kN/m}^3 = 9.69 \text{ kN/m}^3$$

黏土层因为  $\omega < \omega_p$ ,  $I_1 < 0$ ,故认为土层不受水的浮力作用,土层面上还受到上面的静水压力作用。土中各点的自重应力计算如下:

土层	土的有效重度的计算	柱状图	深度 $z$ /m	分层厚度 $h_i$ /m	土中竖向自重应力的计算 $\sigma_{cz}$ /kPa	竖向自重应力分布图	
粉土	$\begin{cases} \gamma=18.0\text{kN/m}^3 \\ d_s=2.70 \\ \omega=35\% \end{cases}$ $\gamma' = \frac{d_s-1}{1+e}$ $= \frac{(d_s-1)\gamma}{d_s(1+\omega)}$ $= \frac{(2.70-1) \times 18.0}{2.70 \times (1+0.35)} \text{kN/m}^3$ $= 8.4\text{kN/m}^3$		2.5		$18 \times 2.5 = 45$		
			3.6	3.6	$18 \times 3.6 = 65$		65kPa
			5.0		$65 + 8.4 \times (5 - 3.6) = 77$		85kPa
			6.0	2.4	$65 + 8.4 \times (6 - 3.6) = 85$		
粉质黏土	$\begin{cases} \gamma=18.9\text{kN/m}^3 \\ d_s=2.72 \\ \omega=34.3\% \end{cases}$ $\gamma' = \frac{(2.72-1) \times 18.9}{2.72 \times (1+0.343)} \text{kN/m}^3$ $= 8.9\text{kN/m}^3$		9.0		$85 + 8.9 \times (9 - 6) = 112$	112kPa	

图 3-8 例 3-1 图

$a$  点,  $z=0\text{m}$ ,  $\sigma_{cz}=0\text{kPa}$ ;

粗砂层底  $b$  点,  $z=10\text{m}$ , 但该点位于粗砂层中, 则

$$\sigma_{cz} = \gamma' z = 9.69 \times 10 \text{kPa} = 96.9 \text{kPa}$$

黏土层顶  $b'$  点,  $z=10\text{m}$ , 但该点位于黏土层中, 则

$$\sigma_{cz} = \gamma' z + \gamma_w h_w = (9.69 \times 10 + 10 \times 13) \text{kPa} = 226.9 \text{kPa}$$

$c$  点,  $z=15\text{m}$ ,  $\sigma_{cz} = (226.9 + 19.3 \times 5) \text{kPa} = 323.4 \text{kPa}$

土中自重应力  $\sigma_{cz}$  分布图如图 3-9 所示。

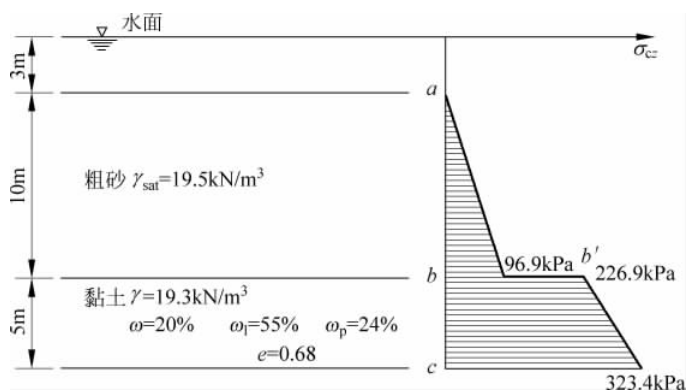


图 3-9 例 3-2 图

### 3.3 基底压力

建筑物通过基础将上部载荷传到地基中,基础底面传递给地基表面的压力为基底压力,也称基底接触压力。而地基支承基础的反力称为基底反力。基底反力是基础底面受到的总的作用力,不是基底压力的反作用力,数值不一定与基底压力相同。

基础底面的压力分布形式对地基土中应力产生影响。基础底面压力分布问题是涉及基础与地基土两种不同物质间的接触压力问题,这是一个比较复杂的问题,影响它的因素很多,包括三个方面:①基础条件,基础的刚度、形状、尺寸、埋置深度等;②地基条件,土的类型、密度、土层结构等;③载荷条件,载荷大小、方向分布等。在理论分析中要综合顾及这么多的因素是困难的,在下面基底压力分析和计算中,着重讨论基础刚度等主要因素对基底压力分布的影响,暂且不考虑上部结构对基底压力的影响,从而简化了基底压力计算。

#### 3.3.1 基底压力分布的概念

为了便于分析,先从理论概念上将各种基础按其与地基土的相对抗弯刚度( $EI$ )分成三类,即理想柔性基础、理想刚性基础和有限刚性基础。

##### 1) 理想柔性基础(弹性地基,如土坝、路基及油罐薄板)

若一个基础作用均布载荷,假设基础是由许多小块组成,如图 3-10(a)所示。各小块之间光滑而无摩擦力,则这种基础相当于理想柔性基础(即基础的抗弯刚度  $EI \rightarrow 0$ ),基础上载荷通过小块直接传递至土上,基础底面的压力分布图形将与基础上作用的载荷分布图形完全一致。这时基础底面的沉降各处均不相同,中央大而边缘小,如图 3-10(b)所示。如由土筑成的路堤,可以近似地认为路堤本身不传递剪力,那么它就相当于一种柔性基础,路堤自重引起的基底压力分布就与路堤断面形状相同是梯形分布的,见图 3-10(c)。

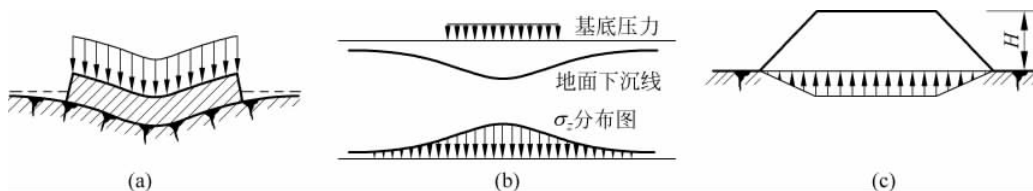


图 3-10 柔性基础的基底压力分布

(a) 柔性基础; (b) 柔性基础的基底压力; (c) 路堤的基底压力

##### 2) 理想刚性基础(弹性地基,如块式整体基础、素混凝土基础)

桥梁墩台基础有时采用大块混凝土实体结构(见图 3-11),它的刚度很大,可以认为是刚性基础(即  $EI \rightarrow \infty$ )。由于基础刚度接近无穷大,刚性基础不会发生挠曲变形,在均布载荷作用下,基础只能保持平面下沉而不能弯曲。但是对地基而言,均匀分布的基底压力将产生不均匀沉降,如图 3-11(a)中的虚线所示,其结果是基础变形与地基变形不相适应,基底中部将会与地面脱开,出现应力架桥作用。为使基础与地基的变形保持相容(见图 3-11(b)),必然要重新调整基底压力的分布形式,使两端应力加大,中间应力减小,从而使地面保持均匀下沉,以适应绝对刚性基础的变形。如果地基是完全弹性体,根据弹性理论解得的基底压力分

布如图 3-11(c)所示,基础边缘处的压力将为无穷大。

通过以上分析可以看出,对于刚性基础来说,基底压力的分布形式与作用在它上面的载荷分布形式不一致。

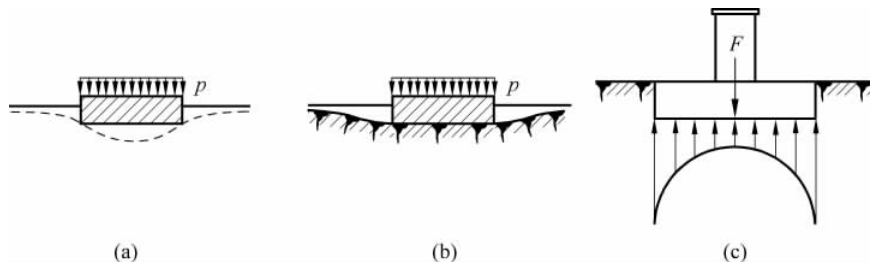


图 3-11 刚性基础下压力分布

### 3) 有限刚性基础(弹塑性地基)

有限刚性的基础,是工程实践中最常见的情况,由于理想刚性基础和理想柔性基础都只是假定的理想情况,地基也不是完全弹性体,因此上述基底压力分布图形实际上是不可能出现的。因为当基底两端的压力足够大,超过土的极限强度后,土体就会形成塑性区,这时基底两端处地基土所承受的压力不能再增大,多余的应力自行调整向中间转移;又因为基础也不是绝对刚性,可以稍为弯曲,因此应力重分布的结果是使基底压力分布可以成为各种更加复杂的形式。如图 3-12 所示,在砂性土地基上,载荷较小和载荷较大时基底压力的抛物线形状不同;在黏性土地基上,载荷由小到大,基底压力分布图形由马鞍形向抛物线形和倒钟形发展。这时基底两端应力不会是无穷大,而中间部分应力将比理论值大些。具体的压力分布形状还与地基、基础的材料特性以及基础尺寸、载荷形状、大小等因素有关。

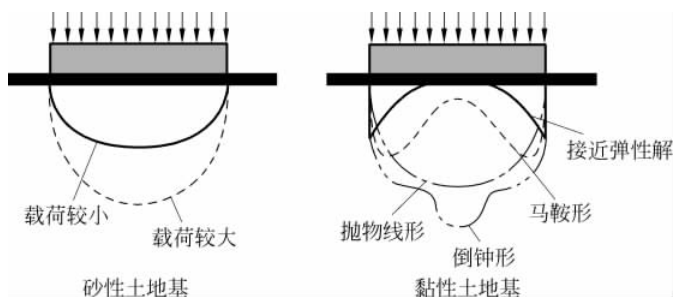


图 3-12 有限刚度基础下的压力分布

## 3.3.2 基底压力的简化计算

### 1. 中心载荷下的基底压力

中心载荷下的基础,其所受载荷的合力通过基底形心。基底压力假定为均匀分布(图 3-13)。基础底面的平均压力,可按以下公式确定:

$$p = \frac{F + G}{A} \quad (3-8)$$

式中,  $F$ ——基础顶面的竖向力(kN)。

$G$ ——基础自重和基础上回填土重之和(kN);  $G = \gamma_G A d$ , 其中  $\gamma_G$  为基础及回填土的平均重度, 一般取  $20 \text{ kN/m}^3$ , 在地下水位以下部分应扣去浮力  $10 \text{ kN/m}^3$ ,  $d$  为基础埋深(m), 一般从室外设计地面或室内外平均设计地面算起。

$A$ ——基础底面面积( $\text{m}^2$ ); 对矩形基础,  $A = lb$ ,  $l$  和  $b$  分别为矩形基础的长度和宽度(m)。对于载荷沿长度方向均匀分布的条形基础, 则沿长度方向截取一单位长度的截条进行基底平均压力设计值  $P$  (kPa) 的计算, 此时式(3-8)中  $A$  改为  $b$  (m), 而  $F$  及  $G$  则为每延米内的相应值(kN/m)。

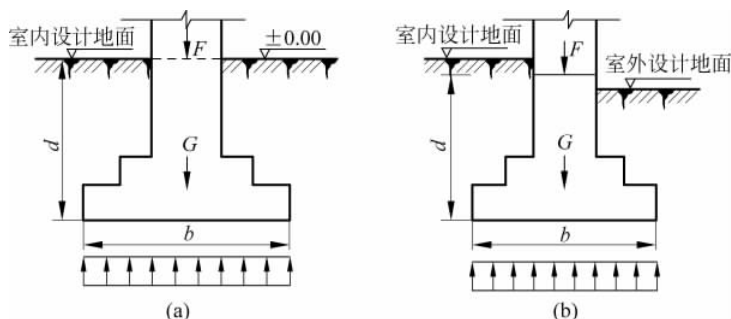


图 3-13 中心载荷下的基底压力分布图

(a) 内墙或内柱基础; (b) 外墙或外柱基础

## 2. 偏心载荷下的基底压力

矩形基础受偏心载荷作用时, 基底压力可按材料力学短柱偏心受压公式计算。对于单向偏心载荷下的矩形基础, 设计时, 通常基底长边方向取与偏心方向一致, 此时两短边边缘最大压力设计值  $p_{\max}$  与最小压力设计值  $p_{\min}$  (kPa), 按下式计算:

$$\left. \begin{array}{l} p_{\max} \\ p_{\min} \end{array} \right\} = \frac{F+G}{A} \pm \frac{M}{W} \quad (3-9)$$

式中,  $p_{\max}$ 、 $p_{\min}$ ——基础最大、最小边缘压力(kPa);

$M$ ——作用于基底形心上的力矩值( $\text{kN} \cdot \text{m}$ ),  $M = (F+G)e$ ;

$W$ ——基础底面的抵抗矩, 对于矩形基础,  $W = \frac{bl^2}{6}$  ( $\text{m}^3$ )。

将偏心载荷的偏心距代入式(3-9)中, 得

$$\left. \begin{array}{l} p_{\max} \\ p_{\min} \end{array} \right\} = \frac{F+G}{lb} \left( 1 \pm \frac{6e}{l} \right) \quad (3-10)$$

从式(3-10)可知, 按偏心载荷的偏心距  $e$  的大小, 基底压力的分布可能出现下述三种情况(见图 3-14):

- (1) 当  $e < l/6$  时,  $p_{\min} > 0$ , 基底压力分布呈梯形(见图 3-14(a));
- (2) 当  $e = l/6$  时,  $p_{\min} = 0$ , 基底压力分布呈三角形(见图 3-14(b));
- (3) 当  $e > l/6$  时,  $p_{\min} < 0$ , 产生拉应力, 但基底与土之间不能承受拉应力, 这时产生拉

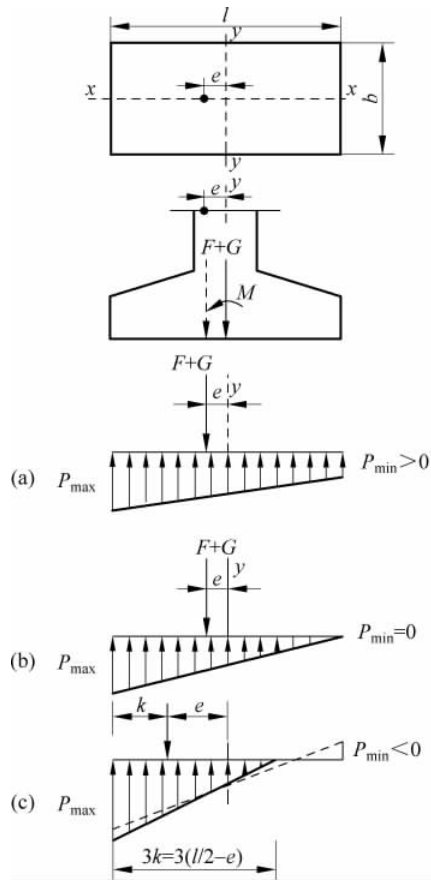


图 3-14 单向偏心载荷下的基底压力分布图

应力部分的基底与土脱开,而不能传递载荷,基底压力将重新分布(见图 3-14(c))。重新分布后的基底压力可以根据偏心载荷与基底反力相平衡以及载荷合力应通过三角形反力分布图的形心的条件求得:

$$p_{\max} = \frac{2(F+G)}{3bk} \quad (3-11)$$

式中,  $k$ ——单向偏心载荷作用点至具有最大压力的基底边缘的距离(m)。

矩形基础在双向偏心载荷作用下(见图 3-15),如基底最小压力  $p_{\min} \geq 0$ ,则矩形基底边缘四个角点处的压力,可按下列公式计算:

$$\left. \begin{array}{l} p_{\max} \\ p_{\min} \end{array} \right\} = \frac{F+G}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \quad (3-12)$$

$$\left. \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \end{array} \right\} = \frac{F+G}{A} \mp \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \quad (3-13)$$

式中,  $M_x$ 、 $M_y$ ——载荷合力分别对矩形基底  $x$ 、 $y$  对称轴的力矩( $\text{kN} \cdot \text{m}$ );

$W_x$ 、 $W_y$ ——基础底面分别对  $x$ 、 $y$  的抵抗矩( $\text{m}^3$ )。