

第3章 集合论

集合论是现代数学各分支的基础, 是计算机科学许多理论不可或缺的工具. 它起源于 16 世纪末期, 最初, 人们为了追求微积分的坚实的基础, 仅进行了数集的研究, 直到 1876—1883 年, 德国数学家康托 (Georg Cantor) 发表了一系列有关集合论的文章, 对任意元素的集合进行了深入的探讨, 提出了关于基数、序数和良序集等理论, 奠定了集合论的深厚基础. 19 世纪 90 年代后, 集合论逐渐为数学家们采用, 成为分析数学、代数和几何的有力工具. 经过一百多年的发展, 集合论成为数学中发展最为迅速的分支之一.

本章主要介绍集合论的初步知识, 如集合的基本概念、运算、性质以及笛卡儿积等内容.

3.1 基本概念

1. 集合的概念

集合是集合论中最基本的概念, 很难给出精确的定义, 只能给出说明性的描述. 一般地, 把一些确定的, 可以区分的事物放在一起构成的整体称为集合, 简称集. 构成集合的每个事物称为集合的元素 (或成员). 构成集合的元素可以是具体的事物, 也可以是抽象的事物. 例如:

方程 $x^2 - 1 = 0$ 的实数解集合.

程序设计语言 C 的全部基本字符的集合.

某高校全体学生的集合.

坐标平面上所有点的集合.

通常用大写的英文字母 A, B, C , 表示集合, 用小写的英文字母 a, b, c , 表示元素. 如果元素 a 属于集合 A , 记作 $a \in A$, 读作“ a 属于 A ”. 如果 a 不属于 A , 记作 $a \notin A$ 或 $a \notin A$, 读作“ a 不属于 A ”.

下面是几种特殊集合的表示符号:

$\mathbf{N}$ ——自然数集合 (包括 0).

$\mathbf{Z}$ ——整数集合, $\mathbf{Z}^+$ ——正整数集合, $\mathbf{Z}^-$ ——负整数集合.

$\mathbf{Q}$ ——有理数集合, $\mathbf{Q}^+$ ——正有理数集合, $\mathbf{Q}^-$ ——负有理数集合.

$\mathbf{R}$ ——实数集合, $\mathbf{R}^+$ ——正实数集合, $\mathbf{R}^-$ ——负实数集合.

$\mathbf{C}$ ——复数集合, 等等.

2. 集合的表示方法

集合有多种表示方法, 这里介绍几种常用的表示方法.

列元素法——把集合中的全部元素一一列举出来, 元素之间用逗号“,”隔开, 并把它们用花括号“{}”括起来. 例如:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

列元素法一般适合表示元素个数较少的集合. 当集合中元素个数较多时, 如果组成该集合的元素有一定的规律, 也可采用此方法, 此时, 列出部分元素, 当看出组成该集合的其他元素的规律时, 其余元素用“...”来表示. 例如:

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$$

此方法也可以表示含有无穷多个元素且元素有一定的规律的集合. 例如:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

谓词表示法——用谓词来概括集合中元素的属性. 设 x 为某类对象的一般表示, $P(x)$ 为关于 x 的一个命题, 用 $\{x | P(x)\}$ 表示“使 $P(x)$ 为真的全体 x 组成的集合”. 例如, 方程 $x^2 - 1 = 0$ 的实数解集合可表示为 $C = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge x^2 - 1 = 0\}$.

许多集合可以用两种方法来表示, 如集合 C 也可以写成 $C = \{1, -1\}$. 但是有些集合不可以用列元素法表示, 如实数集合 $\mathbf{R}$.

文氏图表示法——集合与集合的关系以及一些运算结果可以用文氏图形象地表示. 在给定的问题中, 我们所考虑的所有事物的集合称为全集, 记为 E 或 U . 在文氏图中, 用矩形表示全集; 在矩形内部, 用圆或其他形状的闭曲线表示全集的子集. 不同的圆代表不同的集合, 并将运算结果得到的集合用阴影或斜线区域表示.

需要注意的是, 文氏图只是对某些集合间的关系及运算结果给出一种直观而形象的说明, 而不能用来证明.

全集中包含着我们讨论的所有事物. 规定了全集后, 我们讨论的任一集合中的所有元素都属于全集. 但全集是一个相对的概念, 研究的问题不同, 所取的全集也不同. 例如, 在研究平面解析几何问题时, 可以把整个平面取作全集; 在初等数论中, 可以把整数集 $\mathbf{Z}$ 作为全集. 即使是同一个问题, 也可以取不同的集合. 例如, 有关整数的问题, 既可取 $\mathbf{Z}$ 为全集, 也可取 $\mathbf{Q}$ 或 $\mathbf{R}$ 为全集, 但取 $\mathbf{Z}$ 为全集比取 $\mathbf{Q}$ 或 $\mathbf{R}$ 为全集显然要简便一些.

3. 元素与集合

对于元素与集合的理解, 要注意以下几点:

(1) 组成一个集合的各个元素之间是彼此不同的, 如果同一个元素在集合中多次出现, 应该认为是一个元素. 例如:

$$\{1, 1, 2, 4, 2\} = \{1, 2, 4\}$$

(2) 集合的元素是无序的. 例如:

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$$

(3) 任一元素 (事物) 是否属于一个集合, 回答是确定的. 也就是说, 对于任意的元素 a 和集合 A , $a \in A$ 或 $a \notin A$ 必有一个成立.

(4) 集合的元素可以是任何事物, 既可以是具体的事物, 也可以是抽象的事物, 还可以是另外的集合. 例如:

$$\{a, \{1, 2\}, p, \{q\}\}$$

(5) 元素和集合之间的关系是隶属关系, 即属于或不属于, 可以用一种树形图来表示这种隶属关系, 该图分层构成, 每个层上的结点都表示一个集合, 它的儿子就是它的元素. 集合 $S = \{a, \{1, 2\}, p, \{q\}\}$ 的树形图如图 3.1 所示.

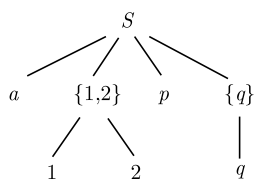


图 3.1 元素和集合间隶属关系的树形图

3.2 集合间的关系

在 3.1 节中, 给出了“集合”“元素”以及元素与集合间的“属于”关系 3 个概念的直观描述, 以说明它们各自的含义. 下面利用这 3 个概念定义集合间的关系.

定义 3.1 设 A, B 是任意两个集合, 如果 A 中的每一个元素都是 B 中的元素, 则称 A 是 B 的子集, 简称子集. 也称 A 被 B 包含, 或 B 包含 A . 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$. 符号化表示为

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

如果 A 不被 B 包含, 则记作 $A \not\subseteq B$. 符号化表示为

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)$$

例如, $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{b, c, d\}$, 则有 $A \subseteq B$, 但 $A \not\subseteq C$.

注意符号 $\in$ 和 $\subseteq$ 的区别, $\in$ 表示元素与集合间的“属于”关系, $\subseteq$ 表示集合间的“包含”关系.

定义 3.2 设 A, B 是两个集合, 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$. 符号化表示为

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A$$

如果 A 与 B 不相等, 则记作 $A \neq B$.

该定义给出了一个重要原则: 要证明两个集合相等, 唯一的方法就是证明每一个集合中的任一元素均是另一个集合的元素.

定义 3.3 设 A, B 是两个集合, 如果 A 是 B 的子集, 而 B 中至少有一个元素不属于 A , 则称 A 为 B 的真子集, 记作 $A \subset B$. 符号化表示为

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x (x \in B \wedge x \notin A)$$

或

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

如果 A 不是 B 的真子集, 则记作 $A \not\subset B$.

例如, 集合 $\{a, b\}$ 是 $\{a, b, c\}$ 的真子集, 但 $\{a, b, c\}$ 和 $\{b, c, d\}$ 都不是 $\{a, b, c\}$ 的真子集.

集合与集合的关系可以用文氏图形象地表示, 集合 A 和 B 的 3 种不同关系的文氏图如图 3.2 所示.

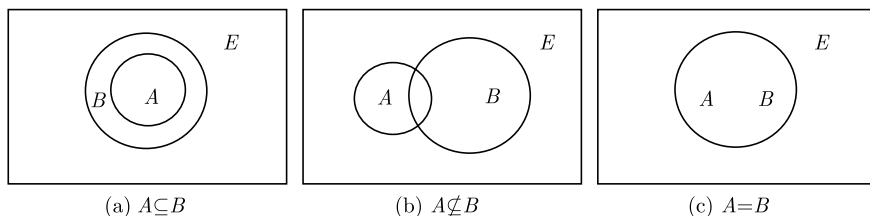


图 3.2 集合 A 和 B 的 3 种关系的文氏图

定义 3.4 不含任何元素的集合叫做**空集**, 记作 $\emptyset$. 空集的符号化表示为

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

例如, $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 2 = 0\}$ 是方程 $x^2 + 2 = 0$ 的实数解集, 因为该方程无实数解, 所以 $A = \emptyset$.

注意: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

定理 3.1 对于任意集合 A , 有

(1) $\emptyset \subseteq A$, 且空集是唯一的; (2) $A \subseteq A$.

证明:(1) 假设 $\emptyset \subseteq A$ 为假, 则至少存在一个元素 x , 使 $x \in \emptyset$ 且 $x \notin A$, 因为空集 $\emptyset$ 不包含任何元素, 所以这是不可能的.

设 $\emptyset_1$ 与 $\emptyset_2$ 都是空集, 由上述结论可知, $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ 且 $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$, 根据集合相等的定义得 $\emptyset_1 = \emptyset_2$, 所以, 空集是唯一的.

(2) 根据子集的定义可得, 对于任意集合 A , 有 $A \subseteq A$.

定义 3.5 含有 n 个元素的集合简称 n 元集, 它的含有 m ($m \leq n$) 个元素的子集叫做它的 m 元子集.

任给一个 n 元集, 如何求出它的全部子集呢? 举例说明如下.

例 3.1 $A = \{1, 2, 3\}$, 将 A 的子集分类:

0 元子集, 也就是空集, 只有一个: $\emptyset$.

1 元子集, 即单元集: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.

2 元子集: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$.

3 元子集: $\{1, 2, 3\}$.

一般地, 对于 n 元集, 它的 m 元子集有 C_n^m 个, 所以不同的子集总数是

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

3.3 集合的运算

3.3.1 集合的基本运算

集合的运算,就是以集合为对象,按照确定的规则得到另外一些新集合的过程.集合的基本运算有并、交、相对补、绝对补和对称差等.

定义 3.6 设 A, B 是任意两个集合,由 A 或 B 中的元素构成的集合称为集合 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

例如, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$.

集合的运算结果可以用文氏图形象地表示,集合 A 与 B 的并运算的文氏图表示如图 3.3 所示.

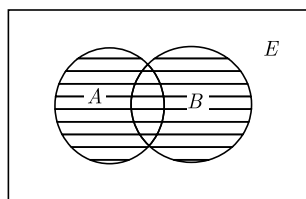


图 3.3 并运算的文氏图表示

两个集合的并运算可以推广到 n 个集合的并.

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是任意 n 个集合,则这 n 个集合的并可简记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$, 即

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$$

并运算还可以推广到无穷多个集合的情况:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

定义 3.7 设 A, B 是任意两个集合,由既在 A 中又在 B 中的元素构成的集合称为集合 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

如果两个集合 A, B 的交集为空集,则称 A, B 不相交.

例如, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, $C = \{1, 3\}$, 则 $A \cap B = \{2, 4\}$, $B \cap C = \emptyset$, 所以 B 和 C 是不相交的.

集合 A 与 B 的交运算的文氏图表示如图 3.4 所示.

两个集合的交运算可以推广到 n 个集合的交.

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是任意 n 个集合, 则这 n 个集合的交可简记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$, 即

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}$$

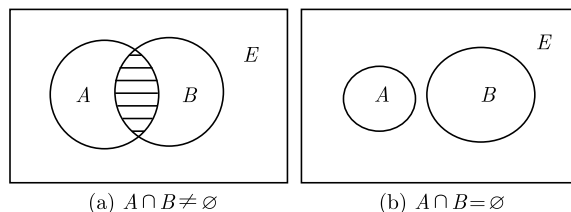


图 3.4 交运算的文氏图表示

交运算还可以推广到无穷多个集合的情况:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$

定义 3.8 设 A, B 是任意两个集合, 由只属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合称为集合 B 对于 A 的**相对补集** (或 A 和 B 的**差集**), 记作 $A - B$.

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

例如, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, 则 $A - B = \{1\}$, $B - A = \{5\}$.

集合 B 对于 A 的相对补运算的文氏图表示如图 3.5(a) 所示.

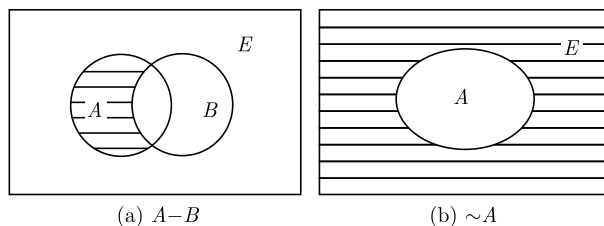


图 3.5 补运算的文氏图表示

定义 3.9 设 E 为全集, $A \subseteq E$, 则称集合 A 对于 E 的相对补集为 A 的**绝对补集**, 记作 $\sim A$.

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$$

例如, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \emptyset$, 则 $\sim A = \{3, 5\}$, $\sim B = \emptyset$, $\sim C = E$.

集合 A 的绝对补运算的文氏图表示如图 3.5(b) 所示.

定义 3.10 设 A, B 是任意两个集合, 由属于 A 但不属于 B 或者属于 B 但不属于 A 的所有元素构成的集合称为集合 A 与 B 的**对称差**, 记作 $A \oplus B$.

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

或

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

集合 A 与 B 的对称差运算的文氏图表示如图 3.6 所示.

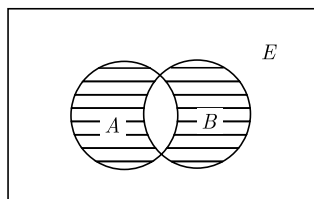


图 3.6 $A \oplus B$ 的文氏图表示

例如, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$, 则 $A \oplus B = \{a, c, d\}$.

从对称差的定义或文氏图容易看出

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

该公式可作为 A 与 B 的对称差的一个等价定义.

设 A 、 B 、 C 为任意 3 个集合, 对称差运算有以下性质:

- (1) $A \oplus B = B \oplus A$.
- (2) $A \oplus \emptyset = A$.
- (3) $A \oplus A = \emptyset$.
- (4) $A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)$.
- (5) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.
- (6) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

3.3.2 集合的运算律

集合运算同其他代数运算一样, 都遵循一定的运算律. 下面列出的是集合运算的主要运算律, 其中, E 为全集, A 、 B 、 C 为 E 的任意的 3 个子集.

- | | |
|----------|--|
| (1) 幂等律 | $A \cup A = A, A \cap A = A$. |
| (2) 交换律 | $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$. |
| (3) 结合律 | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$ |
| (4) 分配律 | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$ |
| (5) 吸收律 | $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$ |
| (6) 同一律 | $A \cup \emptyset = A, A \cap E = A.$ |
| (7) 零律 | $A \cup E = E, A \cap \emptyset = \emptyset.$ |
| (8) 排中律 | $A \cup \sim A = E.$ |
| (9) 矛盾律 | $A \cap \sim A = \emptyset.$ |
| (10) 余补律 | $\sim \emptyset = E, \sim E = \emptyset.$ |

- (11) 双重否定律 $\sim(\sim A) = A.$
 (12) 补交转换律 $A - B = A \cap \sim B.$
 (13) 德·摩根律 $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B,$
 $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B;$
 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C),$
 $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$

常称以上 13 组集合等式为**集合恒等式**.

证明集合等式常用的方法有两种:

(1) 逻辑公式等值演算法. 证明的关键是要灵活运用逻辑基本等值式和集合运算的性质.

该方法证明的基本思想是: 设 P 、 Q 为集合公式, 根据集合相等的定义, 要证 $P = Q$, 只需证 $P \subseteq Q \wedge Q \subseteq P$ 为真. 也就是要证对于任意的 x 有

$$x \in P \Leftrightarrow x \in Q$$

(2) 恒等代换法. 该方法的实质就是利用集合运算的性质和已知的集合恒等式, 把一个集合用与之相等的集合代换, 从而完成证明.

例 3.2 利用等值演算的方法证明下列恒等式:

(1) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

(2) 排中律: $A \cup \sim A = E.$

(3) 德·摩根律: $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B.$

证明: (1) 对于任意的 x , 有

$$\begin{aligned} & x \in A \cup (B \cap C) \\ \Leftrightarrow & x \in A \vee x \in (B \cap C) \\ \Leftrightarrow & x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ \Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ \Leftrightarrow & x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \\ \Leftrightarrow & x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

所以, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

(2) 对于任意的 x , 有

$$\begin{aligned} & x \in A \cup \sim A \\ \Leftrightarrow & x \in A \vee x \in \sim A \\ \Leftrightarrow & x \in A \vee x \notin A \\ \Leftrightarrow & x \in A \vee \neg x \in A \\ \Leftrightarrow & 1 \\ \Leftrightarrow & x \in E \end{aligned}$$

所以, $A \cup \sim A = E.$

(3) 对于任意的 x , 有

$$\begin{aligned} & x \in \sim(A \cup B) \\ \Leftrightarrow & x \notin (A \cup B) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in \sim A) \wedge (x \in \sim B)$$

$$\Leftrightarrow x \in (\sim A \cap \sim B)$$

所以, $\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$.

例 3.3 利用恒等代换的方法证明吸收律.

证明: $A \cup (A \cap B)$

$$= (A \cap E) \cup (A \cap B)$$

$$= A \cap (E \cup B)$$

$$= A \cap E$$

$$= A$$

由同一律、分配律、零律等恒等式证明了吸收律第一式. 用同样的方法可证吸收律第二式, 即 $A \cap (A \cup B) = A$.

除了以上集合等式以外, 还有一些关于集合运算性质的重要结果.

$$(14) A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B.$$

$$(15) A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B.$$

$$(16) A - B \subseteq A.$$

$$(17) A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A - B = \emptyset.$$

3.3.3 例题

例 3.4 证明 $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

证明: 方法一. 对于任意的 x , 有

$$x \in A - (B - C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap \sim C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \sim (B \cap \sim C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (\sim B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in \sim B \vee x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A \cap C)$$

所以, $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

方法二.

$$A - (B - C)$$

$$= A \cap \sim (B \cap \sim C)$$

$$= A \cap (\sim B \cup C)$$

$$= (A \cap \sim B) \cup (A \cap C)$$

$$= (A - B) \cup (A \cap C)$$

例 3.5 设集合 A 、 B 满足条件 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = E$, 证明 $A = \sim B$.

$$\begin{aligned}
\text{证明: } A &= A \cap E \\
&= A \cap (B \cup \sim B) \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap \sim B) \\
&= \emptyset \cup (A \cap \sim B) \\
&= (B \cap \sim B) \cup (A \cap \sim B) \\
&= (B \cup A) \cap \sim B \\
&= E \cap \sim B \\
&= \sim B
\end{aligned}$$

利用恒等代换不仅可以证明集合等式, 还可以化简集合表达式.

例 3.6 化简下列集合表达式.

- (1) $(B - (A \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$.
 (2) $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$.

解: (1) $(B - (A \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$
 $= (B \cap \sim (A \cap C)) \cup (B \cap (A \cap C))$
 $= B \cap (\sim (A \cap C) \cup (A \cap C))$
 $= B \cap E$
 $= B$

(2) 因为 $A \cup B \subseteq A \cup B \cup C$, $A \subseteq A \cup (B - C)$, 则有
 $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$
 $= (A \cup B) - A$
 $= (A \cup B) \cap \sim A$
 $= (A \cap \sim A) \cup (B \cap \sim A)$
 $= \emptyset \cup (B \cap \sim A)$
 $= B - A$

3.4 包含排斥原理

定义 3.11 设集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 它有 n 个不同元素, 则称集合 A 的基数是 n , 记作 $\text{Card}A = n$ 或 $|A| = n$.

基数是表示集合中所含元素多少的量. 如果集合 A 的基数是 n , 这时称 A 为有限集. 显然, 空集的基数是 0, 即 $|\emptyset| = 0$. 如果 A 不是有限集, 则称 A 为无限集.

现实生活中, 经常会遇到对集合中的元素进行计数的问题, 下面讨论的包含排斥原理是一个广泛使用的计数原理, 可用来处理集合间含有公共元素的情况.

定理 3.2 (包含排斥原理) 设 A, B 为有限集合, 则

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

包含与排斥原理也称为容斥原理.

证明: (1) 当 A, B 不相交, 即 $A \cap B = \emptyset$ 时, 有

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

(2) 当 $A \cap B \neq \emptyset$ 时, 不妨设 $A \cap B = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $B = \{a_1, a_2, \dots, a_k, y_1, y_2, \dots, y_m\}$, 则

$$|A| + |B| - |A \cap B| = n + k + m + k - k$$

$$|A \cup B| = n + m - k$$

从而

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

综上所述, 可知

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

例 3.7 假设 50 名青年中有 16 名是工人, 21 名是学生, 其中既是工人又是学生的青年有 4 名, 问既不是工人又不是学生的青年的有几名?

解: 设 E 为 50 名青年组成的集合, A 为工人组成的集合, B 为学生组成的集合, 则 $|E| = 50$, $|A| = 16$, $|B| = 21$, $|A \cap B| = 4$.

根据包含排斥原理, 有

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 16 + 21 - 4 = 33$$

$$|E| - |A \cup B| = 50 - 33 = 17$$

所以, 既不是工人又不是学生的青年的有 17 名.

利用数学归纳法, 可以将包含排斥原理推广到任意 n 个集合的情况.

一般地, 令有限集 A 的元素具有 n 个不同的性质 $P_1, P_2, \dots, P_n$. A 中具有性质 P_i 的元素组成的子集记为 A_i , $i = 1, 2, \dots, n$; $A_i \cap A_j (i \neq j)$ 表示 A 中同时具有性质 P_i 和 P_j 的元素组成的子集; $A_i \cap A_j \cap A_k (i \neq j \neq k)$ 表示 A 中同时具有性质 P_i, P_j 和 P_k 的元素组成的子集. $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 表示 A 中同时具有性质 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 的元素组成的子集. 那么包含排斥原理可以叙述为如下形式.

定理 3.3 (包含排斥原理的推广) A 中至少具有 n 个性质之一的元素个数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

例 3.8 设 X 是由 1~250 的正整数构成的集合, X 中有多少个元素能被 2、3、7 中的任意一个整除?

解: 设 A 、 B 、 C 分别表示 X 中能被 2、3、7 整除的正整数构成的集合, 则

$$|A| = \left\lfloor \frac{250}{2} \right\rfloor = 125, |B| = \left\lfloor \frac{250}{3} \right\rfloor = 83, |C| = \left\lfloor \frac{250}{7} \right\rfloor = 35,$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3} \right\rfloor = 41, |A \cap C| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 7} \right\rfloor = 17, |B \cap C| = \left\lfloor \frac{250}{3 \times 7} \right\rfloor = 11,$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 5,$$

根据包含排斥原理, 有

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 125 + 83 + 35 - 41 - 17 - 11 + 5 = 179 \end{aligned}$$

所以, X 中能被 2、3、7 中的任意一个整除的正整数有 179 个.

另外, 借助文氏图可以很方便地解决有限集合的计数问题. 首先根据已知条件画出相应的文氏图. 一般地说, 每一条性质决定一个集合, 有多少条性质, 就有多少个集合. 如果没有特殊说明, 任何两个集合一般都画成相交的. 通常从 n 个集合的交集填起, 根据计算的结果将数字逐步填入所有的空白区域. 如果交集的数字是未知的, 可以设为 x . 根据题目中的条件, 列出相应的方程或方程组, 解出未知数即可求得所需要的结果. 下面通过例子说明这一方法.

例 3.9 在 30 个学生中有 18 个爱好音乐, 12 个爱好美术, 15 个爱好体育, 10 个既爱好音乐又爱好体育, 8 个既爱好美术又爱好体育, 11 个既爱好音乐又爱好美术, 但有 6 个学生这 3 种爱好都没有. 试求这 3 种爱好都有的人数.

解: 设 A 、 B 、 C 分别表示爱好音乐、美术、体育的学生的集合. 设 3 种爱好都有的学生人数为 x , 仅爱好音乐的学生人数为 y_1 , 仅爱好美术的学生人数为 y_2 , 仅爱好体育的学生人数为 y_3 , 则既爱好音乐又爱好体育, 但不爱好美术的学生人数为 $10 - x$, 既爱好美术又爱好体育, 但不爱好音乐的学生人数为 $8 - x$, 既爱好音乐又爱好美术, 但不爱好体育的学生人数为 $11 - x$, 文氏图如图 3.7 所示.

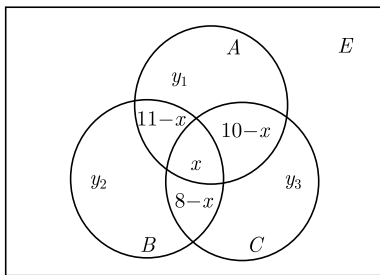


图 3.7 例 3.9 的文氏图

根据题意, 有

$$\begin{cases} 11 - x + 10 - x + x + y_1 = 18 \\ 11 - x + 8 - x + x + y_2 = 12 \\ 10 - x + 8 - x + x + y_3 = 15 \\ 11 - x + 10 - x + 8 - x + x + y_1 + y_2 + y_3 + 6 = 30 \end{cases}$$

解得

$$x = 8, y_1 = 5, y_2 = 1, y_3 = 5$$

所以, 3 种爱好都有的人数为 8 人.

3.5 幂集合与笛卡儿积

在 3.1 节说过, 集合中的元素可以是具体的事物, 也可以是抽象的事物, 甚至可以是其他的集合. 一般地, 以集合为元素构成的集合称为集合族. 下面介绍一个特殊的集合族——幂集合.

3.5.1 幂集合

定义 3.12 设 A 为一个集合, 由 A 的所有子集为元素构成的集合称为 A 的**幂集合**, 简称**幂集**, 记作 $P(A)$ (或 2^A). 符号化表示为

$$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$$

为了求出给定集合 A 的幂集, 首先求出 A 的由低到高元的所有子集, 再将它们组成集合即可.

例 3.10 设 $A = \emptyset, B = \{1, 3, 5\}, C = \{1, \{2, 3\}\}$. 求 A, B 和 C 的幂集.

解: 集合 $A = \emptyset$, 它只有 0 元子集 $\emptyset$, 所以, $P(A) = \{\emptyset\}$.

集合 B 的子集如下:

0 元子集: $\emptyset$.

1 元子集: $\{1\}, \{3\}, \{5\}$.

2 元子集: $\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}$.

3 元子集: $\{1, 3, 5\}$.

所以, $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$.

同理可求, $P(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, \{2, 3\}\}\}$.

例 3.11 设 $|A| = n$. 求 A 的幂集 $P(A)$ 中所包含元素的个数.

解: 由 0 个元素组成的集合 $\emptyset$ 是 A 的 0 元子集, 只有 C_n^0 个.

由 A 中任意一个元素组成的集合是 A 的 1 元子集, 有 C_n^1 个.

由 A 中的 n 个元素组成的集合 A 是 A 的 n 元子集, 有 C_n^n 个.

故 $|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

例 3.12 设 A, B 为任意集合, 证明

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$.

(2) $P(A) = P(B) \Leftrightarrow A = B$.

证明: (1) 一方面, 对于任意的 x , 有

$$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B \Leftrightarrow x \in P(B)$$

故有 $P(A) \subseteq P(B)$.

另一方面, 对于任意的 y , 有

$$y \in A \Leftrightarrow \{y\} \in P(A) \Rightarrow \{y\} \in P(B) \Leftrightarrow y \in B$$

故有 $A \subseteq B$.

综上所述, 可知

$$A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$$

$$(2) P(A) = P(B)$$

$$\Leftrightarrow (P(A) \subseteq P(B)) \wedge (P(B) \subseteq P(A))$$

$$\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

$$\Leftrightarrow A = B$$

3.5.2 笛卡儿积

集合中的元素是无序的, 然而有些元素间却是有次序之分的, 这就需要用与集合不同的结构来表示有序的一组元素. 这个结构用有序 n 元组来表示.

定义 3.13 由两个元素 x 和 y (允许 $x = y$) 按一定的顺序排列成的二元组叫做**有序对** (也称**序偶**), 记作 $\langle x, y \rangle$. 其中 x 称为有序对 $\langle x, y \rangle$ 的**第一元素**, y 称为有序对 $\langle x, y \rangle$ 的**第二元素**.

有序对是由有次序的两个元素组成的, 因此有序对与含有两个元素的集合有以下区别:

(1) 集合 $\{x, y\}$ 的元素间没有次序 (先后) 关系, $\{x, y\}$ 与 $\{y, x\}$ 是同一个集合. 但 $\langle x, y \rangle$ 与 $\langle y, x \rangle$ 在 $x \neq y$ 的情况下应看成是不同的两个有序对.

(2) 集合 $\{x, y\}$ 中 $x \neq y$, 而有序对 $\langle x, y \rangle$ 中 x 与 y 可以相等.

从有序对的定义可知, 有序对 $\langle x, y \rangle$ 具有以下性质:

(1) 当 $x \neq y$ 时, $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$.

(2) $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ 的充要条件是 $x = u$ 且 $y = v$.

在实际问题中, 有时会用到有序 3 元组、有序 4 元组直至有序 n 元组.

定义 3.14 一个有序 n 元组 ($n \geq 3$) 是一个有序对, 它的第一元素是一个有序 $n-1$ 元组 $\langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle$, 第二元素为 x_n , 有序 n 元组记作 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. 即

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

例如, n 维空间中点 M 的坐标就是有序 n 元组 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$.

两个有序 n 元组 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ 的充要条件是 $a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n$.

下面定义两个集合的笛卡儿积.

定义 3.15 设 A, B 为任意两个集合, 由 A 中元素为第一元素, B 中元素为第二元素的所有有序对构成的集合称为 A 和 B 的笛卡儿积, 记作 $A \times B$. 笛卡儿积的符号化表示为

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

从笛卡儿积的定义可知, 若 $\langle x, y \rangle \in A \times B$, 则有 $x \in A$ 且 $y \in B$; 若 $\langle x, y \rangle \notin A \times B$, 则有 $x \notin A$ 或 $y \notin B$.

例如, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 则

$$A \times B = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$B \times A = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle\}$$

$$A \times A = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$$

$$B \times B = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$$

该例中, $A \times B \neq B \times A$, 说明集合的笛卡儿积运算不满足交换律.

对于任意 n 个集合, 也可以定义它们的笛卡儿积.

定义 3.16 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为任意 n 个集合, 称集合

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}$$

为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的笛卡儿积.

特别地, 当 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ 时, 记 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n$.

设 A, B, C 为任意 3 个集合, 笛卡儿积运算有以下性质:

- (1) 不满足交换律, 即 $A \times B \neq B \times A$ (当 $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A \neq B$ 时).
- (2) 不满足结合律, 即 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ (当 $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset$ 时).
- (3) 对任意集合 A, B , 有 $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$.
- (4) 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律, 即

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

只证明第一个等式. 对于任意的 $\langle x, y \rangle$, 有

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &\in A \times (B \cup C) \\ \Leftrightarrow x &\in A \wedge y \in (B \cup C) \\ \Leftrightarrow x &\in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\ \Leftrightarrow (x &\in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle &\in (A \times B) \vee \langle x, y \rangle \in (A \times C) \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle &\in (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

所以, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(5) $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$, 但其逆命题不成立.

证明: 对于任意的 $\langle x, y \rangle$, 有

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &\in A \times B \\ \Rightarrow x &\in A \wedge y \in B \\ \text{因为 } A &\subseteq C \text{ 且 } B \subseteq D \\ \Rightarrow x &\in C \wedge y \in D \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in C \times D$$

所以, $A \times B \subseteq C \times D$.

性质 (5) 的逆命题不成立, 可分以下情况讨论.

① 当 $A = B = \emptyset$ 时, 显然有 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ 成立.

② 当 $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$ 时, 也有 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ 成立. 证明如下:

对于任意的 $x \in A$, 由于 $B \neq \emptyset$, 必存在 $y \in B$, 有

$$x \in A \wedge y \in B \Rightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \Rightarrow \langle x, y \rangle \in C \times D$$

$$\Rightarrow x \in C \wedge y \in D \Rightarrow x \in C$$

所以 $A \subseteq C$.

同理可证 $B \subseteq D$.

③ 当 $A = \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$ 时, 有 $A \subseteq C$ 成立, 但不一定有 $B \subseteq D$ 成立. 例如, 当 $A = \emptyset$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$, $D = \{4\}$ 时, 有 $A \times C = \emptyset \subseteq B \times D$, 但 $B \not\subseteq D$.

④ 当 $A \neq \emptyset$ 且 $B = \emptyset$ 时, 有 $B \subseteq D$ 成立, 但不一定有 $A \subseteq C$ 成立. 反例略.

例 3.13 设 A 、 B 、 C 为任意集合, 判断以下命题是否为真并说明理由.

(1) $A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$.

(2) $A - (B \times C) = (A - B) \times (B - C)$.

(3) 存在集合 A , 使得 $A \subseteq A \times A$.

解: (1) 不一定为真. 当 $A = \emptyset$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$ 时, 有 $A \times B = A \times C$, 但 $B \neq C$.

(2) 不一定为真. 当 $A = B = \{1\}$, $C = \{2\}$ 时, 有

$$A - (B \times C) = \{1\} - \{\langle 1, 2 \rangle\} = \{1\}$$

$$(A - B) \times (B - C) = \emptyset \times \{1\} = \emptyset$$

(3) 为真. 当 $A = \emptyset$ 时, $A \subseteq A \times A$ 成立.

3.6 集合运算与基数概念的扩展

3.6.1 并集、交集的扩展

3.3 节定义的并和交运算称为初级并和初级交, 下面考虑将并和交运算扩展到集合族上.

定义 3.17 设 $\mathcal{A}$ 为一个集合族, 由 $\mathcal{A}$ 中所有元素的元素构成的集合称为 $\mathcal{A}$ 的广义并集, 记为 $\bigcup \mathcal{A}$. 符号化表示为

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x | \exists z (z \in \mathcal{A} \wedge x \in z)\}$$

例 3.14 设 $\mathcal{A}_1 = \{\{a, b, d\}, \{c, d\}, \{d, e, f\}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{b, \{c, d\}\}$, $\mathcal{A}_3 = \{\{a, b\}\}$, $\mathcal{A}_4 = \emptyset$, 求它们的广义并集.

解: $\bigcup \mathcal{A}_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$

$$\bigcup \mathcal{A}_2 = b \cup \{c, d\}$$

$$\bigcup \mathcal{A}_3 = \{a, b\}$$

$$\bigcup \mathcal{A}_4 = \emptyset$$

类似地可以定义集合的广义交集.

定义 3.18 设 $\mathcal{A}$ 为一个非空集合族, 由 $\mathcal{A}$ 中所有元素的公共元素构成的集合称为 $\mathcal{A}$ 的广义交集, 记为 $\bigcap \mathcal{A}$. 符号化表示为

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x | \forall z (z \in \mathcal{A} \rightarrow x \in z)\}$$

对于例 3.14 中的集合, 有 $\bigcap \mathcal{A}_1 = \{d\}$, $\bigcap \mathcal{A}_2 = b \cap \{c, d\}$, $\bigcap \mathcal{A}_3 = \{a, b\}$. 因为 $\bigcap \emptyset$ 不是集合, 它在集合论中是没有意义的.

在后面的叙述中, 若只说并或交, 则都是指集合的初级并或初级交; 如果在并或交前边冠以“广义”两个字, 则指集合的广义并或广义交.

为了使得集合表达式更为简洁, 对集合运算的优先顺序做如下规定: 称广义并、广义交、幂集、绝对补运算为一类运算, 并、交、相对补、对称差运算为二类运算. 一类运算优先于二类运算. 一类运算之间按由右向左的顺序进行运算; 二类运算之间由括号决定运算的先后顺序, 多个括号并排或无括号部分按由左向右的顺序进行运算.

例 3.15 设 $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$, 计算 $\bigcup \mathcal{A}$ 、 $\bigcap \mathcal{A}$ 、 $\bigcup \mathcal{A} - \bigcap \mathcal{A}$.

解: $\bigcup \mathcal{A} = \{a, b, c\}$

$$\bigcap \mathcal{A} = \{a\}$$

$$\bigcup \mathcal{A} = a \cup b \cup c$$

$$\bigcap \mathcal{A} = a$$

$$\bigcup \mathcal{A} = a$$

$$\bigcup \mathcal{A} - \bigcap \mathcal{A} = (a \cup b \cup c) - a = (b \cup c) - a$$

3.6.2 基数概念的扩展

在 3.4 节中, 把有限集的基数定义成集合中元素的个数, 这对于有限集来说是没有问题的; 但对于无限集而言, “元素的个数”这个概念是没有意义的. 考虑到任何两个基数相同的有限集之间存在一一对应的关系, 这使得我们可以将基数的概念扩展到所有集合, 包括有限集和无限集.

定义 3.19 设 A 、 B 为任意两个集合, 称集合 A 和 B 有相同的基数当且仅当存在从 A 到 B 的一一对应.

下面把无限集分为两组: 一组与自然数集合基数相同, 另一组与自然数集合基数不同.

定义 3.20 设 A 为任意一个集合. 如果集合 A 是有限集或与自然数集合的基数相同, 则称集合 A 是可数的, 否则称集合 A 是不可数的.

如果一个无限集合 A 是可数的, 用符号 $\aleph_0$ ($\aleph$ 是希伯来字母表的第一个字母, 读作阿列夫; $\aleph_0$ 读作阿列夫零) 表示集合 A 的基数, 即 $|A| = \aleph_0$; 如果一个无限集合 A 是不可数的, 用符号 $\aleph$ 表示集合 A 的基数, 即 $|A| = \aleph$.

根据无限集可数的定义可知, 无限集 A 是可数的当且仅当可以把集合 A 中的元素列成序列 (下标是正整数), 即集合 A 可以写成 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 的形式. 这是因为从正整数集

合到集合 A 的一一对应 f 可表示成序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, 其中 $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n), \dots$.

通过列举其所包含元素可以证明: 正奇数集、整数集、有理数集都是可数的, 但 0 和 1 之间的实数集、实数集是不可数的.

可数的集合具有以下性质:

- (1) 可数的集合的子集是可数的.
- (2) 可数个可数的集合的并集是可数的.

3.7 习 题

1. 用列元素法表示下列集合.

- (1) $A = \{x | x \text{ 是实数}, x^2 = 4\}$.
- (2) $A = \{x | x \text{ 是小于 } 10 \text{ 的非负整数}\}$.
- (3) $A = \{(x, y) | x, y \text{ 是整数}, (x, y) \text{ 在单位圆上}\}$.

2. 用谓词表示法表示下列集合.

- (1) 全体奇数组成的集合.
- (2) 能够被 3 或 7 整除的正整数集合.
- (3) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

3. 确定下列命题的真假.

- (1) $\emptyset \in \emptyset$.
- (2) $\emptyset \subseteq \emptyset$.
- (3) $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
- (4) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.
- (5) $\emptyset \in \{a\}$.
- (6) $\emptyset \subseteq \{a\}$.
- (7) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$.
- (8) $\{a\} \subseteq \{a, \{a\}\}$.

4. 是否存在集合 A 和 B , 满足 $A \in B$ 且 $A \subseteq B$?

5. 是否存在集合 A, B 和 C , 满足 $A \in B, B \in C$, 但 $A \notin C$?

6. 设 A, B, C 为任意 3 个集合, 判断下列各命题是否为真, 并说明理由.

- (1) 若 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \in C$.
- (2) 若 $A \in B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.
- (3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$, 则 $A \in C$.
- (4) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$, 则 $A \subseteq C$.
- (5) 若 $A \in B$ 且 $B \not\subseteq C$, 则 $A \notin C$.
- (6) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$, 则 $A \notin C$.

7. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 5\}$, 求 $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A, A \oplus B$.

8. 设全集 $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{1, 4\}, B = \{1, 2, 5\}, C = \{2, 4\}$, 求下列各集合.

- (1) $A \cap \sim B$.
 - (2) $(A \cap B) \cup \sim C$.
 - (3) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
 - (4) $\sim (A \cap B)$.
 - (5) $\sim A \cap \sim B$.
 - (6) $\sim B \cup \sim C$.
 - (7) $P(A) \cap P(C)$.
 - (8) $P(A) - P(C)$.
9. 设 A 、 B 、 C 为任意 3 个集合, 判断下列各命题是否为真, 并说明理由.
- (a) 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$.
 - (b) 若 $A \cap B = A \cap C$, 则 $B = C$.
 - (c) 若 $A \oplus B = A \oplus C$, 则 $B = C$.
10. 设 A 、 B 为两个集合, 证明 $A - B = A$ 当且仅当 $A \cap B = \emptyset$.
11. 证明下列各式.
- (1) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.
 - (2) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
 - (3) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.
 - (4) $A - (A - B) = A \cap B$.
12. 化简下列集合表达式.
- (1) $((A \cup B) \cap B) - (A \cup B)$.
 - (2) $A \cup (B - A) - B$.
 - (3) $((A \cup B \cup C) - (B \cup C)) \cup A$.
 - (4) $(A \cap B) - (C - (A \cup B))$.
13. 求 1~1000 的整数中至少能被 5、6 和 8 之一整除的数的个数.
14. 某班学生有 50 人, 会 C 语言的有 40 人, 会 Java 语言的有 35 人, 会 Perl 语言的有 10 人, 以上 3 种语言都会的有 5 人, 都不会的没有. 问上述 3 种语言中会且仅会两种语言的有几人?
15. 75 名儿童到游乐场去玩, 他们可以骑旋转木马, 坐滑行铁道, 乘宇宙飞船. 已知 20 人这 3 种游戏都玩过, 其中 55 人至少玩过其中的两种. 若每种游戏玩一次的费用是 10 元, 游乐场总共收入 1400 元, 求有多少儿童没有玩过其中任何一种.
16. 对 24 名会外语的科技人员进行掌握外语情况的调查. 其统计结果如下: 会英、日、德和法语的人分别为 13、5、10 和 9 人, 其中同时会英语和日语的有 2 人, 会英、德和法语中任两种语言的都是 4 人. 已知会日语的人既不懂法语也不懂德语, 分别求只会一种语言 (英、日、德、法) 的人数和会 3 种语言的人数.
17. 列出下列集合的各元子集, 并求幂集.
- (1) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
 - (2) $\{a, b, \{a, b\}\}$.
 - (3) $\{1, \{\emptyset, 1\}\}$.

18. 已知 $\langle x+2, 4 \rangle = \langle 5, 2x+y \rangle$, 求 x 和 y .
19. 设 $A = \{a, b\}$, 求 $A \times P(A)$ 、 $P(A) \times A$.
20. 下列等式在什么条件下成立?
- (a) $A \times B = \emptyset$.
 - (b) $A \times B = B \times A$.
 - (c) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
21. 设 A 、 B 、 C 为任意集合, 若 $A \times B \subseteq A \times C$, 是否一定有 $B \subseteq C$ 成立?
22. 设 A 、 B 、 C 、 D 为任意集合, 下列各式中哪些成立, 哪些不成立? 对成立的给出证明, 对不成立的举一反例.
- (1) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
 - (2) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.
 - (3) $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$.
 - (4) $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$.
23. 设 $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, 计算下列各式.
- (1) $\cup \mathcal{A}$.
 - (2) $\cap \mathcal{A}$.
 - (3) $\cup \cap \mathcal{A}$.
 - (4) $\cap \cup \mathcal{A}$.
24. 确定下列集合是否可数.
- (1) 负整数集.
 - (2) 偶数集.
 - (3) 0 和 $1/2$ 之间的实数集合.
 - (4) 由 7 的整数倍构成的集合.