

第3章 复变函数的积分

复变函数的积分(简称复积分)是研究解析函数的一个重要工具,解析函数的许多重要性质都要通过复积分来证明.本章在介绍复积分的概念、性质与基本计算方法的基础上,重点研究柯西-古萨定理和柯西积分公式,它们是复变函数的基本理论和基本公式,在复变函数的理论研究和实际应用中有着非常重要的地位.

3.1 复变函数积分的概念与性质

3.1.1 有向曲线

设曲线 C 为复平面内的一条光滑曲线或按段光滑曲线, A 和 B 是曲线 C 的两个端点(图 3.1). 对曲线 C 而言, 有两个可能方向: 从 A 到 B 和从 B 到 A . 若规定其中一个方向为正方向, 则称 C 为有向曲线, 即把带有方向的光滑曲线或按段光滑曲线称为有向曲线. 若规定 A 为起点, B 为终点, 除特殊声明之外, 总把起点 A 到终点 B 的方向称为 C 的正方向, 而把终点 B 到起点 A 的方向称为 C 的负方向, 记为 C^- .

若 C 为简单闭曲线(图 3.2), 其正方向规定为: 当观察者沿正方向行走时, C 内部邻近观察者的点始终位于他的左手边, 即逆时针方向.

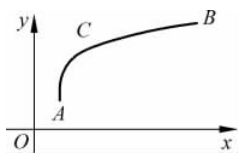


图 3.1

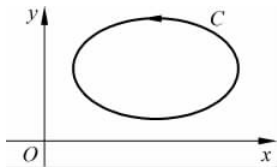


图 3.2

3.1.2 复变函数积分的概念

定义 3.1 设有向曲线 C 是平面上的一条光滑或按段光滑曲线, 其起点为 A , 终点为 B (图 3.3). 函数 $\omega = f(z)$ 在 C 上有定义. 将曲线 C 任意分成 n 个小弧段, 设分

点依次为 $A = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = B$. 在每个小弧段 $\overline{z_{k-1}z_k}$ 上任取一点 ζ_k , 作和式 $\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$, 其中 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. 当各个弧段的长度的最大值 λ 趋于零时, 这个和式的极限都存在并且相等, 则称函数 $\omega = f(z)$ 沿曲线 C 从 A 到 B 可积, 并称这个极限值为函数 $\omega = f(z)$ 沿曲线 C 从 A 到 B 的积分, 记作

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k.$$

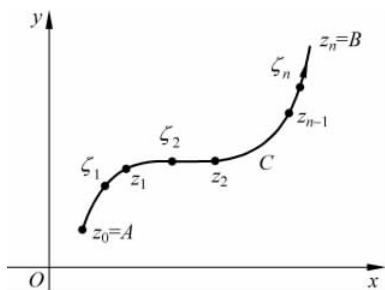


图 3.3

3.1.3 复变函数积分存在条件

定理 3.1 若 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在光滑曲线 C 上连续, 则 $f(z)$ 沿曲线 C 可积, 且

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \quad (3.1)$$

证明 设 $z_k = x_k + i y_k$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i \Delta y_k$, $\zeta_k = \xi_k + i \eta_k$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) + i v(\xi_k, \eta_k)] [\Delta x_k + i \Delta y_k] \\ &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k], \end{aligned}$$

上式右端的两个和式均为实函数的第二类曲线积分的积分和. 由于 $f(z)$ 在曲线 C 上连续, 所以 u, v 在曲线 C 上连续. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] &= \int_C u dx - v dy, \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] &= \int_C v dx + u dy. \end{aligned}$$

故

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

公式(3.1)在形式上可以看作是 $f(z) = u + iv$ 与 $dz = dx + idy$ 相乘后求积分而得到

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C u dx + iudy + ivdx - vdy \\ &= \int_C u dx - vdy + i \int_C v dx + udy.\end{aligned}$$

3.1.4 复变函数积分的计算——参数方程法

利用公式(3.1),可将复变函数积分转化为实函数的第二类曲线积分,而第二类曲线积分可以进一步转化为定积分.

设光滑曲线 C 的复参数方程为

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (t: \alpha \rightarrow \beta).$$

则 $dz = [x'(t) + iy'(t)]dt$, $f(z) = f[z(t)] = u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]$.

根据公式(3.1),得

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy \\ &= \int_a^\beta \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\} dt \\ &\quad + i \int_a^\beta \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\} dt \\ &= \int_a^\beta \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t) \\ &\quad + i\{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}\} dt \\ &= \int_a^\beta \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}[x'(t) + iy'(t)] dt \\ &= \int_a^\beta f[z(t)]z'(t) dt,\end{aligned}$$

即

$$\int_C f(z) dz = \int_a^\beta f[z(t)]z'(t) dt. \quad (3.2)$$

公式(3.2)是我们计算复变函数积分的一种常用方法,常称为**参数方程法**.其关键在于正确表示出积分曲线 C 的复参数方程,同时需要注意的是,积分曲线 C 的起点与终点分别对应定积分的下限和上限,下限不一定小于上限.

如果积分曲线 C 是由 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 等光滑曲线依次连接而成的按段光滑曲线,则

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz.$$

例 1 计算 $\int_C \bar{z} dz$, 其中 C (图 3.4)为

- (1) 从原点到 $1+i$ 的直线段 C_1 ;
 (2) 沿抛物线 $y=x^2$ 从原点到 $1+i$ 曲线段 C_2 .

解 (1) 直线段 C_1 的复参数方程为

$$z = (1+i)t \quad (t: 0 \rightarrow 1),$$

于是, $dz = (1+i)dt$, 所以

$$\int_{C_1} \bar{z} dz = \int_0^1 (1-i)t(1+i)dt = 2 \int_0^1 t dt = 1.$$

- (2) 设 $x=t$, 则 $y=t^2$, 于是曲线段 C_2 的复参数方程为

$$z = z(t) = t + it^2 \quad (t: 0 \rightarrow 1),$$

$dz = (1+2ti)dt$, 于是

$$\int_C \bar{z} dz = \int_{C_2} \bar{z} dz = \int_0^1 (t - t^2 i)(1 + 2ti)dt = \int_0^1 [(t + 2t^3 i) + t^2 i]dt = 1 + \frac{i}{3}.$$

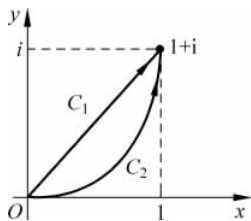


图 3.4

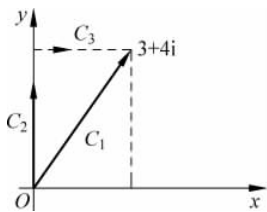


图 3.5

例 2 计算 $\int_C z dz$, 其中 C (图 3.5) 为

- (1) 从原点到 $3+4i$ 的直线段 C_1 ;
 (2) 从原点到点 $4i$ 的直线段 C_2 , 与从 $4i$ 到 $3+4i$ 的直线段 C_3 所连接而成的折线.

解 (1) 直线段 C_1 的参数方程为 $z = (3+4i)t$ ($t: 0 \rightarrow 1$), 所以, $dz = (3+4i)dt$, 于是

$$\int_C z dz = \int_{C_1} z dz = \int_0^1 (3+4i)^2 t dt = (3+4i)^2 \int_0^1 t dt = \frac{(3+4i)^2}{2} = -\frac{7}{2} + 12i.$$

- (2) 直线段 C_2 与 C_3 的参数方程分别为

$$C_2: z = 4it \quad (t: 0 \rightarrow 1), \quad dz = 4i dt,$$

$$C_3: z = 4i + 3t \quad (t: 0 \rightarrow 1), \quad dz = 3 dt,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_C z dz &= \int_{C_2} z dz + \int_{C_3} z dz = \int_0^1 (4it) \cdot 4i dt + \int_0^1 (3t + 4i) \cdot 3 dt \\ &= -16 \int_0^1 t dt + 9 \int_0^1 t dt + 12i \int_0^1 dt = -\frac{7}{2} + 12i. \end{aligned}$$

例2的结果表明, $f(z)=z$ 沿 C_1 与 C_2+C_3 的积分值相同. 进一步, 我们还可证明 $f(z)=z$ 沿连接原点到 $3+4i$ 的任何路径 C 的积分值都相同, 即积分与路径无关, 或者说沿复平面上任何闭曲线的积分为零. 事实上

$$\int_C z dz = \int_C (x+iy)(dx+idy) = \int_C x dx - y dy + i \int_C y dx + x dy,$$

由格林公式可知, 上式右端的两个曲线积分与路径无关, 故 $\int_C z dz$ 的值与积分路径无关.

例3 计算 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, 其中 C 是以 z_0 为中心, r 为半径的正向圆周(图 3.6), n 为整数.

解 曲线 C 的复参数方程为

$$z = z_0 + re^{i\theta} (\theta: 0 \rightarrow 2\pi),$$

所以 $dz = ire^{i\theta} d\theta$, 于是

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\theta})^{n+1}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-n\theta i} d\theta = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i \sin n\theta) d\theta. \end{aligned}$$

当 $n=0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = i \int_0^{2\pi} (\cos 0 - i \sin 0) d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i,$$

当 $n \neq 0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i \sin n\theta) d\theta = 0,$$

所以

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}. \quad (3.3)$$

该结论非常重要, 在计算复变函数沿封闭曲线的积分时经常用到, 可作为一个公式应用. 其特点是积分值与圆心 z_0 和半径 r 无关. 事实上, 下一节我们将看到, 对包含 z_0 的任意简单闭曲线 C 而言, 该结论都成立.

3.1.5 复变函数积分的基本性质

从积分的定义我们可以推导复变函数积分存在如下一些简单性质, 它们与实变函数中第二类曲线积分的性质类似:

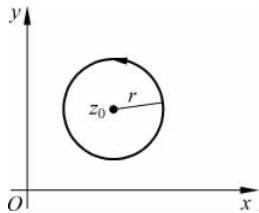


图 3.6

$$(1) \int_C f(z) dz = - \int_{C^-} f(z) dz;$$

$$(2) \int_C k f(z) dz = k \int_C f(z) dz (k \text{ 为常数});$$

$$(3) \int_C [f(z) \pm g(z)] dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz;$$

$$(4) \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz (\text{其中 } C = C_1 + C_2);$$

(5) (估值不等式) 设曲线 C 的长度为 L , 函数 $f(z)$ 在曲线 C 上满足 $|f(z)| \leq M$, 则

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq ML.$$

证明 设 $|\Delta z_k|$ 表示 z_k 与 z_{k-1} 两点间的距离, Δs_k 表示该两点的弧长, 显然 $|\Delta z_k| \leq \Delta s_k$, 所以

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leq ML.$$

两端取极限, 得

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq ML.$$

例 4 证明 $\left| \int_C (x^2 + iy^2) dz \right| \leq \pi$, 其中 C 为连接 $-i$ 到 i 的右半圆周.

证明 设 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

则

$$|f(z)| = \sqrt{x^4 + y^4} = \sqrt{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} = \sqrt{1 - 2\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta} \leq 1.$$

而 C 的长度为 π . 所以, 由估值不等式得

$$\left| \int_C (x^2 + iy^2) dz \right| \leq \pi.$$

3.2 柯西-古萨定理与复合闭路定理

3.2.1 柯西-古萨定理

回忆 3.1 节所举的例子, 例 1 中的被积函数 $f(z) = \bar{z} = x - iy$ 在复平面内处处不解析, $\int_C \bar{z} dz$ 的值与连接起点与终点的路线有关. 例 2 中的被积函数 $f(z) = z$ 在

复平面内处处解析, $\int_C z dz$ 的值与积分路线无关, 即沿任何封闭曲线的积分为零.

例 3 当 $n=0$ 时, 被积函数 $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$, 它在以 z_0 为中心, r 为半径的圆周内不是处处解析, $\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \neq 0$. 如果除去圆心 z_0 , 虽然此时被积函数 $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ 在区域 $0 < |z-z_0| < r$ 内处处解析, 但该区域不是单连通域. 由此可见, 复变函数的积分值是否与积分路线无关, 或沿封闭曲线的积分是否为零, 可能与被积函数的解析性和积分区域的单连通性有关. 如下柯西-古萨定理, 肯定地回答了上述问题.

定理 3.2 (柯西-古萨定理) 如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析, 则函数 $f(z)$ 沿 D 内任意一条封闭曲线 C (图 3.7) 的积分为零, 即

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

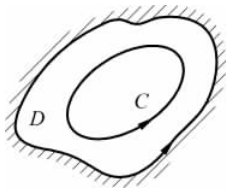


图 3.7

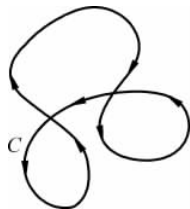


图 3.8

证明 我们仅在假设“ $f'(z)$ 在 D 内连续”和 C 为简单闭曲线的条件下 (实际上该假设是多余的), 证明定理的结论.

令 $f(z) = u + iv$, 由公式 (3.1) 得

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

由于 $f'(z)$ 在 D 内连续, 所以 u, v 的一阶偏导 u_x, u_y, v_x, v_y 存在且连续, 并满足 C-R 方程

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

于是由格林公式有

$$\int_C u dx - v dy = \iint_D (-v_x - u_y) dx dy = 0, \quad \int_C v dx + u dy = \iint_D (u_x - v_y) dx dy = 0.$$

因此

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

注意 定理 3.2 中的积分曲线 C 不一定要是简单闭曲线. 事实上, 对任意一条封闭曲线 C , 都可以看作是由有限多条简单闭曲线 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 衔接而成, 如图 3.8 所示.

柯西-古萨定理是研究复变函数解析性的理论基础,它是由法国数学家柯西(Cauchy)于 1825 年提出来的,又称为柯西积分定理. 1900 年,法国数学家古萨(Goursat)给出了完整的证明,但证明过程较复杂,我们略去其完整的证明. 柯西-古萨定理为计算复变函数沿封闭曲线的积分提供了一种简单方法,但在实际应用中,利用其等价形式更为方便.

定理 3.2' (柯西-古萨定理的等价形式) 设 C 为封闭曲线, $f(z)$ 在 C 及其内部解析,则 $f(z)$ 沿封闭曲线 C 的积分为零. 即

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

例 1 计算 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z-2} dz$.

解 因为 $f(z) = \frac{1}{z-2}$ 在 $|z| \leq 1$ 内解析,由柯西-古萨定理,得

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z-2} dz = 0.$$

3.2.2 复合闭路定理

柯西-古萨定理可以推广到多连通域的情形,为方便叙述,我们先引入复合闭路的概念.

定义 3.2 设 C 为一简单闭曲线, $C_1, C_2, \dots, C_n$ 是 C 内部的简单闭曲线,它们互不相交互不包含,以 $C, C_1, C_2, \dots, C_n$ 为边界构成了一个多连通域 D (图 3.9),则称多连通域 D 的边界 $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \dots + C_n^-$ 为**复合闭路**.

我们规定复合闭路的正方向为:当观察者沿复合闭路的正方向绕行时,区域 D 中邻近观察者的点总位于他的左手边.即外边界 C 取逆时针方向,内边界 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 取顺时针方向.

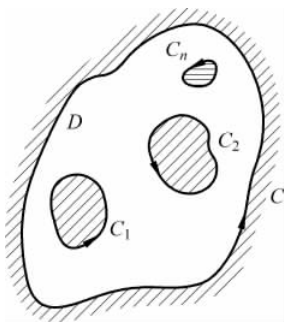


图 3.9

定理 3.3 (复合闭路定理) 设 D 为复合闭路 $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \dots + C_n^-$ 所围成的多连通域, $f(z)$ 在 $\bar{D} = D + \Gamma$ 上解析,则

$$(1) \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad (3.4)$$

其中 Γ 为复合闭路的正方向,即 C 取逆时针方向, $C_1, C_2, \dots, C_n$ 取顺时针方向.

$$(2) \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz. \quad (3.5)$$

其中 C 及 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 均取正方向, 即均取逆时针方向.

证明 不失一般性, 我们证明 $n=2$ 的情形. 分别在曲线 C, C_1, C_2 上取两点 (图 3.10), 用光滑弧段连接 AB, EF, GH , 且这些弧段除端点之外, 均在区域 D 内. 则弧段 AB, EF, GH 将区域 D 划分成了两个单连通域, 于是由柯西-古萨定理的等价形式, 得

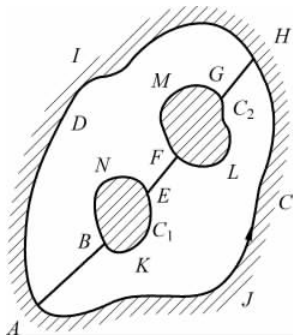


图 3.10

$$\oint_{ABNEFMGHIA} f(z) dz = 0, \quad \oint_{AJHGLFEKBA} f(z) dz = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{AB} f(z) dz + \int_{BNE} f(z) dz + \int_{EF} f(z) dz + \int_{FMG} f(z) dz + \int_{GH} f(z) dz + \int_{HIA} f(z) dz &= 0, \\ \int_{AJH} f(z) dz + \int_{HG} f(z) dz + \int_{GLF} f(z) dz + \int_{FE} f(z) dz + \int_{EKB} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz &= 0, \end{aligned}$$

两式相加, 得

$$\int_{AJH} f(z) dz + \int_{HIA} f(z) dz + \int_{BNE} f(z) dz + \int_{EKB} f(z) dz + \int_{FMG} f(z) dz + \int_{GLF} f(z) dz = 0,$$

即

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 0$$

或

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz.$$

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, C_1 和 C_2 为 D 内的任意两条简单闭曲线, C_2 在 C_1 的内部 (图 3.11), 则 $f(z)$ 在以 C_1 和 C_2 为边界的复连通域 D_1 内及边界上解析, 由复闭合路定理的等价形式, 得

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz.$$

该等式表明了如下一个重要事实:

定理 3.4(闭路变形原理) 设 $f(z)$ 为区域 D 内的解析函数, C 为区域 D 内的任意一条封闭曲线, 则积分 $\oint_C f(z) dz$ 不因封闭曲线 C 在区域内作连续变形而改变它的值, 只要在变形过程中封闭曲线 C 不经过函数 $f(z)$ 的不解析点.

例 2 计算积分 $\oint_{C=C_1+C_2} \frac{e^z}{z^3} dz$, 其中 $C_1: |z|=R$, 方向取逆时针方向; $C_2: |z|=r$, 方向取顺时针方向, $0 < r < R$ (图 3.12).

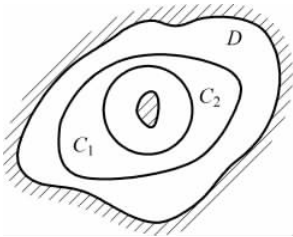


图 3.11

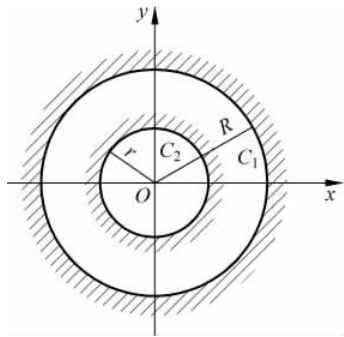


图 3.12

解 因为 $\frac{e^z}{z^3}$ 在 C_1, C_2 及所围成的圆环内解析, 则由复合闭路定理, 得

$$\oint_{C=C_1+C_2} \frac{e^z}{z^3} dz = 0.$$

例 3 计算 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, 其中 C 为包含 z_0 的任意简单闭曲线, n 为整数.

解 以 z_0 为圆心, r 为半径, 在 C 的内部作小圆周 $C_1: |z-z_0|=r$, (图 3.13), 则由复合闭路定理和 3.1 节例 3 的结论, 得

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

例 4 计算 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz$, 其中 C 为包含 0 与 1 的任意简单闭曲线.

解 方法一 因为 $\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{z+(z-1)}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$,

$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \oint_C \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \right) dz = \oint_C \frac{1}{z} dz + \oint_C \frac{1}{z-1} dz = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i.$$

方法二 因被积函数 $f(z) = \frac{2z-1}{z^2-z}$ 在 C 内有两个不解析点 $z=0$ 及 $z=1$, 所以