# 第5章 不确定知识表示和推理

现有的知识表示和推理技术往往把研究和处理对象限定在特定的专业知识领域；对不具有规范表示的知识领域，现有技术的适用性就大为降低。近年来，由于实际应用的推动，知识处理研究发生了许多重大变化，已经从注重研究知识的形式转向研究知识的内容，从注重研究良构知识(well-structured knowledge)转向研究病构知识(ill-structured knowledge)，从注重研究封闭性知识转向研究开放性知识，从研究内涵完整、协调和精确的知识转向研究内涵不完整、不协调和不精确的知识，这些趋势可以用"非规范知识处理"的概念概括。所谓知识的非规范性，是指知识内涵的难处理性，包括知识的不确定性(模糊知识、不确定、随机和不精确知识)，或知识的不完整性(内容不完整的知识和结构不完整的知识)，或知识的不协调性(含矛盾的知识、带噪声的知识和含冗余的知识)，或知识非恒常性(时变知识和启发式知识)。

本章讨论处理数据的不精确(inexactness)和知识的不确定(uncertainty)所需要的一些工具和方法，主要包括在经验基础上抽象得到的确定性因子方法、基于 Bayes 理论的概率推理、基于信任测度函数的证据理论、基于模糊集合论的模糊推理等技术。

## 5.1 概述

诸如"鸟是会飞的"及"常在河边走，哪能不湿鞋"这样的常识(common sense)和常识推理(common sense reasoning)，我们如何形式化？

这里说的常识、常识推理与通常的逻辑推理不同。首先，常识具有不确定性。一个常识可能有众多的例外。一个常识可能是一种尚无理论依据或者缺乏充分验证的经验。其次，常识往往对环境有极强的依存性。由于常识的这种不确定性，决定了常识推理的所谓非单调性，即依据常识进行通常的逻辑推理，但保留对常识的不确定性及环境的变迁造成的推理失误的修正权。非单调推理技术试图解决不确定性推理问题。

既然人的信念常常是不确定的，就存在关于信念强度的问题，即确定性

程度到底为多少。最常见的方法是把指示确定性程度的数据附加到推理规则,并由此研究不确定强度的表示和计算问题。

陆汝钤院士曾主持一项国家自然科学基金重大项目"非规范知识处理的基本理论和核心技术"。所谓知识的非规范性,是指知识内涵的难处理性,它包括知识的不确定性、知识的不完整性、知识的不协调性和知识的非恒常性。该项目的主要研究目标和研究内容是,从理论、技术和示范应用 3 个层面对非规范知识处理进行深入研究。在理论上,要研究非规范知识的数学理论、逻辑理论和认知理论;在技术上,要研究非规范知识的表示和建模、非规范知识的获取和融合,以及非规范知识的通信和传播;在示范应用上,要研究几个特定领域的非规范知识,开发海量非规范知识库、示范性语义网上知识获取和知识编辑器,以及通用网上的知识获取和知识编辑器。

### 5.1.1 什么是不确定推理

不确定性是智能问题的本质特征,无论是人类智能,还是人工智能,都离不开不确定性的处理。可以说,智能主要反映在求解不确定性问题的能力上。

推理是人类的思维过程,它是从已知事实出发,通过运用相关的知识逐步推出某个结论的过程。其中,已知事实和知识是构成推理的两个基本要素。已知事实又称为证据,用以指出推理的出发点及推理时应使用的知识;而知识是推理得以向前推进,并逐步达到最终目标的依据。第 2 章介绍的演绎推理是一种精确的推理,因为它处理的是精确事实和知识,并运用确定的推理方法得出精确的结论。

在客观世界中,由于事物发展的随机性和复杂性,人类认识的不完全、不可靠、不精确和不一致性,自然语言中存在的模糊性和歧义性,使得现实世界中的事物以及事物之间的关系极其复杂,带来了大量的不确定性。如果采用确定性的经典逻辑处理不确定性,就需要把知识或思维行为中原本具有的不确定性划归为确定性处理,这无疑会舍去事物的某些重要属性,造成信息流失,妨碍人们做出最好的决定,甚至可能做出错误的决定。大多数要求智能行为的任务都具有某种程度的不确定。不确定性可以理解为在缺少足够信息的情况下做出判断。

确定性推理是建立在经典逻辑基础上的,经典逻辑的基础之一就是集合论,集合论中的隶属概念是一个非常精确和确定的概念,一个元素是否属于某个集合是非常明确的。这在很多实际情况中是很难做到的,如高、矮、胖、瘦就很难精确地区分。因此,经典逻辑不适合用来处理不确定性。针对不同的不确定性起因,人们提出了不同的理论和方法,以建立适合描述不确定和不精确的新的逻辑模型。因此,可以说不确定推理是建立在非经典逻辑基础上的一种推理,它是对不确定性知识的运用与处理。严格地说,不确定性推理就是从不确定性初始证据出发,通过运用不确定性的知识,最终推出具有一定程度的不确定性,但却是合理或者近乎合理的结论的思维过程。

### 5.1.2 不确定推理要解决的基本问题

证据和规则的不确定性,导致所产生的结论的不确定性。不确定性推理反映了知识

不确定性的动态积累和传播过程,推理的每一步都需要综合证据和规则的不确定因素,通过某种不确定性测度,寻找尽可能符合客观实际的计算模式,通过不确定测度的传递计算,最终得到结果的不确定测度。

因此,在基于规则的专家系统中,不确定性表现在证据、规则和推理3个方面,需要对专家系统中的事实与规则给出不确定性描述,并在此基础上建立不确定性的传递计算方法。因此,要实现对不确定性知识的处理,必须解决不确定知识的表示问题、不确定信息的计算问题,以及不确定性表示和计算的语义解释问题。

**1. 表示问题**

表示问题指的是采用什么方法描述不确定性。通常有数值表示和非数值的语义表示两种方法。数值表示便于计算、比较;非数值表示是一种定性的描述。

专家系统中的"不确定性"一般分为两类:一是规则的不确定性;二是证据的不确定性。

(1) 规则的不确定性($E \rightarrow H, f(H,E)$),表示相应知识的不确定性程度,称为知识或规则强度。

(2) 证据的不确定性($E, C(E)$),表示证据$E$为真的程度。它有两种来源:初始证据(由用户给出);前面推出的结论作为当前证据(通过计算得到)。

一般来说,证据不确定性的表示方法应与知识不确定性的表示方法保持一致,证据的不确定性通常也是一个数值表示,它代表相应证据的不确定性程度,称为动态强度。

**2. 计算问题**

计算问题主要指不确定性的传播与更新,即获得新信息的过程。它是在领域专家给出的规则强度和用户给出的原始证据的不确定性的基础上,定义一组函数,求出结论的不确定性度量。它主要包括如下3个方面。

1) 不确定性的传递算法

在每一步推理中,如何把证据及规则的不确定性传递给结论。在多步推理中,如何把初始证据的不确定性传给结论。

也就是说,已知规则的前提$E$的不确定性$C(E)$和规则强度$f(H,E)$,求假设$H$的不确定性$C(H)$,即定义函数$f_1$,使得:

$$C(H) = f_1(C(E), f(H,E))$$

2) 结论不确定性合成

推理中有时会出现这样一种情况:用不同的知识进行推理,得到相同结论,但不确定性的程度却不相同。

即已知由两个独立的证据$E_1$和$E_2$求得的假设$H$的不确定性度量$C_1(H)$和$C_2(H)$,求证据$E_1$和$E_2$的组合导致的假设$H$的不确定性$C(H)$,即定义函数$f_2$,使得:

$$C(H) = f_2(C_1(E), C_2(H))$$

3) 组合证据的不确定性算法

即已知证据$E_1$和$E_2$的不确定性度量$C(E_1)$和$C(E_2)$,求证据$E_1$和$E_2$的析取和合取的不确定性,即定义函数$f_3$和$f_4$,使得:

$$C(E_1 \wedge E_2) = f_3(C(E_1), C(E_2))$$

$$C(E_1 \vee E_2) = f_4(C(E_1), C(E_2))$$

目前关于组合证据的不确定性的计算已经提出了多种方法，用得最多的是如下 3 种。

(a) 最大最小法

$$C(E_1 \wedge E_2) = \min(C(E_1), C(E_2))$$
$$C(E_1 \vee E_2) = \max(C(E_1), C(E_2))$$

(b) 概率方法

$$C(E_1 \wedge E_2) = C(E_1) \times C(E_2)$$
$$C(E_1 \vee E_2) = C(E_1) + C(E_2) - C(E_1) \times C(E_2)$$

(c) 有界方法

$$C(E_1 \wedge E_2) = \max\{0, C(E_1) + C(E_2) - 1\}$$
$$C(E_1 \vee E_2) = \min\{1, C(E_1) + C(E_2)\}$$

**3. 语义问题**

语义问题指上述表示和计算的含义是什么，如 $C(H,E)$可理解为当前提 $E$ 为真时，对结论 $H$ 为真的一种影响程度，$C(E)$可理解为 $E$ 为真的程度。

目前，在人工智能领域，处理不确定性问题的主要数学工具有概率论和模糊数学。概率论与模糊数学研究和处理的是两种不同的不确定性。概率论研究和处理随机现象，事件本身有明确的含义，只是由于条件不充分，使得在条件和事件之间不能出现决定性的因果关系(随机性)。模糊数学研究和处理模糊现象，概念本身就没有明确的外延，一个对象是否符合这个概念是难以确定的(属于模糊的)。无论采用什么数学工具和模型，都需要对规则和证据的不确定性给出度量。

规则的不确定性度量 $f(H,E)$需要定义在下述 3 个典型情况下的取值。

(1) 若 $E$ 为真，则 $H$ 为真，这时 $f(H,E)$的值。

(2) 若 $E$ 为真，则 $H$ 为假，这时 $f(H,E)$的值。

(3) $E$ 对 $H$ 没有影响，这时 $f(H,E)$的值。

对于证据的不确定性度量 $C(E)$，需要定义在下述 3 个典型情况下的取值。

(1) $E$ 为真，$C(E)$的值。

(2) $E$ 为假，$C(E)$的值。

(3) 对 $E$ 一无所知，$C(E)$的值。

对于一个专家系统，一旦给定了上述不确定性的表示、计算及其相关的解释，就可以从最初的观察证据出发，得出相应结论的不确定性程度。专家系统的不确定性推理模型指的就是证据和规则的不确定性的测度方法以及不确定性的组合计算模式。

## 5.1.3 不确定性推理方法分类

关于不确定性推理方法的研究，主要沿两条不同的路线发展。

(1) 在推理级扩展不确定性推理的方法：其特点是把不确定证据和不确定的知识分别与某种量度标准对应起来，并且给出更新结论不确定性算法，从而建立不确定性推理模式。通常把这一类方法统称为模型方法。

(2) 在控制策略级处理不确定性的方法：其特点是通过识别领域中引起不确定性的某些特征及相应的控制策略限制或减少不确定性对系统产生的影响，这类方法没有处理

不确定性的统一模型,其效果极大地依赖于控制策略,把这类方法统称为控制方法。

模型方法又分为数值方法及非数值方法两类。数值方法是对不确定性的一种定量表示和处理方法。非数值方法是指除数值方法外的其他各种处理不确定性的方法,如古典逻辑方法和非单调推理方法等。

在数值方法中,概率方法是重要的方法之一。概率论有着完善的理论和方法,而且具有现成的公式实现不确定性的合成和传递,因此可以用作度量不确定性的重要手段。

纯概率方法虽然有严格的理论依据,但通常要求给出事件的先验概率和条件概率,而这些数据又不易获得,因此使其应用受到限制。为了解决这个问题,人们在概率论的基础上发展起一些新的方法和理论,主要有主观概率论(又称主观 Bayes 方法)、可信度方法、证据理论等。

(1) 主观 Bayes 方法:它是 PROSPECTOR 专家系统中使用的不确定推理模型,是对 Bayes 公式修正后形成的一种不确定推理方法,为概率论在不确定推理中的应用提供了一条途径。

(2) 可信度方法:它是 MYCIN 专家系统中使用的不确定推理模型,它以确定性理论为基础,方法简单、易用。

(3) 证据理论:它通过定义信任函数、似然函数,把知道和不知道区别开。这些函数满足比概率函数的公理弱的公理,因此,概率函数是信任函数的一个子集。

基于概率的方法虽然可以表示和处理现实世界中存在的某些不确定性,在人工智能的不确定性推理方面占有重要地位,但它们没有把事物自身具有的模糊性反映出来,也不能对其客观存在的模糊性进行有效推理。Zadeh 等人提出的模糊集理论及其在此基础上发展的可能性理论弥补了这一缺憾。概率论处理的是由随机性引起的不确定性,可能性理论处理的是由模糊性引起的不确定性。可能性理论对由模糊性引起的不确定性的表示及处理开辟了一种新的解决途径,并得到广泛的应用。

## 5.2 非单调逻辑

为了形式地表述常识,并在常识间进行有效的形式推理,20 世纪 70 年代末,人们提出了非单调逻辑(non-monotonic logic)。

传统逻辑系统都是单调的,因为由已知事实推出的逻辑结论绝不会在已知事实增加时反而丧失。更形式地,可定义逻辑系统的单调性如下。

**定义 5.1** 设 FS 为一逻辑系统,称 FS 是单调的(monotonic),如果对于 FS 的任意公式集合 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_1\subseteq\Gamma_2$ 蕴涵 $\mathrm{Th}(\Gamma_1)\subseteq\mathrm{Th}(\Gamma_2)$。这里,$\mathrm{Th}(\Gamma)$ 表示公式集合 $\{A\mid\Gamma\vdash_{FS}A\}$,即 $\Gamma$ 的演绎结果的集合。

已讨论的所有逻辑系统都是单调的。可是,常识推理却并不具有这种单调性。当你告诉我“a 是一只鸟”时,我立即会据常识“鸟是会飞的”进行推理,做出结论“a 是会飞的”。可当你又告诉我“a 是一只鸵鸟”,我自然会立即撤回上述结论,相反会据常识“鸵鸟不会飞”而做出结论“a 是不会飞的”。如果我足够机敏,还应对常识“鸟是会飞的”做出修正,例如,改为“鸟是会飞的,除非它是鸵鸟”。在上述推理过程中,第一个结论在已知事实增加时会自行撤销(而不是仍然接受它),并修改推理的依据(而不是让互相矛盾的依据共

存,因而被迫接受一切断言)。

常识推理的这种特性称为非单调性,具有非单调性的推理称为非单调推理,而使用非单调推理的逻辑系统称为非单调逻辑。和定义 5.1 相对,可形式地定义非单调性。

**定义 5.2** 逻辑系统 FS 称为非单调的,如果存在公式集合 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$,$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$,但 $\mathrm{Th}(\Gamma_1) \not\subseteq \mathrm{Th}(\Gamma_2)$。

要使机器具有智能,就应当使它具有进行常识推理的能力,具有依据“不完全的信息”和“不可靠的经验”进行推理及预测的能力,因此使机器具有这种非单调的逻辑推理机制是非常必要的。

## 5.2.1 非单调逻辑的产生

非单调逻辑这个名词的第一次出现,大致是在 20 世纪 70 年代中期,但在人工智能对推理机制的模拟的研究中,非单调推理的运用则更早些。

最早的 Prolog 版本中就已经有了“封闭系统假设”,即当系统推不出 $A$ 时,便认为 $\neg A$ 成立。当系统的知识库扩充时,可能推出 $A$,那时 $\neg A$ 便不再为系统所接受。

PLANNER 系统则更进一步,其中设有运算 THNOT,THNOT($A$)表示“试图证明 $A$,若不成功,则 THNOT($A$)为真”。不仅如此,为了便于在运行中更新系统,PLANNER 还设有前提表和删除表,可随时删除那些系统已经导出而又在系统更改后不再成立的事实。

采用“封闭系统假设”或算符 THNOT 的方式都有一个明显的缺点,即必须保证“$A$ 是否可证”是可判定的,而这并不总是可以办到的。大家知道,一阶逻辑是不可判定的。此外,系统还可能遇到“循环论证”的情况。例如,系统已知

$$A(f(x)) \rightarrow B(x)$$
$$B(f(x)) \rightarrow C(x)$$
$$C(f(x)) \rightarrow A(x)$$

要证 $A(a)$。这时系统既无法确定“$A(a)$可证”,也无法确定“$A(a)$不可证”,因为要证 $A(a)$,须证 $C(f(a))$,$B(f(f(a)))$,$A(f(f(f(a))))$,…。

在用逻辑演算刻画状态转换、动作规划时,非单调性显得尤为重要,因为状态、动作都不是一成不变的。

在规划生成系统 STRIPS 中,用状态变换的规则模拟机器人的动作。这些规则均由 3 部分组成。

(1) 前提,规则执行的前提。

(2) 删除表,规则执行后状态描述中应当删除的事实表。

(3) 添加表,规则执行后状态描述中应当添加的事实表。

**例 5.1** 表示机器人拾起一块积木的动作可用规则 Pickup($x$),它由以下 3 部分组成。

| | |
|---|---|
| 前提:ontable($x$) | ($x$ 在桌子上) |
| clear($x$) | ($x$ 上无他物) |
| handempty | (机械手闲置) |

删除表：ontable($x$)，clear($x$)，handempty

添加表：holding($x$)　(机械手持有 $x$)

如果图 5-1(a)的状态描述是

{ontable(A)，ontable(B)，handempty，clear(A)，clear(B)}

那么，经过动作 Pickup(A)后，其状态描述应为

{ontable(B)，clear(B)，holding(A)}

如图 5-1(b)所示。

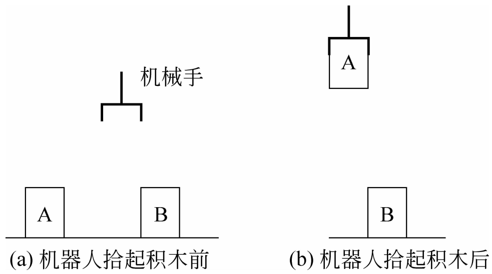


**图 5-1　机器人拾起一块积木的动作前后**

在实际应用中出现的这些处理非单调性的方法是很有启发意义的，它们为非单调逻辑的出现奠定了基础。到了 20 世纪 70 年代后期和 80 年代初，人们开始研究非单调推理，并提出多种非单调逻辑系统，较令人注目的是 Reiter 的缺省推理逻辑，McDermott 和 Doyle 的非单调逻辑系统。

## 5.2.2　缺省推理逻辑

1977 年，Reiter 开始研究信息不完全时的推理形式——缺省推理(default reasoning)。1980 年，他正式提出了缺省推理逻辑。

下面先用一个例子说明什么是缺省推理。

**例 5.2**　如果我们仅知道鸟类中只有鸵鸟不会飞，那么当听说企鹅是鸟类的一种时，我们会得出“企鹅会飞”的结论。像这样的推理方式就是一种缺省推理。

分析例 5.2 中的推理可知，缺省推理是非单调的，因为当我们有了“企鹅也不会飞”的知识时，就不再会推出“企鹅会飞”的结论了。另外，例 5.2 中的推理之所以称为缺省推理，是因为它是依据如下形式的规则进行的。

$$\frac{\mathrm{Bird}(x):\mathrm{Mfly}(x)}{\mathrm{fly}(x)}\left(\frac{x\text{ 是鸟：“}x\text{ 会飞”与系统不矛盾}}{x\text{ 会飞}}\right)$$

这就是说：如果 $x$ 是鸟，并且“$x$ 会飞”与现有知识不冲突(例如，系统只知道“鸵鸟不会飞”，而 $x$ 不是鸵鸟)，那么可以认为 $x$ 是会飞的。当系统不知道企鹅不会飞时，据此规则，便可得出企鹅会飞的结论(因为企鹅是鸟，企鹅会飞与现有知识不矛盾)。但是，当系统知道企鹅不会飞时，Mfly(企鹅)就不再成立，从而“企鹅会飞”的结论就不再能推出。

上述形式的推理规则称为缺省推理规则，它的一般形式是

$$\frac{\alpha(\vec{x}):M\beta_1(\vec{x}),\cdots,M\beta_m(\vec{x})}{w(\vec{x})} \tag{5-1}$$

这里，$\alpha(\vec{x})$，$\beta_1(\vec{x})$，…，$\beta_m(\vec{x})$，$w(\vec{x})$ 均为一阶逻辑中的公式，它们所含的自由变元均在 $\vec{x}=<x_1,\cdots,x_n>$ 中。$\alpha(\vec{x})$ 称为规则的先决条件，$\beta_i(\vec{x})$ 称为规则的缺省条件，$w(\vec{x})$ 称为规则的结论。这种推理规则可以说是传统逻辑中规则

$$\frac{\alpha(\vec{x})}{w(\vec{x})} \tag{5-2}$$

的“非单调化”，因为规则式(5-2)可能有许多例外$\left(\text{就像 }\frac{\mathrm{Bird}(x)}{\mathrm{fly}(x)}\text{ 那样}\right)$，引入 $M\beta_i(\vec{x})$ 就是为了指出这些例外，使它们随着知识的增长而改变对某些客体特性的判断，从而改变推理的结果。$M\beta_i(\vec{x})$中的 $M$ 常读作“可能”，$M\beta_i(\vec{x})$表示就现有知识而言 $\beta_i(\vec{x})$可能成立，即 $\neg\beta_i(\vec{x})$尚未出现(缺省)。

如果缺省推理规则中不含自由变元，即 $\alpha$，$M\beta_i(i=1,2,\cdots,m)$，$w$ 都为命题，那么称该规则为闭规则。

**定义 5.3**　一个缺省推理逻辑理论(简称缺省理论或理论)由两部分组成：

(1) 缺省推理规则集 $D$。

(2) 公式集 $W$，它是已知的或约定的事实集合。

缺省理论常用二元矢$<D,W>$表示。当 $D$ 中的所有规则是闭规则时，称理论$<D,W>$为闭理论。

缺省理论是非单调的。考虑理论 $T=<D,W>$，其中 $D=\left\{\frac{:MA}{B}\right\}$，$W=\phi$，那么 $B$ 在 $T$ 中可推出，而当将 $\neg A$ 添入 $W$，使 $W$ 成为 $W'=\{\neg A\}$，使 $T$ 成为 $T'=<D,W'>$。这时尽管 $T'$是 $T$ 的扩充(已知事实集 $W'\supseteq W$)，但 $B$ 却不再能从 $T'$中推出。

当然，在缺省理论中“推出”的概念与传统逻辑中的“推出”概念是有区别的，前者是非单调推理，而后者是单调推理。为了定义缺省理论中的“推出”概念，我们需要下列定义。

**定义 5.4**　设$\triangle=<D,W>$为一闭的缺省理论，$\Gamma$ 为关于 $D$ 的一个算子，$\Gamma$ 作用于任意的命题集合 $S$，而其值为满足下列 3 条性质的最小命题集合 $\Gamma(S)$。

(1) $W\subseteq\Gamma(S)$。

(2) $Th(\Gamma(S))=\Gamma(S)$，这里 $Th(\Gamma(S))$为命题集$\{A\mid\Gamma(S)\vdash_{FC}A\}$。

(3) 如果 $D$ 中有规则 $\frac{\alpha:M\beta_1,\cdots,M\beta_m}{W}$，且 $\alpha\in\Gamma(S)$，$\neg\beta_1,\cdots,\neg\beta_m\notin S$，那么 $W\in\Gamma(S)$。

**定义 5.5**　命题集合 $E$ 称为关于 $D$ 的算子 $\Gamma$ 的固定点(fixed points)，如果 $\Gamma(E)=E$。此时又称 $E$ 为$\triangle=<D,W>$的一个扩充。

有了扩充的概念，便可定义非单调的“推出”概念。

**定义 5.6**　如果命题 $A$ 包含在缺省理论$\triangle$的一个扩充中，那么称 $A$ 在$\triangle$中可非单调地推出(以下简称“推出”)，记为$\vdash A$(使用符号$\vdash$是为了区别于$\vdash$，$\vdash$表示非单调的“推出”)。

**例 5.3**　当 $D=\left\{\frac{:MA}{\neg A}\right\}$，$W=\phi$ 时，$\triangle=<D,W>$无扩充，因为可证关于$\triangle$的算子 $\Gamma$ 无固定点。若不然，设 $E$ 为 $\Gamma$ 固定点。考虑 $\neg A\in E$ 否？如果 $\neg A\notin E$，那么据定义 5.4 之(3)，$\neg A\in E$。如果 $\neg A\in E$，则 $\neg A$ 必由缺省规则$\frac{:MA}{\neg A}$导入 $E$(因 $W=\phi$)，故 $\neg A\notin E$(否则 $MA$ 为假，上述规则不适用)。这是一个悖论。

**例 5.4** 设 $D=\left\{\frac{:MA}{\neg B},\frac{:MB}{\neg C},\frac{:MC}{\neg F}\right\}$,$W=\phi$,那么$\triangle=\langle D,W\rangle$有唯一的扩充 $E=Th(\{\neg B,\neg F\})$。容易验证 $E$ 为关于$\triangle$的 $\Gamma$ 的固定点,当命题集 $S\subseteq\{\neg B,\neg C,\neg F\}$而 $S\neq\{\neg B,\neg F\}$时,$Th(S)$均非 $\Gamma$ 的关于$\triangle$的固定点。

**例 5.5** 设

$$D=\left\{\frac{:MA}{A},\frac{B:MC}{C},\frac{F\wedge A:ME}{E},\frac{C\wedge E:M\neg A,M(F\vee A)}{G}\right\}$$

$$W=\{B,C\rightarrow F\vee A,A\wedge C\rightarrow\neg E\},$$

那么$\langle D,W\rangle$有3个扩充:$E_1=Th(W\cup\{A,C\})$,$E_2=Th(W\cup\{A,E\})$,$E_3=Th(W\cup\{C,E,G\})$。以下仅对 $E_1$ 进行说明。由于 $Th(W\cup\{A,C\})$有$\neg E$,从而 $Th(W\cup\{A,C\})$中没有 $E$ 和$G$(因为 $ME$ 和$C\wedge E$ 不能成立)。这就是说,$D$ 中缺省规则在算子 $\Gamma$ 的计算过程中无一有用,因此 $\Gamma(Th(W\cup\{A,C\}))=Th(W\cup\{A,C\})$。

上述例子说明,并非所有缺省理论都有扩充,并非有扩充的缺省理论只有唯一的扩充。由此看来,缺省理论的扩充变幻莫测,但是,有了下述定理,它便清晰多了。这一定理还使我们有了一个验证扩充的工具。

**定理 5.1** 设 $E$ 为一阶命题集,$\triangle=\langle D,W\rangle$为一闭的缺省理论。递归定义 $E_i(i=1,2,3,\cdots)$如下:

$$E_0=W$$

$$E_{i+1}=Th(E_i)\cup\left\{w\mid\frac{\alpha:M\beta_1,\cdots,M\beta_m}{w}\in D,\alpha\in E_i,\neg\beta_1,\cdots,\neg\beta_m\notin E\right\}$$

那么,$E$ 为 $\triangle$ 的一个扩充当且仅当 $E=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}E_i$。

在缺省理论的语构研究方面已取得了许多成果,但它的语义研究困难重重,至今未见令人满意的语义结构被赋予这一十分有趣的推理理论。

## 5.2.3 非单调逻辑系统

1978—1982年,McDermott 和 Doyle 就非单调推理发表了好几篇很有影响的文章。他们把自己的系统称为非单调逻辑系统,这一系统建立基于一阶逻辑之上,并引进模态词 $M$,用 $MA$ 表示 $A$ 与当前已推得的定理相容(注意,在这一点上与缺省推理理论相似)。

**例 5.6** 设理论 $T$ 有以下3条公理:

(1) 正值中午$\wedge M$(出太阳)$\rightarrow$出太阳。

(2) 正值中午。

(3) 日食$\rightarrow\neg$(出太阳)。

那么,在 $T$ 中可证:

(4) 出太阳。

但是,如果把

(5) 日食

添作公理,那么由(3)和(5)推得$\neg$(出太阳),这使得 $M$(出太阳)不能成立,于是(4)不再可证。这与传统逻辑不同。如果把(1)改为

（1）′正值中午→出太阳

那么在添入公理(5)时系统便不一致，从而一切公式全为系统的定理。

下文将介绍，由于在非单调逻辑中允许 $MA$ 与一般命题一样使用（缺省推理中，$MA$ 只在缺省推理规则中出现），使它与缺省推理理论有许多根本的不同。

从上例看出，非单调逻辑系统的关键是 $M$ 意义的规定。从语法角度规定，似乎可引入下列规则（从 $M$ 的直观意义出发）：

$$\text{如果} \nvdash \neg A，\text{则} \vdash MA \tag{5-3}$$

但这是不适当的，因为这样做等于把一切非定理的否定接受为定理，没有什么非单调可言。McDermott 和 Doyle 的做法是，修改式(5-3)为

$$\text{如果} \nvdash \neg A，\text{则} \mathrel{|\!\!\sim} MA \tag{5-4}$$

这里的$\mathrel{|\!\!\sim}$表示与$\vdash$不同的“推出”——非单调地推出，并如下规定$\mathrel{|\!\!\sim}$的意义。

以下将加入模态词 $M$ 的一阶谓词演算系统记为 $FC$，将允许使用 $M$ 的一阶公式全体记为 $L_{FC}$，对任何公式集 $\Gamma \subseteq L_{FC}$，$Th(\Gamma)$的意义是

$$Th(\Gamma) = \{A \mid \Gamma \vdash_{FC} A\}$$

**定义 5.7**　对任何公式集 $\Gamma \subseteq L_{FC}$ 定义**算子** $NM_\Gamma$，对任意公式集 $S \subseteq L_{FC}$

$$NM_\Gamma(S) = Th(\Gamma \cup A_{S\Gamma}(S)) \tag{5-5}$$

其中称 $A_{S\Gamma}$为 $S$ 的**假设集**

$$A_{S\Gamma}(S) = \{MQ \mid Q \in L_{FC} \ \wedge \ \neg Q \notin S\} \tag{5-6}$$

令

$$TH(\Gamma) = \bigcap(\{L_{FC}\} \cup \{S \mid NM_\Gamma(S) = S\}) \tag{5-7}$$

这里$\bigcap C = \{x \mid \forall S(S \in C \rightarrow x \in S)\}$。如果 $P \in TH(\Gamma)$，那么称 $P$ 可由 $\Gamma$ 非单调地推出（可证），并记为 $\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} P$。

我们对 $TH(\Gamma)$的定义式(5-7)解释如下。$TH(\Gamma)$可以说是 $NM_\Gamma$算子的所有固定点的交，当 $NM_\Gamma$ 无固定点时，$TH(\Gamma) = \bigcap(\{L_{FC}\}) = L_{FC}$，即约定 $NM_\Gamma$ 无固定点时，$TH(\Gamma)$为全体 $FC$ 公式的集合。

应当指出，算子 $NM_\Gamma$ 有固定点时，$\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} P$ 是指 $P$ 在算子 $NM_\Gamma$ 的每一个固定点中。这与缺省推理理论不同，$P$ 在缺省理论△中“可证”，是指 $P$ 属于△的某一扩充，即在算子的某一个固定点中。

**例 5.7**　设 $\Gamma = FC \cup \{MC \rightarrow \neg C\}$（$FC$ 指一阶逻辑的公理、规则，其中允许使用 $M$。以下同），那么，$NM_\Gamma$ 无固定点。设 $NM_\Gamma(S) = S'$，若 $\neg C \notin S$，那么 $MC \in A_{S\Gamma}(S)$，从而 $\neg C \in S'$；反之，若 $\neg C \in S$，那么 $MC \notin A_{S\Gamma}(S)$，故 $\neg C \notin S'$。这就是说，$S'$不可能等于 $S$，$NM_\Gamma$ 无固定点。

**例 5.8**　设 $\Gamma = FC \cup \{A \wedge MB \rightarrow B, C \wedge MD \rightarrow D, A \vee C\}$，那么 $NM_\Gamma$ 有唯一的固定点，该固定点含有 $B \vee D$，因此有 $\Gamma \mathrel{|\!\!\sim} B \vee D$。值得注意的是，当缺省理论△中 $D = \left\{\dfrac{A:MB}{B}, \dfrac{C:MD}{D}\right\}$，$W = \{A \vee C\}$时，△也有唯一扩充（$Th(A \vee C)$），它不含 $B \vee D$。这一差别便是由非单调逻辑中把 $MB$，$MD$ 与 $A$，$C$ 等看作平等的命题造成的，这使它们能代入$(A_1 \rightarrow A_3) \wedge (A_2 \rightarrow A_3) \leftrightarrow (A_1 \vee A_2 \rightarrow A_3)$之类的重言式。相反，缺省推理就没有这种“便利”。