

3.1 引言

我们知道,对信号和系统进行分析研究、处理有两类方法,本章是在频率域进行研究的一类方法,另一类是在时域进行,后面将学习的维纳滤波器、卡尔曼滤波和自适应滤波都属于时域滤波方法,这两类方法都是信号处理的重要方法。对于确定性信号,傅里叶变换是在频率域分析研究的理论基础;但对于随机信号,其傅里叶变换并不存在,因此转向研究它的功率谱。按照维纳-辛钦定理,信号的功率谱和其自相关函数服从一对傅里叶变换。如果用 $r_{xx}(m)$ 表示随机信号 $x(n)$ 的自相关函数, $P_{xx}(\omega)$ 表示它的功率谱密度(以下简称 PSD),则有

$$P_{xx}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m) e^{-j\omega m} \quad (3.1.1)$$

其中

$$r_{xx}(m) \triangleq E[x^*(n)x(n+m)] \quad (3.1.2)$$

对于平稳随机过程,根据各态历经假设,集合的平均可以用时间的平均代替,于是上式可写成

$$r_{xx}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*(n)x(n+m) \quad (3.1.3)$$

将式(3.1.3)代入式(3.1.1),得

$$\begin{aligned} P_{xx}(\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*(n)x(n+m) \right] e^{-j\omega m} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left[\sum_{n=-N}^N x^*(n) e^{j\omega n} \right] \cdot \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+m) e^{-j\omega(n+m)} \right] \end{aligned}$$

令 $l=n+m$, 上式可写成

$$\begin{aligned} P_{xx}(\omega) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left[\sum_{n=-N}^N x(n) e^{-j\omega n} \right]^* \cdot \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) e^{-j\omega l} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^N x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

式(3.1.4)在 $N \rightarrow \infty$ 的极限情况下是不可能收敛的, 这是因为对于无限时域的随机信号, 它的傅里叶变换是不存在的。实际上只有将式(3.1.4)求平均, 成为

$$P_{xx}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^N x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \right] \quad (3.1.5)$$

上式被认为是功率谱的另一个定义。

式(3.1.1)表明, 功率谱是无限多个自相关函数的函数, 但观测数据只有有限个, 只能得到有限个自相关函数。按照式(3.1.5)求功率谱, 也需要无限个观测数据。因此根据有限个样本数据, 分析计算随机序列的真正功率谱, 是求功率谱的中心问题, 毫无疑问这是一个功率谱的估计问题。下面介绍统计估计的一般估计准则, 如果用 θ 表示某个随机变量的真值, $\hat{\theta}$ 表示它的估计值, 则希望满足以下条件。

(1) 无偏估计

无偏估计, 即 $\hat{\theta}$ 的偏移(Bias)为零, 所谓偏移(用 B 表示)定义为

$$B = \theta - E(\hat{\theta}) = \text{Bias}(\theta) \quad (3.1.6)$$

无偏估计即 $B=0, E[\hat{\theta}]=\theta$ 的估计。图 3.1 中的估计 1 和估计 2 都属于无偏估计。

(2) 最小方差估计

最小方差估计, 即方差

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] = \sigma_{\hat{\theta}}^2 \quad (3.1.7)$$

为最小的估计。图 3.1 中, 估计 2 较之估计 1 方差小。

但是常常发生这种情况, 一种估计的偏移较小而方差较大, 另一种估计偏移较大而方差较小, 此时很难定哪一种估计好。因此也常常用均方误差的大小来衡量估计的优劣。在第 2 章中已经讨论到均方误差的定义为

$$E[e^2] = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \quad (3.1.8)$$

利用式(3.1.6)与式(3.1.7)的关系不难证明

$$E[e^2] = B^2 + \sigma_{\hat{\theta}}^2 \quad (3.1.9)$$

均方误差 $E[e^2]$ 与偏移和方差均有关, 要 $E[e^2]$ 最小就要求 B^2 与 $\sigma_{\hat{\theta}}^2$ 之和最小。

这就是说, 当观察到的样本的数据有无限多个时, 按照无穷多个这样的样本数据估计到的自相关函数应该就是自相关函数的真值(各态历经假设)。换句话说, 一个正确的估计应有

$$\left. \begin{aligned} N \rightarrow \infty \quad \text{Bias}[\hat{\theta}] &\rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \quad \text{Var}[\hat{\theta}] &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.10)$$

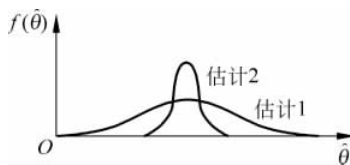


图 3.1 两种估计的概率密度分布

满足式(3.1.10)的估计称为一致估计。一个正确的估计应该满足一致估计的条件(这是正确估计的必要条件,不是充分条件)。反之,如果某种估计方法不能满足式(3.1.10)一致估计的条件,则这种估计方法一定是不正确的。下面在讨论各种估计方法时,常常以此作为估计正确与否的主要准则之一。

功率谱估计是随机信号处理的重要内容。功率谱的估计方法有很多种,一般分成两大类:一类是经典谱估计,也称为线性谱估计;另一类是现代谱估计,也称为非线性谱估计。经典谱估计是建立在传统的傅里叶变换的基础之上的。经典谱估计又可以分成两种,一种是 BT 法,另一种是周期图法。1958 年,布莱克曼(R. Blackman)和杜基(J. Tukey)首先提出 BT 法,并命名为布莱克曼-杜基估计器(简称 BT 谱估计器)。这种方法是先按照有限个观测数据估计自相关函数,再按照式(3.1.1)计算功率谱。在 1965 年 FFT 未出现以前,BT 法一直是最常用的方法。1898 年,舒斯特(Schuster)利用傅里叶级数去拟合待分析信号,试图寻找信号中隐藏的周期性,由此提出了周期图法,但一直到 FFT 出现以后,周期图法才受到人们的重视。这种方法是直接对观测数据进行 DFT(FFT),取模的平方,再除以 N 得到功率谱。比较两种方法,周期图法简单,不用估计自相关函数,且可以用 FFT 进行计算。因此,周期图法得到了更广泛的应用。经典谱估计致命的缺点是频率分辨率低,其原因是傅里叶变换域是无限大,而观察数据只能得到有限个,观察不到的数据被认为是 0。如果只有 N 个观测数据,而对于 N 以外的数据,信号仍有较强的相关性,这样估计出的功率谱会出现很大的偏差。对于有限的观测数据,相当于将信号在时域中乘以矩形窗函数,在频域则使真正的功率谱卷积一个 sinc 函数,而 sinc 函数不同于 δ 函数,它有主瓣和旁瓣,这样使卷积后的功率谱不同于真正的功率谱。sinc 函数的主瓣引起功率谱向附近频域扩展,造成谱的模糊,降低谱的分辨率;而旁瓣则会引起谱间干扰,信号强的功率谱旁瓣影响信号弱的功率谱检测,严重时检测不出弱信号,或者把旁瓣误认为是信号等。为了对经典功率谱估计进行改进,可以采用各种不同的窗函数,但都是以增加主瓣宽度来换取旁瓣的压低,因此谱分辨率低是经典谱估计的致命缺点。

现代谱估计以信号模型为基础,根据第 2 章中方差为 σ_w^2 的随机信号白噪声 $w(t)$ 通过传递函数为 $H(\omega)$ 线性系统时,其输出信号的功率谱计算公式为

$$P_{xx}(\omega) = \sigma_w^2 |H(\omega)|^2 \quad (3.1.11)$$

如果由观测数据能够估计出信号模型的参数,信号的功率谱可以按照式(3.1.11)计算出来,这样,估计功率谱的问题变成了由观测数据估计信号模型参数的问题。模型有很多种,例如第 2 章讲述的 AR 模型、MA 模型等。针对不同的情况,合适地选择模型,功率谱估计质量比经典谱估计的估计质量有很大的提高。遗憾的是,尚无任何理论能指导我们选择一个合适的模型,只能根据功率谱的一些先验知识,或者说一些重要的谱特性,选择模型。例如语音信号处理中,确定共振峰的位置和带宽,可以选择 AR 模型。这种 AR 模型适合作为谱峰的模型,而不适合作为谱谷的模型;而 MA 模型适合谱谷而不适合谱峰的模型。如果模型选择合适,可以得到偏差小、分辨率高、方差也小的谱估计质量。

下面将叙述自相关函数的估计、经典谱估计中的多种方法并分析其谱估计质量,然后学习现代谱估计。

3.2 经典谱估计

3.2.1 自相关函数的估计及 BT 法

设观察到 N 个样本序列 $\{x_n\}$ 的值: $x(0), x(1), \dots, x_{N-1}$ 。现在要由此 N 个数据来估计自相关函数 $r_{xx}(m)$ 。由于 x_n 只能观察到 $0 \leq n \leq N-1$ 的 N 个值, 而 $n < 0$ 与 $n > N-1$ 时的 x_n 值是不知道的, 因此, 自相关函数的估计式可用下式表示:

$$\hat{r}_{xx}(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m), \quad |m| \leq N-1 \quad (3.2.1)$$

式中, m 取绝对值是因为 $r_{xx}(m) = r_{xx}(-m)$, m 为负值时上式仍适用。式(3.2.1)规定的求和上下限的原则是保持充分利用全部(N 个)数据。这种估计方法的效果如何, 首先需要看它的偏移与方差是否满足一致估计的条件。

由式(3.2.1)得

$$\begin{aligned} E[\hat{r}_{xx}(m)] &= \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E[x(n)x(n+m)] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} r_{xx}(m) \\ &= r_{xx}(m) \text{ (自相关函数的真值)}, \quad |m| \leq N-1 \end{aligned}$$

所以

$$\text{Bias}[\hat{r}_{xx}(m)] = r_{xx}(m) - E[\hat{r}_{xx}(m)] = 0, \quad |m| \leq N-1$$

故这种估计, 当 $|m| \leq N-1$ 时, 属于无偏估计。

现在来求 $\text{Var}[\hat{r}_{xx}(m)]$, 按定义

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{r}_{xx}(m)] &= E[\hat{r}_{xx}^2(m)] - E^2[\hat{r}_{xx}(m)] \\ &= E[\hat{r}_{xx}^2(m)] - r_{xx}^2(m), \quad |m| \leq N-1 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

又按式(3.2.1), 得

$$E[\hat{r}_{xx}^2(m)] = \frac{1}{(N-|m|)^2} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \sum_{k=0}^{N-|m|-1} E[x(n)x(n+m)x(k)x(k+m)] \quad (3.2.3)$$

当随机序列 $\{x_n\}$ 是零均值、实、高斯序列时, 有

$$E[x_1 x_2 x_3 x_4] = E[x_1 x_2]E[x_3 x_4] + E[x_1 x_3]E[x_2 x_4] + E[x_1 x_4]E[x_2 x_3]$$

所以 $E[x(n)x(n+m)x(k)x(k+m)] = E[x(n)x(n+m)]E[x(k)x(k+m)] + E[x(n)x(k)]E[x(n+m)x(k+m)] + E[x(n)x(k+m)]E[x(n+m)x(k)] = r_{xx}^2(m) + r_{xx}^2(k-n) + r_{xx}(k+m-n)r_{xx}(k-m-n)$

代入式(3.2.3), 得

$$E[\hat{r}_{xx}^2(m)] = r_{xx}^2(m) + \frac{1}{(N-|m|)^2} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \sum_{k=0}^{N-|m|-1} [r_{xx}^2(k-n) + r_{xx}(k+m-n)r_{xx}(k-m-n)]$$

代入式(3.2.2), 得

$$\text{Var}[\hat{r}_{xx}(m)] = \frac{1}{(N-|m|)^2} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \sum_{k=0}^{N-|m|-1} [r_{xx}^2(k-n) + r_{xx}(k+m-n)r_{xx}(k-m-n)]$$

令 $i = k-n$, 显然 i 的最小值为 $-(N-|m|-1)$, 最大值为 $(N-|m|-1)$, 且 $i=0$ (即

$k=n$)的情况将出现 $N-|m|$ 次, $i=1$ 的情况将出现 $N-|m|-1$ 次,依此类推,对不同 i 值的情况出现的次数将为 $N-|m|-|i|$,于是上式可写成

$$\begin{aligned}\text{Var}[\hat{r}_{xx}(m)] &= \frac{1}{(N-|m|)^2} \sum_{i=-(N-|m|-1)}^{N-|m|-1} (N-|m|-|i|) [r_{xx}^2 + r_{xx}(i+m)r_{xx}(i-m)] \\ &= \frac{N}{(N-|m|)^2} \sum_{i=-(N-|m|-1)}^{N-|m|-1} \left(1 - \frac{|m|+|i|}{N}\right) [r_{xx}^2(i) + r_{xx}(i+m)r_{xx}(i-m)] \\ &\leq \frac{N}{(N-|m|)^2} \sum_{i=-(N-|m|-1)}^{N-|m|-1} [r_{xx}^2(i) + r_{xx}(i+m)r_{xx}(i-m)]\end{aligned}\quad (3.2.4)$$

当 $N \gg m$ 时,上式以 $1/N$ 趋于零,即 $\lim_{N \rightarrow \infty} \{\text{Var}[\hat{r}_{xx}(m)]\} \rightarrow 0$ 。故 $\hat{r}_{xx}(m)$ 的方差满足一致估计的条件。如果 $\{x_n\}$ 不是高斯过程,在上式中需要再加一项,但此项往往是可以忽略的,因此,式(3.2.4)仍近似适用。

式(3.2.1)这种估计自相关函数的方法,虽然当 $m \ll N$ 时能得到一致估计,但当 N 一定, $m \rightarrow N$ 时, $\text{Var}[\hat{r}_{xx}(m)]$ 就变得十分大,因而不能得到有用的估计。因此,按下式估计 $r_{xx}(m)$,用 $\hat{r}'_{xx}(m)$ 表示:

$$\begin{aligned}\hat{r}'_{xx}(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x^*(n)x(n+m) \\ &= \frac{N-|m|}{N} \hat{r}_{xx}(m), \quad |m| \leq (N-1)\end{aligned}\quad (3.2.5)$$

同时

$$E[\hat{r}'_{xx}(m)] = \frac{N-|m|}{N} r_{xx}(m)$$

这相当于它的均值等于真值 $r_{xx}(m)$ 用三角窗函数加权。故 $\hat{r}'_{xx}(m)$ 是有偏的,其偏移为

$$\begin{aligned}\text{Bias}[\hat{r}'_{xx}(m)] &= r_{xx}(m) - E[\hat{r}'_{xx}(m)] \\ &= r_{xx}(m) - \frac{N-|m|}{N} r_{xx}(m) \\ &= \left| \frac{m}{N} \right| r_{xx}(m)\end{aligned}$$

同时

$$\text{Var}[\hat{r}'_{xx}(m)] = \left(\frac{N-|m|}{N} \right)^2 \text{Var}[\hat{r}_{xx}(m)] < \text{Var}[\hat{r}_{xx}(m)]$$

事实上,将 $\hat{r}_{xx}$ 用三角窗函数加权后,不仅使方差减小,而且有利于钝化 $r_{xx}(m)$ 的截段边界,使 $P(\omega)$ 的卷积因子从 sinc 函数的形式降低波动,可改进对 $P(\omega)$ 的估计。

虽然 $\hat{r}'_{xx}(m)$ 的 Bias 和 Var 都不等于零,但当 $N \rightarrow \infty$ 时 $\text{Bias} \rightarrow 0$, $\text{Var} \rightarrow 0$,为一致估计,且 $\text{Var}[\hat{r}'_{xx}(m)] < \text{Var}[\hat{r}_{xx}(m)]$,同时可以证明 $\hat{r}'_{xx}(m)$ 的均方误差小于 $\hat{r}_{xx}(m)$ 的均方误差,以及可改进对 $P(\omega)$ 的估计,所以今后还是用 $\hat{r}'_{xx}(m)$ 作为自相关函数的估计,并仍用式(3.2.5) $\hat{r}'_{xx}(m)$ 表示 $\hat{r}_{xx}(m)$ 。

对式(3.2.5)进行傅里叶变换,得到 BT 法的功率谱估计值为

$$\hat{P}_{BT}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{r}'_{xx}(m) e^{-j\omega m}$$

为了减少谱估计的方差,经常用窗函数 $w(m)$ 对自相关函数进行加权,此时谱估计公式为

$$\hat{P}_{BT}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{r}_{xx}(m)w(m)e^{-j\omega m} \quad (3.2.6)$$

有时称式(3.2.6)为加权协方差谱估计,它要求加窗后的功率谱仍是非负的,这样窗函数的选择必须满足一个原则,即它的傅里叶变换必须是非负的,例如巴特利特(Bartlett)窗就满足这一条件。

【例 3-1】 利用 MATLAB 计算 $x(t) = \cos(2\pi * 40 * t) + 3\cos(2\pi * 100 * t) + \epsilon(t)$ 的自相关函数的估计。其中 $\epsilon(t)$ 是白噪声。

解: 下面给出了利用 MATLAB 进行自相关函数谱的估计示例程序,其结果如图 3.2 所示。

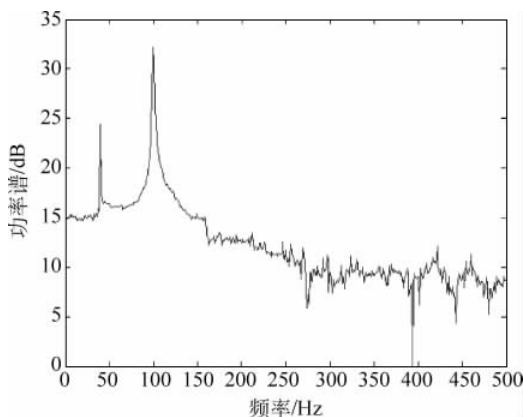


图 3.2 自相关函数的谱估计曲线

MATLAB 代码示例:

```
clear;
Fs = 1000; % 采样频率
n = 0:1/Fs:1;
% 产生含有噪声的序列
xn = cos(2 * pi * 40 * n) + 3 * cos(2 * pi * 100 * n) + randn(size(n));
nfft = 1024;
cxn = xcorr(xn, 'unbiased'); % 计算序列的自相关函数
CXk = fft(cxn, nfft);
Pxx = abs(CXk);
index = 0:round(nfft/2 - 1);
k = index * Fs/nfft;
plot_Pxx = 10 * log10(Pxx(index + 1));
plot(k, plot_Pxx);
xlabel('频率(Hz) ');
ylabel('功率谱(dB) ');
```

3.2.2 周期图作为功率谱的估计

将式(3.2.5)代入式(3.1.1)得

$$\begin{aligned}\hat{P}_{xx}(\omega) &= \hat{P}_{xx}(-\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{r}_{xx}(m) e^{-j\omega m} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x^*(n) x(n+m) e^{-j\omega m} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{N-|m|-1} x_N^*(n) x_N(n+m) e^{-j\omega m}\end{aligned}$$

这里, $x_N(n)$ 与 $x_N(n+m)$ 的下标 N 表示它们是有限长(长为 N)的序列, 令 $l=n+m$, 有

$$\begin{aligned}\hat{P}_{xx}(\omega) &= \frac{1}{N} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N(n) e^{-j\omega n} \right]^* \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_N(l) e^{-j\omega l} \right] \\ &= \frac{1}{N} X_N(e^{j\omega}) X_N^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |X(\omega)|^2\end{aligned}$$

其中

$$X_N(\omega) = X_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

即 $X_N(\omega)$ 是有限长序列 $x(n)$ 的傅里叶变换。显然 $X_N(\omega)$ 是周期性的。直接将 $X_N(\omega)$ 的模的平方除以 N 求得的功率谱的估计称为周期图, 并用 $I_N(\omega)$ 表示。于是有

$$\hat{P}_{xx}(\omega) = I_N(\omega) = \frac{1}{N} |X_N(\omega)|^2 \quad (3.2.7)$$

如果知道 $x(n)$ 的 N 个值 $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, 可以通过 FFT 直接求得 $X_N(K)$ (频率离散化的 $X(e^{j\omega})$), 然后按照式(3.2.7)直接求得 $P_{xx}(\omega)$ (不必先通过估计自相关函数)。这种将周期图作为功率谱估计的方法的主要优点是计算方便, 它可以直接用 FFT 算法从 $x(n)$ 得到 $X_N(\omega)$, 从而得到 $P_{xx}(\omega)$ 。正是由于它的这个优点, 使这种方法成为一种十分通用的方法。

为了了解周期图作为功率谱估计的估计效果, 就要讨论它的偏移和方差。为此首先要求周期图的期望值。

按式(3.2.5), 得

$$\begin{aligned}E[\hat{r}_{xx}(m)] &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[x_N(n) x_N(n+m)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[R_N(n) x(n) R_N(n+m) x(n+m)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) R_N(n+m) \cdot E[x(n) x(n+m)]\end{aligned} \quad (3.2.8)$$

这里, R_N 代表矩形序列。

令

$$\omega(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) R_N(n+m) = \frac{1}{N} [R(m) * R(-m)] \quad (3.2.9)$$

由于 $\omega(m)$ 是两个矩形函数的卷积, 因此它必是一个三角函数, 常常称它为 Bartlett 窗函数, 用 $\omega_B(m)$ 表示, 不难证明

$$\omega_B(m) = \begin{cases} 1 - \frac{|m|}{N}, & |m| < N \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.2.10)$$

而它的傅里叶变换为

$$W_B(\omega) = \frac{1}{N} |R_N(\omega)|^2 = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin \omega N/2}{\sin \omega/2} \right]^2 \quad (3.2.11)$$

又 $E[x(n)x(n+m)] = r_{xx}(m)$ = 自相关函数的真值

将上式与式(3.2.9)代入式(3.2.8), 并求其傅里叶变换, 得

$$\begin{aligned} E[I_N(\omega)] &= W_B(\omega) * P_{xx}(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_B(\theta) P_{xx}(\omega - \theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

由式(3.2.12)可见, 除非 $W_B(\theta)$ 为 δ 函数, $E[I_N(\omega)]$ 将不等于 $P_{xx}(\omega)$, 故周期图作为 $P_{xx}(\omega)$ 的估计是有偏的:

$$\text{Bias}[I_N(\omega)] = P_{xx}(\omega) - E[I_N(\omega)] \neq 0$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\omega_B(m) = 1 - \frac{|m|}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

故 $W_B(\omega) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \delta(\omega)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[I_N(\omega)] = P_{xx}(\omega) \quad (3.2.13)$$

因此, 周期图作为功率谱的估计, 当 $N \rightarrow \infty$ 时是无偏的。

为了得到周期图的方差, 首先假设序列 $x(n)$ ($0 \leq n \leq N-1$) 是一个实、白色、零均值过程的样本, 具有高斯概率分布函数。按方差的定义应有

$$\text{Var}[I_N(\omega)] = E[I_N^2(\omega)] - E^2[I_N(\omega)] \quad (3.2.14)$$

按式(3.2.7), 周期图可表示为

$$\begin{aligned} I_N(\omega) &= \frac{1}{N} |X_N(\omega)|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N(n) e^{-j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_N(k) e^{j\omega k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N(n) x_N(k) e^{-j\omega(n-k)} \end{aligned}$$

将关系: $x_N(n) = R_N(n)x(n)$

$$x_N(k) = R_N(k)x(k)$$

代入上式, 并求期望值, 得

$$E[I_N(\omega)] = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_N(n) R_N(k) E[x(n)x(k)] \cdot e^{-j\omega(n-k)} \quad (3.2.15)$$

其中

$$E[x(n)x(k)] = r_{xx}(n-k)$$

由于假设 $x(n)$ 是白噪声, 所以 $r_{xx}(n-k) = \sigma_x^2 \delta(n-k)$, 代入上式得

$$\begin{aligned}
 E[I_N(\omega)] &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N^2(n) \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N^2(n) \\
 &= \sigma_x^2 \left(\text{因为} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N^2(n) = N \right)
 \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

为了求得 $\text{Var}[I_N(\omega)]$, 按式(3.2.14)除了需要求得 $E[I_N(\omega)]$ 以外, 还需要求得 $E[I_N^2(\omega)]$, 为此应先求在频率为 ω_1 及 ω_2 的 $I_N(\omega)$ 的协方差, 参照式(3.2.15)可得

$$\begin{aligned}
 E[I_N(\omega_1)I_N(\omega_2)] &= \frac{1}{N^2} \sum_n \sum_k \sum_p \sum_q R_N(n)R_N(k) \\
 &\quad R_N(p)R_N(q) \cdot E[x(n)x(k)x(p)x(q)] e^{-j\omega_1(n-k)} e^{-j\omega_2(p-q)}
 \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

对于白色高斯过程可以证明

$$\begin{aligned}
 E[x(n)x(k)x(p)x(q)] &= E[x(n)x(k)] \cdot E[x(p)x(q)] + E[x(n)x(p)]E[x(k)x(q)] + \\
 &\quad E[x(n)x(q)]E[x(k)x(p)]
 \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

考虑到对于白色过程有 $r_{xx}(m) = E[x(n)x(n+m)] = \sigma_x^2 \delta(m)$, 所以有

$$E[x(n)x(k)x(p)x(q)] = \begin{cases} \sigma_x^4, & \text{当 } n=k \text{ 及 } p=q \text{ 或} \\ & n=p \text{ 及 } k=q \text{ 或} \\ & n=q \text{ 及 } k=p \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.2.19)$$

代入式(3.2.17), 得

$$\begin{aligned}
 E[I_N(\omega_1)I_N(\omega_2)] &= \frac{\sigma_x^4}{N^2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N^2(n) \sum_{p=-\infty}^{\infty} R_N^2(p) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_N^2(n)R_N^2(k) e^{-j(n-k)(\omega_1+\omega_2)} + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_N^2(n)R_N^2(k) e^{-j(n-k)(\omega_1-\omega_2)} \right]
 \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

上式当 $n=k$ 及 $p=q$ 时只有第一项存在(其他两项为0); 当 $n=p$ 及 $k=q$ 时只有第二项存在; 当 $n=q, k=p$ 时, 只有第三项存在。

又因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N^2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_N^2(k) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} R_N^2(p) = N$$

故式(3.2.20)成为

$$E[I_N(\omega_1)I_N(\omega_2)] = \frac{\sigma_x^4}{N^2} \left[N^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j(n-k)(\omega_1+\omega_2)} + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j(n-k)(\omega_1-\omega_2)} \right] \quad (3.2.21)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j(n-k)(\omega_1+\omega_2)} &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn(\omega_1+\omega_2)} \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk(\omega_1+\omega_2)} \\
 &= \left[\frac{\sin(\omega_1+\omega_2) \frac{N}{2}}{\sin(\omega_1+\omega_2)/2} \right]^2
 \end{aligned} \quad (3.2.22a)$$

同理可得

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j(n-k)(\omega_1-\omega_2)} = \left[\frac{\sin(\omega_1-\omega_2) N/2}{\sin(\omega_1-\omega_2)/2} \right]^2 \quad (3.2.22b)$$

代入式(3.2.21), 得

$$\begin{aligned}
 E[I_N(\omega_1)I_N(\omega_2)] &= \frac{\sigma_x^4}{N^2} \left[N^2 + \left(\frac{\sin\left[(\omega_1 + \omega_2)\frac{N}{2}\right]}{\sin(\omega_1 + \omega_2)/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin\left[(\omega_1 - \omega_2)\frac{N}{2}\right]}{\sin(\omega_1 - \omega_2)/2} \right)^2 \right] \\
 &= \sigma_x^4 \left[1 + \left(\frac{\sin N(\omega_1 + \omega_2)/2}{N \sin(\omega_1 + \omega_2)/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin N(\omega_1 - \omega_2)/2}{N \sin(\omega_1 - \omega_2)/2} \right)^2 \right] \quad (3.2.23)
 \end{aligned}$$

当 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ 时,得

$$E[I_N^2(\omega)] = \sigma_x^4 \left[1 + \left(\frac{\sin N\omega}{N \sin \omega} \right)^2 + 1 \right]$$

故有

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[I_N(\omega)] &= E[I_N^2(\omega)] - E^2[I_N(\omega)] \\
 &= \sigma_x^4 \left[2 + \left(\frac{\sin N\omega}{N \sin \omega} \right)^2 \right] - \sigma_x^4 = \sigma_x^4 \left[1 + \left(\frac{\sin N\omega}{N \sin \omega} \right)^2 \right] \quad (3.2.24)
 \end{aligned}$$

由上式可见,当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\text{Var}[I_N(\omega)] \rightarrow \sigma_x^4 = P_{xx}(\omega) \neq 0$ 。这说明周期图不满足一致估计的条件。不论 N 取多长, $\text{Var}[I_N(\omega)]$ 都有 σ_x^4 的量级。因此对于功率谱周期图不是好的估计。实际上当 $N \rightarrow \infty$ 时式(3.2.7)成为式(3.1.4)。在讨论式(3.1.4)时所指出的,对于无限能量的随机序列,它的傅里叶变换是不存在的,因此式(3.1.4)在 $N \rightarrow \infty$ 的极限情况下是不可能适用的。故也就不能期望当 $N \rightarrow \infty$ 时 $I_N(\omega)$ 会等于它的真值 $P_{xx}(\omega)$,而满足一致估计的条件。为了使周期图作为功率谱估计满足一致估计的条件,必须将周期图进行平滑(或平均)处理。

下面给出了两个频率处的周期图的协方差函数,则有

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[I_N(\omega_1), I_N(\omega_2)] &= E[I_N(\omega_1), I_N(\omega_2)] - E[I_N(\omega_1)]E[I_N(\omega_2)] \\
 &= \sigma_x^4 \left[1 + \left(\frac{\sin N(\omega_1 + \omega_2)/2}{N \sin(\omega_1 + \omega_2)/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin N(\omega_1 - \omega_2)/2}{N \sin(\omega_1 - \omega_2)/2} \right)^2 \right] - \sigma_x^4 \\
 &= \sigma_x^4 \left[\left(\frac{\sin N(\omega_1 + \omega_2)/2}{N \sin(\omega_1 + \omega_2)/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin N(\omega_1 - \omega_2)/2}{N \sin(\omega_1 - \omega_2)/2} \right)^2 \right] \quad (3.2.25)
 \end{aligned}$$

如果 $\omega_1 = 2\pi k/N$ 以及 $\omega_2 = 2\pi l/N$ (k 和 l 为整数),则上式成为

$$\text{Cov}[I_N(\omega_1), I_N(\omega_2)] = \sigma_x^4 \left\{ \left(\frac{\sin[\pi(k+l)]}{N \sin[\pi(k+l)/N]} \right)^2 + \left(\frac{\sin[\pi(k-l)]}{N \sin[\pi(k-l)/N]} \right)^2 \right\} \quad (3.2.26)$$

上式在 $k \neq l$ 以及 $k+l$ 与 $k-l$ 不是 N 的整倍数时等于零,因此以 $2\pi/N$ 的整倍数为频率间距的周期图的值是不相关的。当 N 增大时,协方差为零的功率谱样本之间的间距减小,因此可以预料到 N 增加将会使周期图的起伏增快。图 3.3 说明了周期图的这种特性。图 3.3(a)、(b)、(c)分别表示 N 为 16、32 和 64 时的周期图。

虽然本节推导的结果是以假设高斯概率密度为根据的,但其定性结果在一个相当宽广的范围内成立。

直接法又称周期图法,它是把随机序列 $x(n)$ 的 N 个观测数据视为一个能量有限的序列,直接计算 $x(n)$ 的离散傅里叶变换,得 $X(k)$,然后再取其幅值的平方,并除以 N ,作为序列 $x(n)$ 真实功率谱的估计。

【例 3-2】 利用 MATLAB 计算 $x(t) = \cos(2\pi * 40 * t) + 3\cos(2\pi * 100 * t) + \epsilon(t)$ 的功率谱函数的估计,其中 $\epsilon(t)$ 是白噪声。