第 3 章

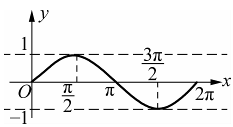
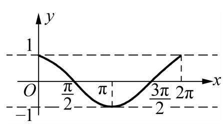
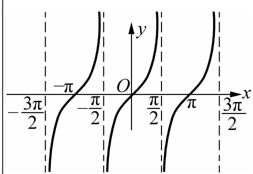
三 角 函 数

三角恒等变换的公式很多,如何熟练地记住所有的基本公式呢?这就需要抓住每一个公式的本质,理解了之后再通过大量的习题去巩固,这些公式自然就记住了。对于新课标全国卷的考生来说,值得指出来的是,三角函数往往作为第一道大题出现,可能还会结合解三角形的知识,所以学好三角函数可以为解三角形打下坚实的基础;此外,三角函数的图象和性质也经常出现在选择题和填空题中。

3.1 三角函数的图象和性质

1. 正弦函数、余弦函数和正切函数的图象与性质(见表 3-1)

表 3-1

<table>
<tr><td></td><td>$y=\sin x$</td><td>$y=\cos x$</td><td>$y=\tan x$</td></tr>
<tr><td>图象</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>定义域</td><td>**R**</td><td>**R**</td><td>$\left\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\right\}$</td></tr>
</table>

续表

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	**R**
最值	当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$y_{\max}=1$；当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ 时，$y_{\min}=-1$。	当 $x=2k\pi$ 时，$y_{\max}=1$；当 $x=2k\pi+\pi$ 时，$y_{\min}=-1$。	既无最大值也无最小值
周期性	2π	2π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性	在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数 在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 上是减函数	在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 上是增函数 在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 上是减函数	在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数
对称性	对称中心 $(k\pi,0)$ 对称轴 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$	对称中心 $\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称轴 $x=k\pi$	对称中心 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$ 无对称轴

2. 设 $A>0,\omega>0$，则由 $y=\sin x$ 的图象出发，有两种途径可以得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象（见图 3-1）。

3. 最小正周期

设 $\omega>0$，则：

（1）$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$；

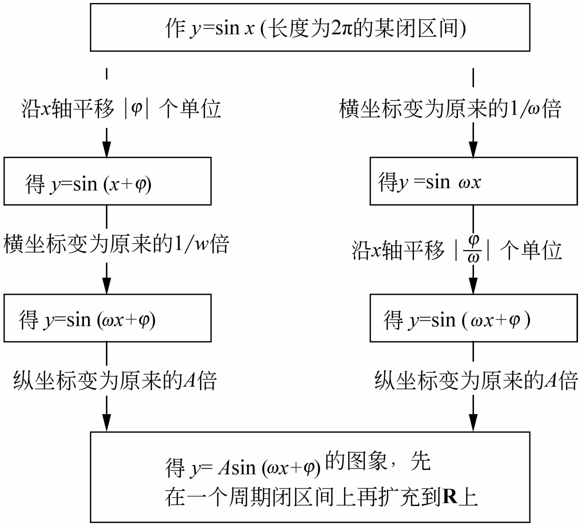


图　3-1

（2）$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$；

（3）$y=A\tan(\omega x+\varphi)$的最小正周期 $T=\dfrac{\pi}{\omega}$。

3.2　三角恒等变换

3.2.1　基本变换公式

（1）$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

（2）$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

（3）$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

（4）$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

（5）$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(6) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

3.2.2　二倍角公式

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

【注】 第二个公式有两个非常重要的等价变形形式：

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

这两种变形形式在三角函数的化简中经常用到，可以降幂（将平方变成1次方）。

3.2.3　积化和差公式

(7) $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

(8) $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

(9) $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

(10) $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

【注】 积化和差公式不需要死记硬背，因为式(1)＋式(2)→式(7)，式(1)－式(2)→式(8)，式(3)＋式(4)→式(9)，式(3)－式(4)→式(10)。

3.2.4　和差化积公式

(11) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（12）$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

（13）$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

（14）$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

【注】 和差化积公式不需要死记硬背，比如对于式(11)，注意到 $\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$，为了方便书写，不妨令 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$，$y=\frac{\alpha-\beta}{2}$，则 $\alpha=x+y$，$\beta=x-y$，于是 $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=(\sin x\cos y+\cos x\sin y)+(\sin x\cos y-\cos x\sin y)=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，式(12)、式(13)、式(14)都可以进行类似的推导。

3.2.5 万能代换公式

（15）$\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

（16）$\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

（17）$\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

【注】 之所以叫万能代换公式，是因为这三个公式都是用 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 来表示 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的，对于式(15)，

$$\sin\alpha = \frac{\sin\left(2\times\frac{\alpha}{2}\right)}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

对于式(16)，$\cos\alpha = \frac{\cos\left(2\times\frac{\alpha}{2}\right)}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

对于式(17)，只需在 $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ 中，令 $x=y=\tan\frac{\alpha}{2}$ 即可。

3.2.6 辅助角公式

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\text{即 }\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{b}{a}\right)$。

【注】 关于辅助角公式的两点说明：

(1) 推导：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$

令 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则，

$$\begin{aligned} a\sin x+b\cos x &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi) \end{aligned}$$

（2）高考数学常考的具体辅助角变形形式：

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(注：\tan\varphi=1，可取\ \varphi=\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(注：\tan\varphi=-1，可取\ \varphi=-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\left(注：\tan\varphi=\sqrt{3}，可取\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\left(注：\tan\varphi=-\sqrt{3}，可取\ \varphi=-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(注：\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}，可取\ \varphi=\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(注：\tan\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}，可取\ \varphi=-\dfrac{\pi}{6}\right)$

3.3 例题分析

3.3.1 三角函数的图象

【例 3.1】 已知函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\pi\leqslant\varphi<\pi)$的图象如图所示，则 $\varphi=$________。（见图 3-2）

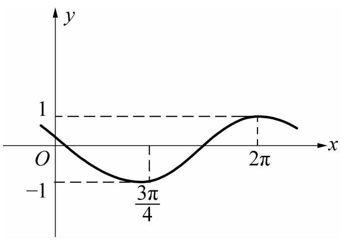


图 3-2

解：答案$\frac{9}{10}\pi$。从图象可知最小正周期 $T=2\times\left(2\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{5}{2}\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{5}{2}\pi}=\frac{4}{5}$，又当 $x=\frac{3}{4}\pi$ 时，$\omega x+\varphi=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即$\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\pi+\varphi=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$，所以 $\varphi=\frac{9}{10}\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $\varphi\in[-\pi,\pi]$，所以 $k=0$，从而 $\varphi=\frac{9}{10}\pi$。

【例 3.2】 已知函数 $f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|>\frac{\pi}{2}\right)$，$y=f(x)$的部分图象如图 3-3 所示，则 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)=$________。

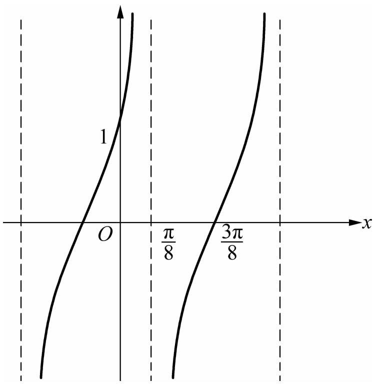


图　3-3

解：答案$\sqrt{3}$。从图象可知最小正周期 $T=2\times\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=\frac{\pi}{T}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$，又当 $x=\frac{3}{8}\pi$ 时，$\omega x+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即

$2\times\frac{3}{8}\pi+\varphi=k\pi$，所以 $\varphi=k\pi-\frac{3}{4}\pi$，又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $k=1$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，于是 $f(x)=A\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，从图象可知 $f(0)=1$，即 $A\tan\frac{\pi}{4}=1$，得 $A=1$，从而 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)=\tan\left(2\times\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$。

【例 3.3】 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图 3-4 所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为（　　）。

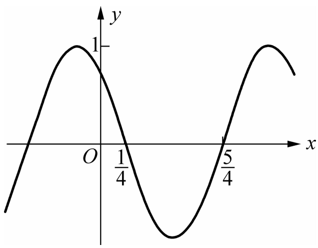


图　3-4

(A) $\left(k\pi-\frac{1}{4},k\pi+\frac{3}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$

(B) $\left(2k\pi-\frac{1}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$

(C) $\left(k-\frac{1}{4},k+\frac{3}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$

(D) $\left(2k-\frac{1}{4},2k+\frac{3}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$

解：应选(D)。$f(x)$ 的最小正周期为 $T=2$，并且从图象中可以看出，在一个周期内，即 $-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7}{4}$，$f(x)$ 的递减区间为 $\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$，所以 $f(x)$ 的所有单调递减区间为 $-\frac{1}{4}+kT\leqslant x\leqslant$

$\frac{3}{4}+kT$,即 $x\in\left(-\frac{1}{4}+2k,\frac{3}{4}+2k\right),k\in\mathbf{Z}$。

【例 3.4】 已知 $\omega>0$,函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,则 ω 的取值范围是(　　)。

(A) $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$　　(B) $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$

(C) $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　(D) $(0,2]$

解:应选(A)。当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4},\pi\omega+\frac{\pi}{4}\right)$,而 $y=\sin x$ 的单调递减区间是$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)$,$k\in\mathbf{Z}$,所以,$\left(\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4},\pi\omega+\frac{\pi}{4}\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)$,即

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \pi\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3}{2}\pi+2k\pi\end{cases},\text{解得:}4k+\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant2k+\frac{5}{4},k\in\mathbf{Z}。$$

注意到,$4k+\frac{1}{2}\leqslant2k+\frac{5}{4}\Rightarrow k\leqslant\frac{3}{8}$,

又因为 $\omega>0$,所以,$2k+\frac{5}{4}>0\Rightarrow k>-\frac{5}{8}$,即$-\frac{5}{8}<k\leqslant\frac{3}{8}$,所以,$k=0$,从而$\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$。

【例 3.5】 设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$。若 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上具有单调性,且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$,则 $f(x)$的最小正周期为________。

解:答案 π。根据题意可以画出 $f(x)$图象如图 3.5 所示,则